Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 23.02.22

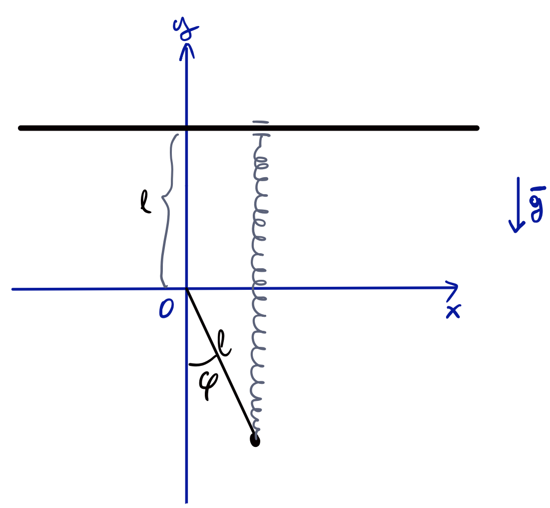
Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2020/2021

Esercizio 1

Si consideri un sistema Lagrangiano a n gradi di libertà, con Lagrangiana $L(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, t)$.

1. Sotto quale condizione si possono scrivere le equazioni di Hamilton equivalenti? [1pt].
2. Scrivere le equazioni di Hamilton equivalenti alle equazioni di Lagrange del sistema considerato e l'Hamiltoniana corrispondente [2pt].
3. Si dimostri l'equivalenza tra i due sistemi di equazioni [3pt].
4. Cos'è una coordinata ciclica in un sistema Hamiltoniano? Perché la sua presenza implica una costante del moto? [2pt]
5. Dimostrare che le equazioni di Hamilton possono essere scritte nella forma $\dot{p}_k = \{p_k, H\}$ and $\dot{q}_k = \{q_k, H\}$ [2pt].
6. Si scriva l'equazione di Hamilton-Jacobi. Perché trovare un integrale completo di tale equazione è equivalente a trovare una traiettoria che risolva le equazioni del moto? [2pt].
7. *Facoltativo: si consideri il problema Kepleriano tridimensionale: è un sistema integrabile? Se sì, lo si dimostri. [1pt].*

Esercizio 2

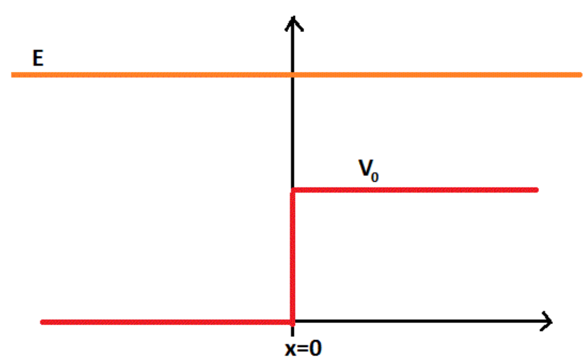


Un pendolo semplice di massa m e lunghezza ℓ è soggetto alla forza di gravità e a una forza elastica data da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla, disposta come in figura: un estremo della molla è legato a m e l'altro è libero di scorrere sulla retta $y = \ell$.

1. Scrivere la Lagrangiana L del sistema, usando come coordinata libera l'angolo φ [2pt].
2. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema [1pt].
3. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema e discuterne la stabilità [2,5pt].
4. Pensando m e ℓ fissati, e k parametro libero, si tracci il grafico delle biforcazioni [1pt].
5. Calcolare la Lagrangiana linearizzata attorno al punto di coordinate $(x, y) = (0, -\ell)$ e la relativa equazione di Lagrange [1,5pt].
6. Qual è la frequenza delle piccole oscillazioni? Risolvere l'equazione di Lagrange linearizzata [1pt].
7. Linearizzare l'equazione al punto 2 attorno al punto di coordinate $(x, y) = (0, -\ell)$ e confrontarla con quella al punto 5 [1pt].

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in un gradino di potenziale di altezza finita V_0, come in figura, con $E > V_0$



1. Scrivere l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo per un generico problema unidimensionale [1pt].
2. Si risolva l'equazione di Schrödinger scritta nel punto 1 nelle due regioni a potenziale costante [2pt].
3. Si determini la soluzione totale, imponendo le opportune condizioni di raccordo, e assumendo che la particella arrivi da sinistra (sempre per $E > V_0$) [3pt].
4. Calcolare il coefficiente di riflessione [2pt].