Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 12.07.21

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2020/2021

Esercizio 1

1. Si scrivano le equazioni di Hamilton, specificando gli argomenti di tutte le funzioni che appaiono [1,5pt].
2. Si dimostri l'equivalenza delle equazioni di Hamilton con le equazioni di Lagrange (specificando quando è possibile) [2,5pt].
3. Dare la definizione di parentesi di Poisson [1,5pt].
4. Che relazione intercorre tra le parentesi di Poisson e le costanti del moto? Spiegarlo nei dettagli, facendo riferimento alla definizione completa di costante del moto [2pt].
5. Scrivere le quattro proprietà delle parentesi di Poisson e dimostrare le prime tre (cioè si tralasci la dimostrazione dell'identità di Jacobi) [2,5pt].
6. Utilizzando le Parentesi di Poisson, si dimostri che le trasformazioni puntuali estese sono trasformazioni canoniche ($q_h = v_h(\tilde{q}, t)$ e $p_k = \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{p}_\ell \frac{\partial v_\ell}{\partial q_k}$) [2pt].
7. *Facoltativo: Utilizzando le parentesi di Poisson, verificare che la componente del momento angolare lungo l'asse z è una costante del moto per un punto materiale che si muova in un generico potenziale centrale (indipendente dal tempo) [1pt].*

Esercizio 2

Si consideri un punto materiale di massa m vincolato su un piano di coordinate cartesiane (x, y) e soggetto a una forza con potenziale

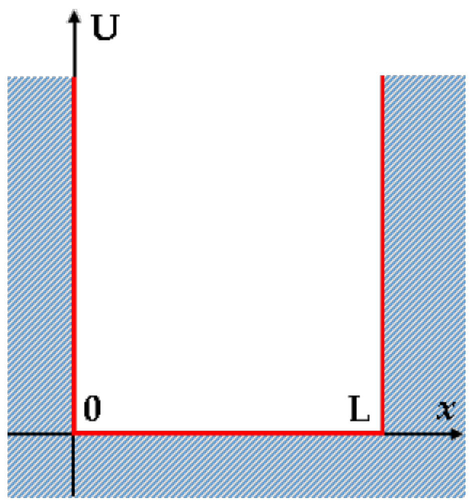
$$V(x,y) = k\,\left(\beta\, x^2 + \tfrac{1}{2} y^2\right) - k\,L^2 \log\left(1 + \frac{x^2}{L^2} + \frac{y^2}{L^2}\right)\,.$$

1. Scrivere la Lagrangiana L del sistema, usando come coordinate libere le coordinate x, y [0,5pt].
2. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema [1pt].
3. Trovare i punti di equilibrio del sistema e discutere la loro stabilità [3,5pt].
4. Linearizzare la Lagrangiana attorno al punto $(x, y) = (0, L)$ e calcolare le frequenze delle piccole oscillazioni [1,5pt].
5. Quante e quali costanti del moto ci sono per un generico valore di β? [0,5pt].
6. Per quale valore di β si trova un'ulteriore costante del moto? Argomentare [1pt].
7. Per il valore di β trovato al punto precedente, si trovi un nuovo sistema di coordinate in cui esiste una coordinata ciclica associata alla nuova costante del moto. Si usi tale coordinata ciclica per ridurre la Lagrangiana (a 1 grado di libertà) [2pt].

8. *Facoltativo: si scriva il potenziale efficace riferito al punto precedente e si tracci il diagramma di fase nel caso in cui la nuova costante del moto sia nulla. [1pt].*

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in una buca di potenziale di altezza infinita e larghezza L, **come in figura**.



1. Si scriva e si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nella regione permessa [1pt].
2. Si determini lo spettro dell'Energia, la sua degenerazione e le relative autofunzioni, imponendo le opportune condizioni al bordo [4pt].
3. Calcolare il valore medio delle variabili posizione (x) e impulso (p) nello stato fondamentale (cioè di minima energia) [2pt].
4. Le autofunzioni dell'energia trovate sono funzioni d'onda (cioè descrivono stati fisici del sistema)? Perché? [1pt]