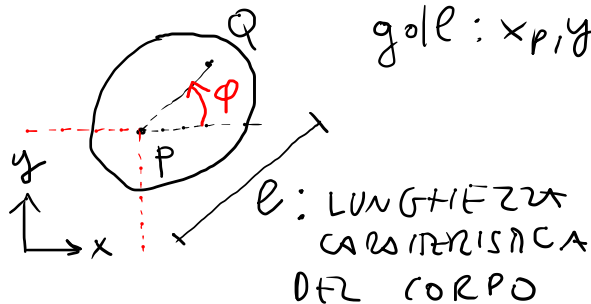


# CENNI SULLA CINEMATICA DEL C.R.

9/03/23

- ROTOTRASL. RIGIDA NEL PIANO

gol:  $x_P, y_P, \varphi$

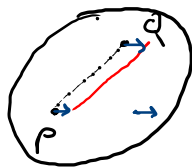


NOI CI INTERESSIAMO SOLO DI  
ROTOTRASL. RIGIDE INFINITESIME NEL PIANO  
(PICCOLI SPOSTAMENTI)

OBIETTIVO  
=> INTRODURRE OPPORTUNI "ACCORDIMENTI"  
PER BLOCCARE QUESTI SPOSTAMENTI  
INFINITESIMI E ASSICURARSI CHE IL  
CORPO RIMANGA "FERMO"

LE ROTOTRASL. RIGIDE INFINITESIME SONO:

1) TRASLAZIONI :  $|\underline{u}_P| \ll l$



$\underline{u}_P$  è costante,  $\forall P$   
 $\underline{u}_P = \underline{u}_Q$ ,  $\forall P, Q$

2) ROTAZIONE

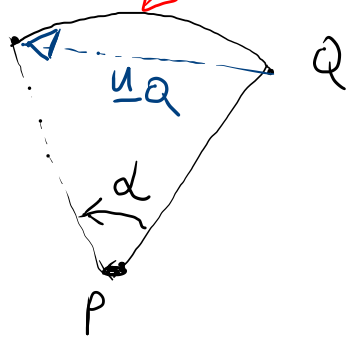


$\theta \ll 1$

P: CENTRO DI  
ROTAZIONE ( $\underline{u}_P = 0$ )  $\theta$  IN RADIANTI

# APPROFONDIAMO LA ROTAZIONE

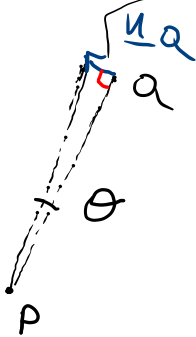
ARCO DI CIRCONF



$d \approx 1 \text{ RAD}$

GRANDE ROTAZIONE

L'ARCO SI  
CONFONDE  
CON LA TANGENTE



$\theta \ll 1$

ROTAZ. INFINITES.

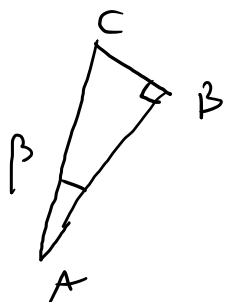
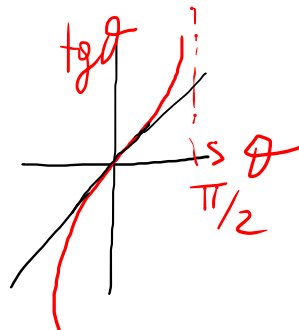
$$\downarrow$$

$$u_Q \perp PQ$$

$$\theta \ll 1$$

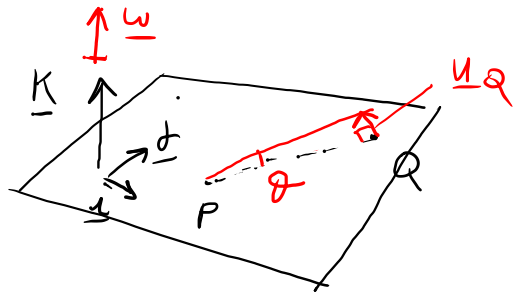
$$|u_Q| \approx |PQ| \theta$$

$$\sin \theta \approx \text{tg } \theta \approx \theta$$



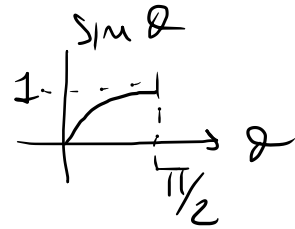
$$\frac{\overline{CB}}{\overline{AB}} = \text{tg } \beta$$

$$\overline{CB} \approx \overline{AB} \text{ tg } \beta$$



$$|u_Q| = \theta |PQ| \quad (*)$$

$\theta > 0$  : AUTORSICIO



$$\underline{\omega} = \theta \underline{K}$$

$|u_Q = \underline{\omega} \times PQ|$  : mi verifica l'eq. (\*) ed

è compatibile con la disposit. dei vettori nel disegno?

1) VERIFICA DELLA DISPOS. DEI VETTORI

$$\underline{u}_Q \perp \underline{\omega} \quad ; \quad \underline{u}_Q \perp PQ$$

OK                      OK

2) VERIFICA (\*)

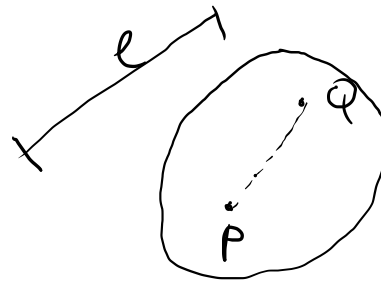
$$|u_Q| = |\underline{\omega}| |PQ| \overbrace{\sin \frac{\pi}{2}}^1 = \theta |PQ| \quad \textcircled{OK}$$

IN CONCLUSIONE UNA ROTOTRASL. INFINITESIMA SI PUO' RAPPRESENTARE VETTORIALMENTE CON LA RELAZIONE

$$\underline{u}_Q = \underbrace{\underline{u}_P}_{\text{TRASL.}} + \underbrace{\underline{\omega} \times \underline{PQ}}_{\text{ROTAZIONE}}$$

$$|\underline{u}_P| \ll l$$

$$\theta \ll 1$$



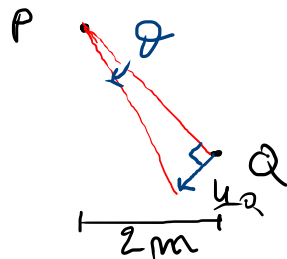
OSSERVAZ.

- se scrivo  $\underline{u}_Q = \underline{\omega} \times \underline{PQ} \Rightarrow$  LA TRASL. E' ASSENTE E P E' IL "CENTRO INSTANTANEO DI ROTAZIONE" (C.I.R.)

• NELLA PAGINA PRECEDENTE

$$\underline{\omega} = \theta \underline{k}, \theta \text{ POSITIVO SE ANTICLOCKWISE}$$

LES.  $\theta$  OROARIO,  $|\theta| = 0.01 \text{ RAD.}$  } DAN  $\Rightarrow \underline{u}_Q?$   
 P E' IL C.I.R.



2m

$$|\underline{u}_Q| = \theta |\underline{PQ}|$$

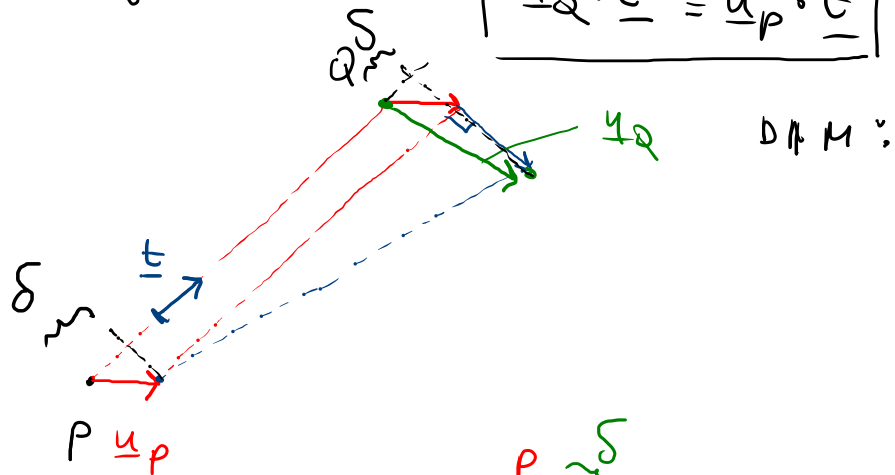
$$= 0.01 \cdot 2\sqrt{2}$$

$$\cong 0.0282 \text{ m}$$

- Partendo da  $\underline{u}_Q = \underline{u}_P + \underline{\omega} \times PQ$  si può ottenere queste uguaglianze:

$$\boxed{\underline{u}_Q \cdot \underline{t} = \underline{u}_P \cdot \underline{t}}$$

$$|\underline{t}| = 1$$

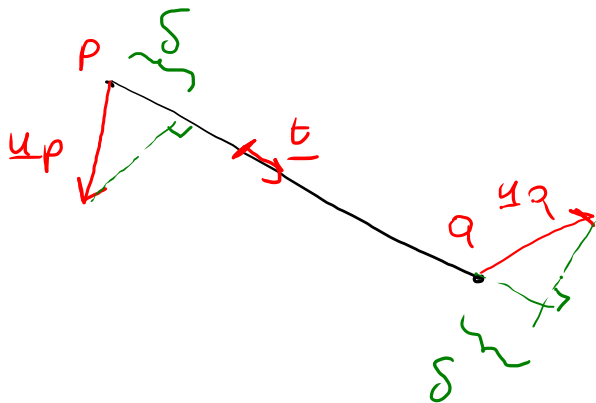


D.M.:

$$\boxed{\underline{u}_Q \cdot \underline{t} = \underline{u}_P \cdot \underline{t} + \underbrace{\underline{\omega} \times PQ \cdot \underline{t}}_{=0}$$

= 0 PER  
LE PROPRIETA'

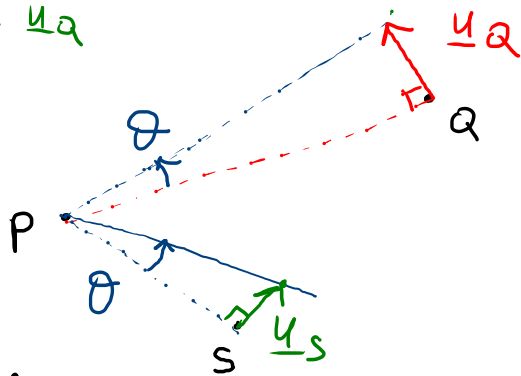
DEL PRODOTTO MISTO



## DUE COSTRUZIONI GRAFICHE NOTEVOLI

- 1) ASSEGNATI IL C.I.R. E LO SPOST. DI UN PUNTO, CALCOLARE GRAFICAMENTE LO SPOSTAMENTO DI UN PUNTO GENERICO.

NOTI:  $P, \underline{u}_Q$   
 $\underline{u}_S?$



$P \equiv C.I.R.$

CALCOLO  $\theta$ , OSSERVO IL VERSO DI ROTAZ.,  
LO RIPORTO SULL' ALLINEAMENTO PS  
E DISEGNO  $\underline{u}_S$

OSSERV.: VISTO CHE LA ROTAZIONE DEVE  
C.I.R. È UNICA, ALLORA VALE:

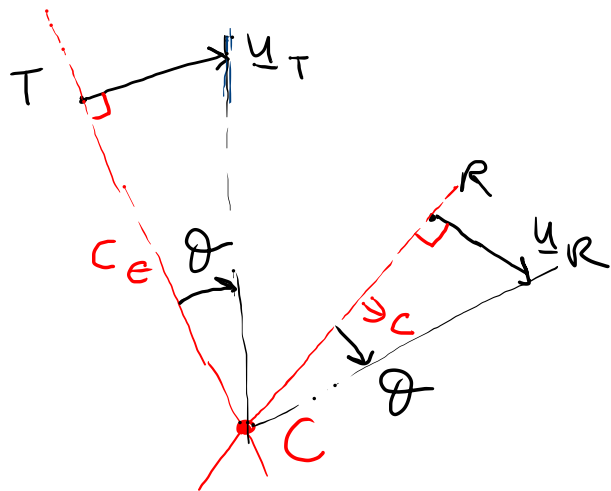
$$\underline{u}_Q = \underline{u}_S + \underline{\omega} \times SQ$$

2) ASSEGNATI DI DUE PUNTI, DETERMINARE GRAFICAMENTE LA POSIZ.  
DEL C.I.R. (C)

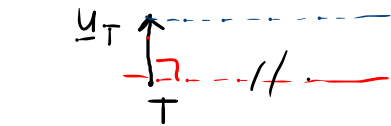
NON:  $\underline{u}_T, \underline{u}_R$

C?

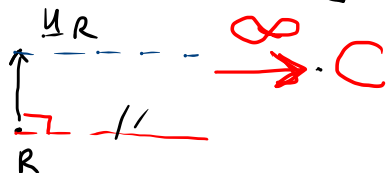
OSSERVAZ. ° GLI ANGOLI  
CHE SOTTENDONO  $\underline{u}_T, \underline{u}_R$  SONO  
UGUALI E UGUALI A  $\theta$



CASO PARTICOLARE:  $\underline{u}_T \parallel \underline{u}_R$



$$\underline{u}_T = \underline{u}_R$$

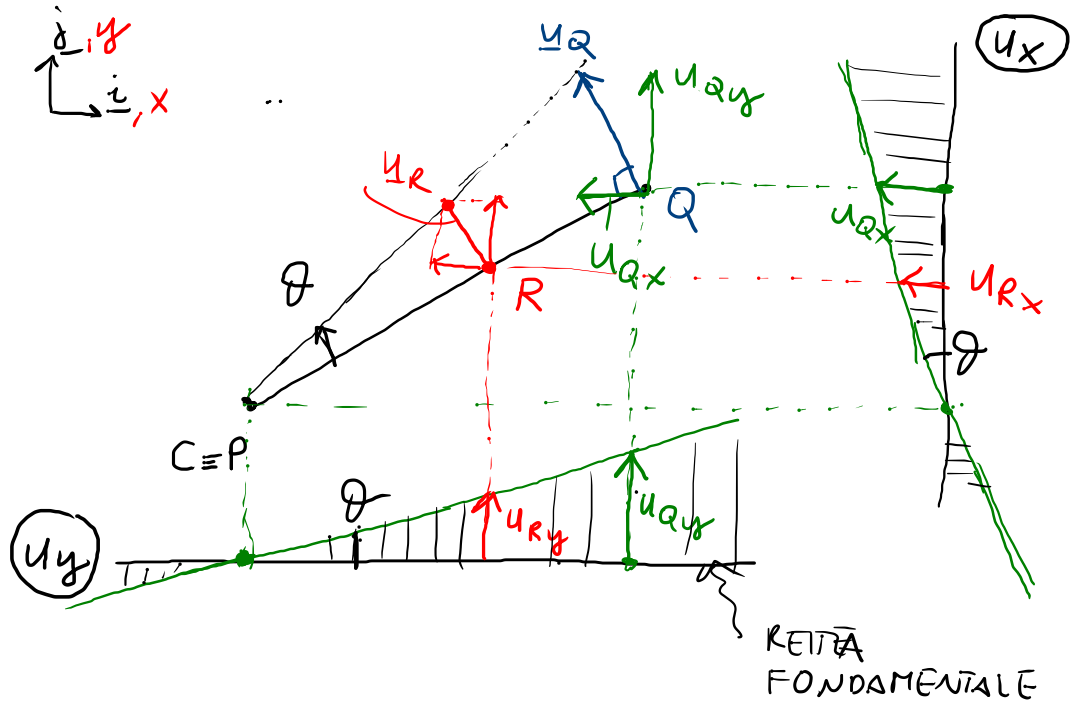


TRASLAZIONE: IL C.I.R. CORRISPONDE

AL PUNTO IMPROPRIO  
DELLE RETTE ORTOGONALI

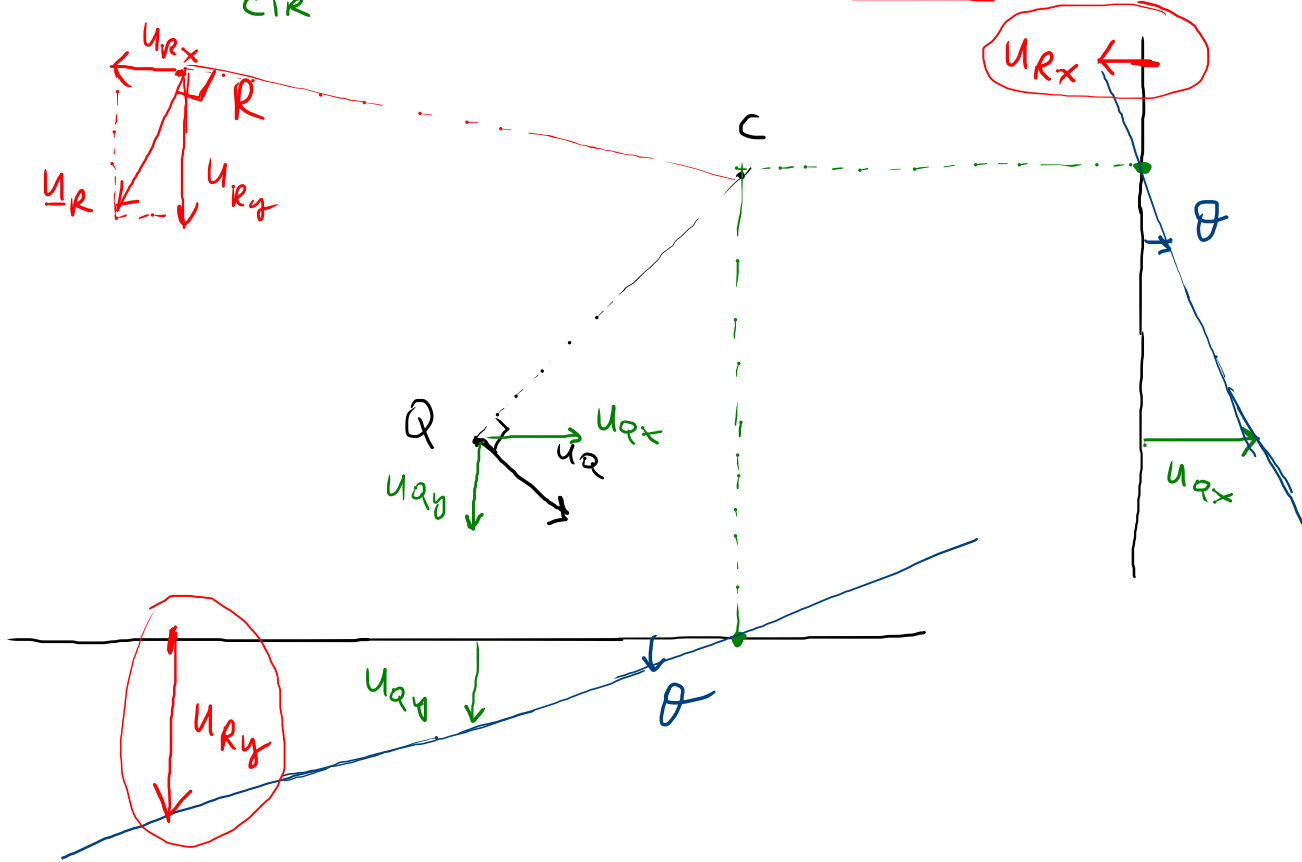
AI VETTORI ASSEGNATI ( $\theta=0$ )

# RAPPRESENT. GRAFICA DELLE COMPONENTI DI SPOSTAMENTO NEL PIANO





ES - NOTO  $C$ , NOTO  $\underline{u}_Q$ , DETERMINARE  $\underline{u}_R$



# LA TRAVE (BEAM)

DEFINIZIONE: SOLIDO TRIDIMENSIONALE AVENTE UNA DIMENSIONE PREPONDERANTE RISPETTO ALLE ALTRE DUE.

COME GENERARE UNA TRAVE

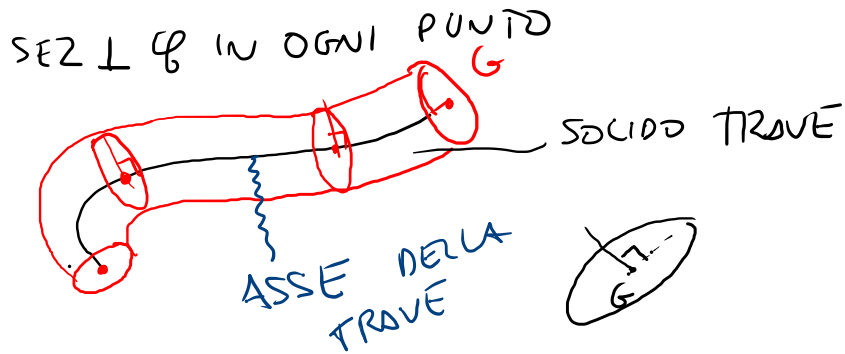
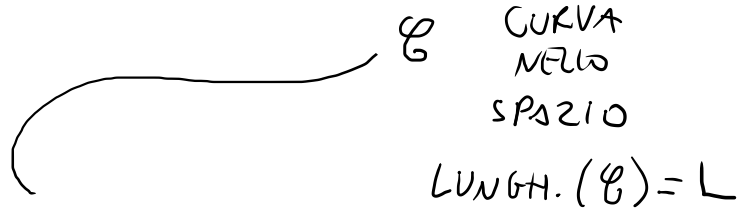
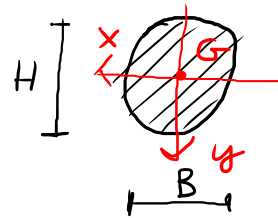


FIGURA PIANA



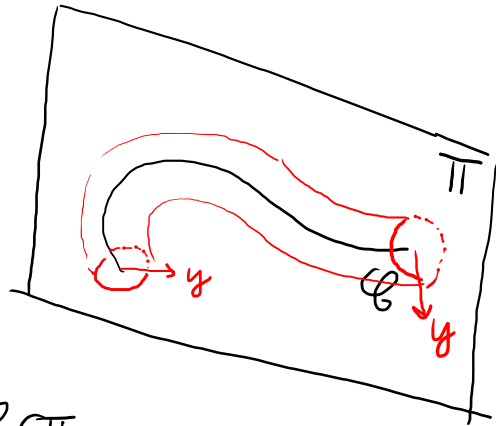
$B, H \ll L$   
 $(B, H \sim \frac{L}{10})$

SEZIONE RETTA  $\sigma$  (CROSS SECTION)  
" TRASVERSALE DELLA TRAVE

G: BARICENTRO  
x, y: ASSI PRINCIPALI

NELLO SPAZIO LA TRAVE HA 6 G.D.L.  
NEL PIANO " " 3 G.D.L.

LA TRAVE PIANA : asse della trave  $\in$  piano ; uno dei 2 assi principali  $\in$  al piano stesso.



6 ETT

$y \in \pi$  IN OGNI PUNTO

NEZ PIANO  $\pi$  LA TRAVE HA 3 G.D.L.



ROPPR. SCHEMATICA DELLA TRAVE (LINE D'ASSE IN SPESSORE APPREZZABILE)



TRAVE AD ASSE RETTILINEO

NODO



TELAIO

TRAVE RETT.

TRAVE AD ARCO

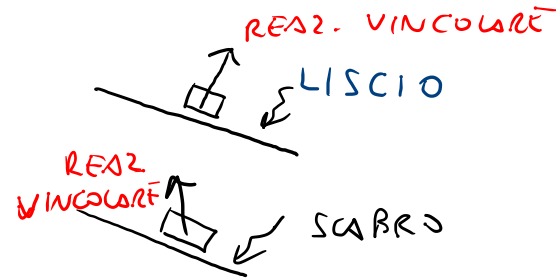


# VINCOLI PER LE TRAVI PIANE

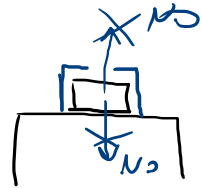
VINCOLO: UN QUALSIASI DISPOSITIVO MECCANICO IN GRADO DI LIMITARE IN TUTTO O IN PARTE IL MOTO DI UN SISTEMA.

## CLASSIFICAZ. DEI VINCOLI

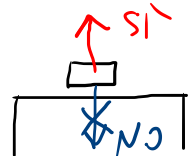
- VINCOLI
- LISCI (SENZA ATTRITO)
  - SCABRI (CON ATTRITO)



- VINCOLI
- PUNTUALI (AGISCONO IN UN PUNTO)
  - DIFFUSI



- VINCOLI
- BIATERI (AGISCONO IN ENTRAMBI I 2 VERSI DI UNA DIREZIONE)
  - MONOLATERI ( " SOLO IN UN VERSO)

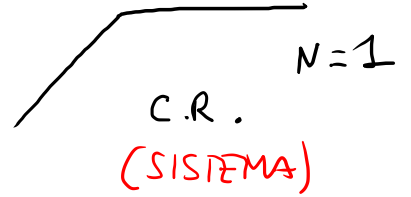


Introduciamo alcuni utili indici:

$g$ : N° DI G.D.L. DEL SISTEMA = 3 (NEL PIANO)

Se il n° di corpi rigidi del sistema è  $N$ , allora

$$g = 3 \cdot N$$



$v$ : molteplicità di vincolo: il n° di G.D.L. CHE IL VINCOLO (o I VINCOLI) sottrae al SISTEMA.

# PRINCIPALI VINCOLI PER LE STRUTTURE PIANE

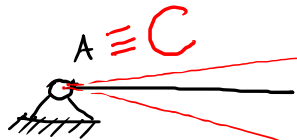
— VINCOLO TRIPLO ( $\nu=3$ ): INCASTRO

TRAVE LIBERA :  $g=3$  : 3 GDL DISPONIBILI

TRAVE "INCASTRATA" : 0 GDL DISPONIBILI

— VINCOLI DOPPI ( $\nu=2$ )

• CERNIERA

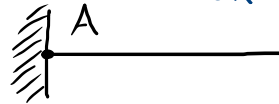


ROTA? INFINITESIMA  
(G.D.L. RESIDUE DEL  
CORPO VINCOLATO)

C.I.R = A

EQUAZ. DI  
VINCOLO  $\begin{cases} u_{Ax} = 0 \\ u_{Ay} = 0 \end{cases}$   
( $\theta \neq 0$ )

(PRESTAZIONI CINEMATICHE)



TRAVE "BLOCCATA"

NO ROTAZIONE

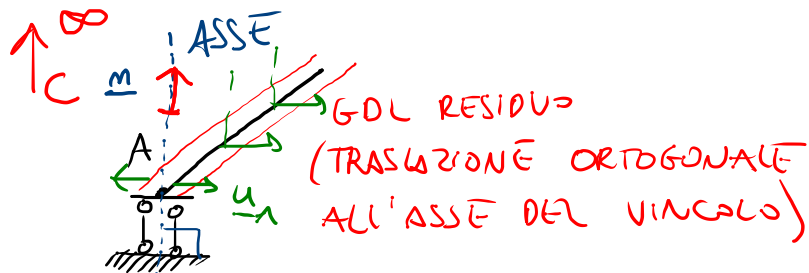
NO TRASL. VERT.

NO " ORIZZ.

EQ. VINCOLO  
INCASTRO

$$\begin{cases} u_{Ax} = 0 \\ u_{Ay} = 0 \\ \theta = 0 \end{cases}$$

• DOPPIO PENDOLO (PATINO, SLITTA)



EQ. DI VINCULO

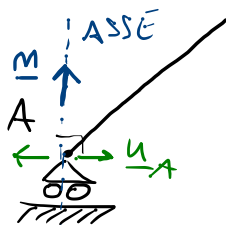
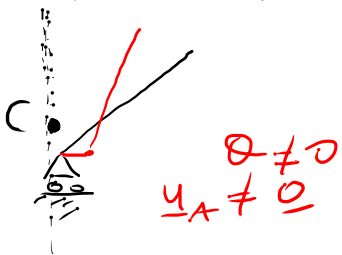
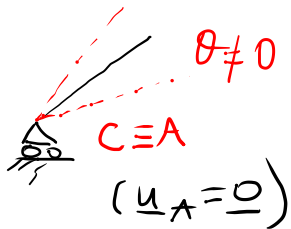
$$\begin{cases} \theta = 0 \\ \frac{u_A}{-} \cdot \frac{M}{-} = 0 \end{cases}$$

C.I.R.  $C \equiv$  PUNTO IMPROPRIO DELL'ASSE

- VINCOLI SEMPLICI ( $v=1$ )

GDL RESIDUI: 2

• CARRELLI (PENDOLO, BIELLA)

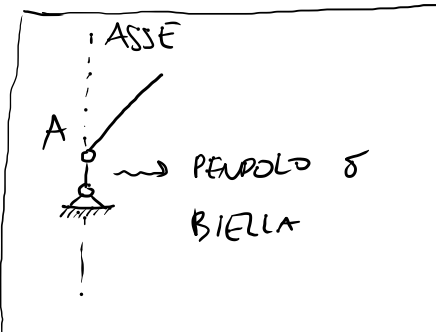


EQ. DI VINCULO

( $\theta \neq 0$ )

$C \in$  ASSE

$$\frac{u_A}{-} \cdot \frac{M}{-} = 0$$

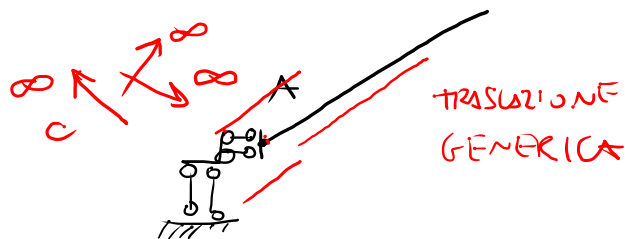


• **DOPPIO-DOPPIO PENDOLO (PATTINO-MANICOTTO)**

BLOCCA SOLO LA ROTAZIONE

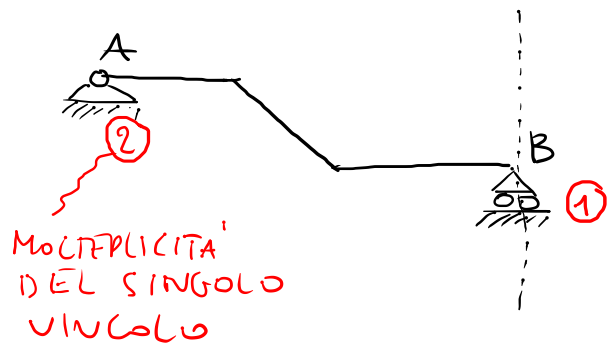
EQ. DI VINCULO  $\theta = 0$

TUTTE LE TRASLAZIONI  
SONO POSSIBILI



**C È RETTA IMPROPRIA**

STUDIO DELLA COMBINAZ. DI VINCOLI SU UN C.R.



MOLTEPLICITA'  
DEL SINGOLO  
VINCULO

$$g = 3$$

$$v = 2 + 1 = 3$$

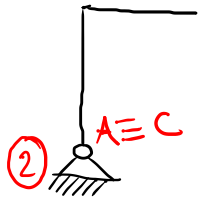
$$\Delta = 3$$

(MOLTEPLICITA' TOTALE DI  
VINCULO DEL SISTEMA)

(n° di G.D.L. "EFFETTIVAMENTE"  
sottratti dai vincoli al  
sistema)

$$\Delta \leq g$$



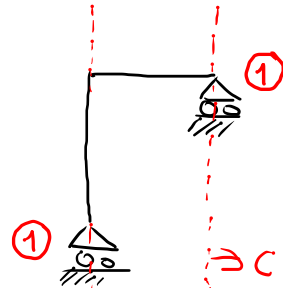


$$g=3$$

$$v=2$$

$$s=2$$

$g-s=1 = \text{G.D.L. RESIDUO}$   
(ROTAZ. A TORNO AD A)



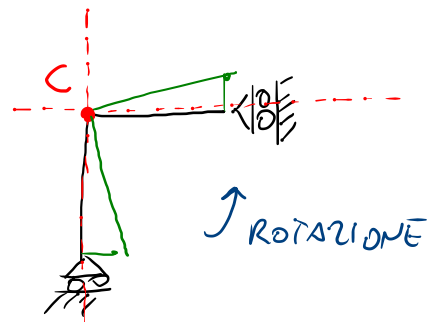
$$g=3$$

$$v=2$$

$$s=2$$



TRASLAZIONE  
ORIZZONTALE

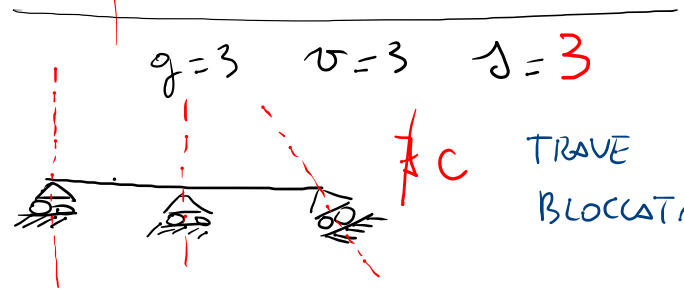


$$g=3$$

$$v=2$$

$$s=2$$

↑ ROTAZIONE

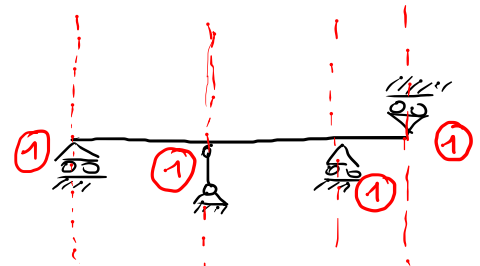


$$g=3$$

$$v=3$$

$$s=3$$

TRAVE  
BLOCCATA



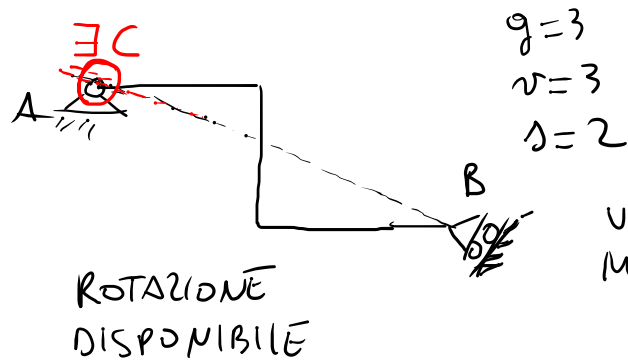
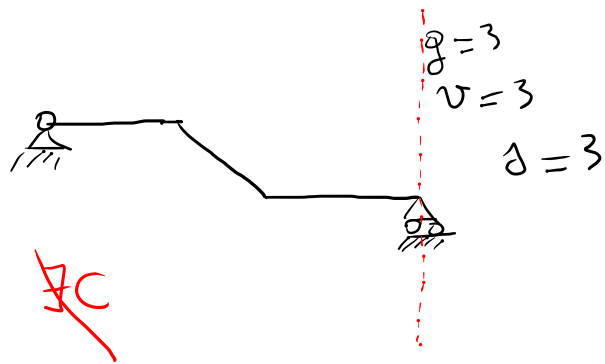
$$g=3$$

$$v=4$$

$$s=2$$



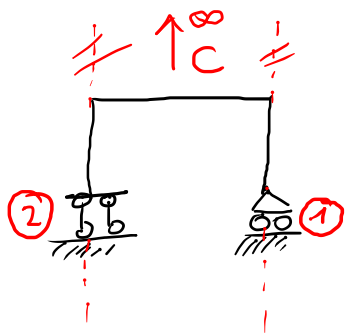
← TRASL. ORIZZ.



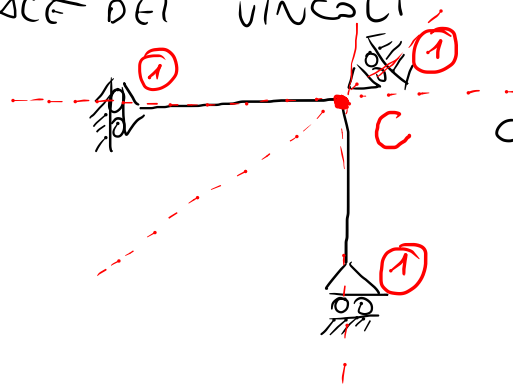
VINCOLI  
 MAL DISPOSTI  
 $\sigma$

DISPOSTI IN  
 MODI NON EFFICACE

ALTRI ESEMPI DI DISPOSIT. NON EFFICACE DEI VINCOLI



← TRASL. ORIZZ.



CIR COMPATIBILE  
 CON I 3 VINCOLI

$g=3$   
 $v=3$   
 $\Delta=2$  ROTAZIONE  
 RESIDUA

# CLASSIFICAZ. DELLE STRUTTURE

- STR. LABILI ( $\Delta < g$ ) (STR. ROTATE DI G.D.L. RESIDUI)

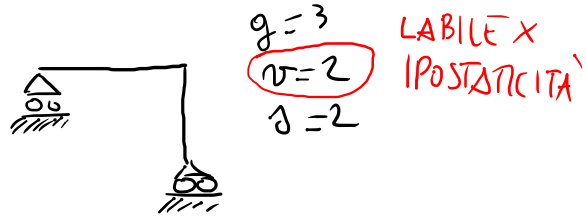
- STR. ISOSTATICHE ( $g = v = \Delta$ ) (ISO-VINCOLATA)

- STR. IPERSTATICHE ( $g = \Delta < v$ ) (IPER-VINCOLATA)

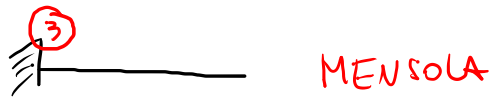
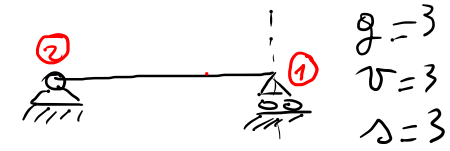
$g=3, v=5, \Delta=3$



## STR. LABILE



## STR. ISOSTATICA



## STR. IPERSTATICHE

