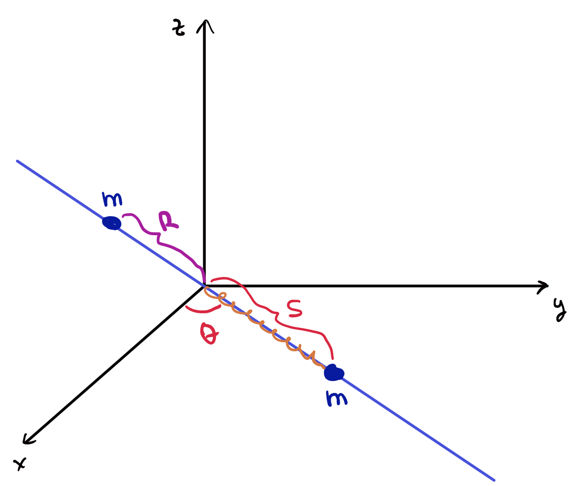
Esame di Introduzione alla Fisica Teorica — 30.01.23

Laurea triennale in Fisica, UniTS, a.a. 2021/2022

Esercizio 1

1. Si definisca cosa si intende per *costante del moto* in un sistema Lagrangiano [2pt].
2. Si enunci e si dimostri il teorema di Nöther, giustificando tutti i passaggi della dimostrazione [5pt].
3. Si *utilizzi il teorema di Nöther* per dimostrare che in un sistema invariante per rotazioni attorno all'asse z, la componente lungo tale asse del momento angolare è una costante del moto [2pt].
4. Che relazione intercorre tra le costanti del moto e le parentesi di Poisson in un sistema Hamiltoniano? [1pt]
5. Si consideri un punto materiale che si muove senza vincoli in tre dimensioni. Che simmetria è legata alla conservazione della quantità di moto? Utilizzando il formalismo Hamiltoniano, di dimostri che la quantità di moto genera tale simmetria [2pt].
6. *Facoltativo: Si spieghi perché la trottola di Lagrange è un sistema integrabile [1pt].*

Esercizio 2



Si consideri il sistema meccanico illustrato in figura. Una barra di massa trascurabile giace sul piano xy ed è libera di ruotare attorno all'asse z. Due punti materiali di massa uguale m sono vincolati alla barra; uno è fisso a distanza R dall'origine, mentre l'altro è libero di muoversi lungo la barra. Quest'ultimo punto è legato all'origine da una molla di costante elastica k e lunghezza a riposo nulla.

1. Scrivere la Lagrangiana del sistema, usando come coordinate libere l'angolo θ in figura e l'ascissa s del punto mobile lungo la barra (s è positiva quando il punto mobile si trova dalla parte opposta rispetto al punto fisso) [2pt].

2. Scrivere le equazioni di Lagrange del sistema [1pt].

3. Dire qual è la coordinata ciclica e la corrispondente costante del moto (spiegando a quale grandezza fisica corrisponde) [1pt].

4. Trovare la Lagrangiana ridotta del sistema, utilizzando la presenza della coordinata ciclica [1pt].

5. Determinare le configurazioni di equilibrio del sistema descritto dalla Lagrangiana ridotta e discuterne la stabilità [3pt].

6. Calcolare la frequenza delle piccole oscillazioni attorno ai punti di equilibrio stabili del sistema ridotto [1pt].

7. Si traccino il grafico del potenziale efficace e le traiettorie nel piano di fase del sistema ridotto (se c'è biforcazione si traccino i diagrammi di fase nelle diverse situazioni); si descriva le corrispondenti traiettorie del sistema completo [2pt].

8. *Facoltativo: Si trovi l'Hamiltoniana del sistema in figura e si dimostri, utilizzando le parentesi di Poisson, che il sistema è invariante per rotazioni attorno all'asse z [1pt].*

Esercizio 3

Si consideri una particella quantistica in presenza del seguente potenziale

$$V(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ V_0 & x \geq 0 \end{cases},$$

con $V_0 > 0$. Si consideri il caso in cui l'energia E è tale che $0 < E < V_0$.

1. Si risolva l'equazione di Schrödinger indipendente dal tempo nelle due regioni a potenziale costante [1pt].

2. Si determini la soluzione totale, imponendo le opportune condizioni di raccordo [4pt].

3. Le soluzioni sono stati fisici del sistema? In caso contrario, scrivere una generica soluzione dell'equazione di Schrödinger per questo sistema che sia uno stato fisico [1pt].

4. Calcolare i coefficienti di trasmissione e riflessione [1pt].