

Nome e Cognome

Corso di studi: Fisica Matematica

Esercizio 1. (4+4 pt) Si calcolino i seguenti limiti

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cosh(\sqrt{|x|})}{\sqrt{\sin(x^2)}} = \boxed{}, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \sinh\left(\frac{1}{3x}\right) \ln(x^x + 1) \tan\left(\frac{1}{\ln x}\right) = \boxed{}.$$

Esercizio 2. (8 pt) Si studi la funzione

$$f(x) = x \ln(x^2 + 4) + 4 \arctan\left(\frac{x}{2}\right) - 4x,$$

determinando:

i) Dominio:

ii) Limiti importanti:

iii) Eventuali asintoti:

iv) Derivata prima $f'(x) =$
e suo segno.

v) Intervalli di crescita e decrescenza. Eventuali punti di massimo e di minimo locali o globali.

vi) Derivata seconda $f''(x) =$
e suo segno.

vii) Intervalli di convessità e concavità. Eventuali punti di flesso.

viii) Eventuali simmetrie.

ix) Grafico di f .

Esercizio 3. (2+2+2+2 pt) Sia $f : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte tale che

$$f(0) = 1, \quad f(1) = 2, \quad f(2) = 3.$$

Dimostrare che:

i) esiste almeno un punto in cui la derivata seconda si annulla;

ii) se f è convessa, allora f' è costante;

iii) se esiste un punto di minimo locale in $]0, 3]$, allora l'immagine della derivata contiene l'intervallo $[0, 1]$;

iv) se l'immagine della derivata è contenuta nell'intervallo $[0, 1]$, allora f' è costante.

Esercizio 4. (4+4 pt) Si calcolino:

$$\int_0^\pi \cos^2(x) \sin(\cos(x)) \sin(x) dx = \boxed{},$$

$$\int_0^3 (|x-2| - 1) e^x dx = \boxed{}.$$