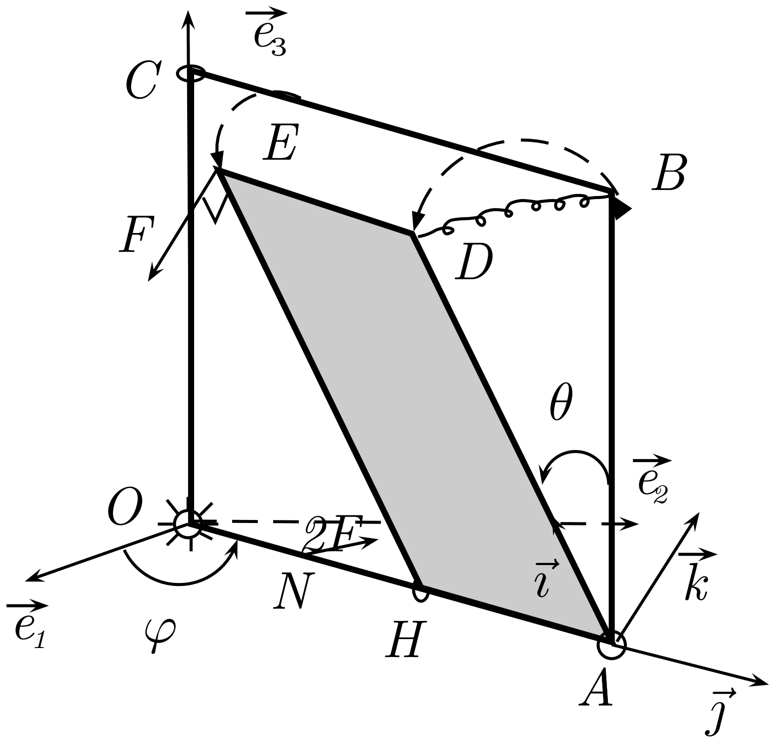
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 14 luglio 2014

(G. Tondo)



Una lamina rettangolare omogenea quadrata, di massa $2m$ e lati di lunghezza $2L$, ha il vertice O fissato a terra con una cerniera sferica e il punto C vincolato con un anellino ad un asse fisso verticale passante per O. Una seconda lamina rettangolare omogenea, di pari densità della prima, e di lati L e $2L$ è vincolata al lato OA della prima con una cerniera sferica nel vertice A e con un anellino nel punto medio H del lato OA. Una molla di costante elastica c collega il vertice B della lamina quadrata con il vertice D di quella rettangolare. Sulla lamina quadrata, agisce anche una forza applicata nel punto medio N del segmento OH, sempre parallela al versore $\vec{e}_1$ e di modulo $2F$. Un'altra forza, di modulo F, agisce sulla lamina rettangolare nel vertice E, in direzione sempre ortogonale alla suddetta lamina. Scelte come coordinate libere gli angoli φ e θ di figura, si chiede di:

STATICA.
Determinare:

1) le configurazioni di equilibrio del modello se $c > mg/4L$;

2) le reazioni vincolari nel punto C della lamina quadrata, all'equilibrio;

3) le reazioni vincolari della cerniera sferica sul vertice O della lamina quadrata, all'equilibrio.

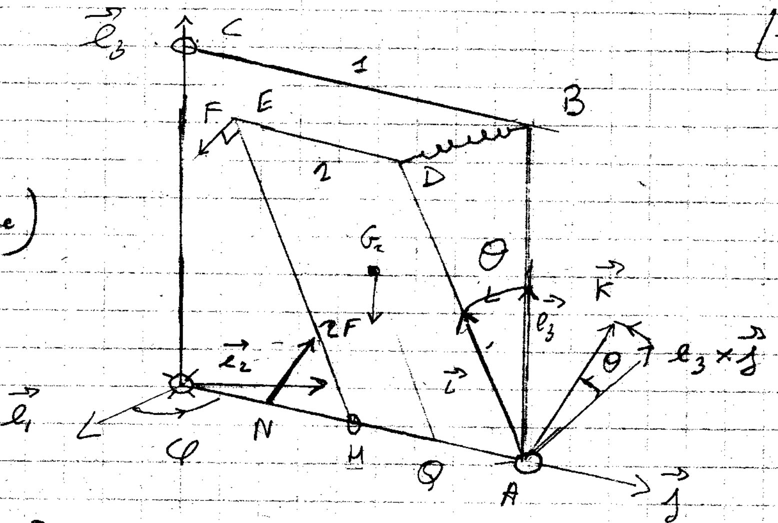
DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio con $\theta = \pi/2$;

6) calcolare le reazioni vincolari nel punto C della lamina quadrata, durante il moto.

Tema del 14/07/2016



Il modello è un articolato composto da due rigidi (lamine) vincolati fra loro, uno dei quali vincolato a terra e ad un asse fisso. Con il metodo dei congelamenti successivi si ricava che il modello ha 2 gradi di libertà. Come coordinate libere si possono scegliere i 2 angoli di figura:

$$-\pi < \varphi \leq \pi \quad ; \quad -\pi < \theta \leq \pi$$

Quindi, lo spazio delle configurazioni è:

$$C_V = S^1 \times S^1 = T^2$$

Per la scomposizione dei vettori in componenti, conviene considerare le 3 terne di versori ortogonali:

$(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: "fissa"

$(\vec{j}, \vec{e}_3 \times \vec{j}, \vec{e}_3)$: "intermedia" e solidale alla lamina 1

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$: "mobile" e solidale alla lamina 2

Le trasformazioni tra le prime due terne sono:

$$(1.1)\quad \begin{cases} \vec{j} = \cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \times \vec{j} = -\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2 \end{cases} \qquad (1.2)\quad \begin{cases} \vec{i} = -\sin\theta\, \vec{e}_3 \times \vec{j} + \cos\theta\, \vec{e}_3 \\ \vec{K} = \cos\theta\, \vec{e}_3 \times \vec{j} + \sin\theta\, \vec{e}_3 \end{cases}$$

Concatenandole si ottiene la trasformazione tra la prima e la terza

$$(1.3)\quad \begin{aligned} \vec{i} &= -\sin\theta\,(-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2) + \cos\theta\, \vec{e}_3 = \sin\varphi \sin\theta\, \vec{e}_1 - \cos\varphi \sin\theta\, \vec{e}_2 + \cos\theta\, \vec{e}_3 \\ \vec{k} &= \cos\theta\,(-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2) + \sin\theta\, \vec{e}_3 = -\sin\varphi \cos\theta\, \vec{e}_1 + \cos\varphi \cos\theta\, \vec{e}_2 + \sin\theta\, \vec{e}_3 \end{aligned}$$

Statica

Il modello è soggetto a forze conservative (il peso proprio, la molla interna tra B e D e la forza costante applicata in N) ed a una non conservativa (il carico "follower" solidale alla lamina 2 è applicato in E).
Determiniamo l'energia potenziale delle sollecitazioni conservative.

(2.1) $V(\varphi,\theta) = -2m\vec{g}\cdot\vec{x}_{G_1} - m\vec{g}\cdot\vec{x}_{G_2} + \frac{1}{2}c\overline{BD}^2 - \vec{F}_N\cdot\vec{x}_N$

(2.2) $\vec{x}_{G_1} = L(\vec{j}+\vec{e}_3)$ $\qquad \vec{g}\cdot\vec{x}_{G_1} = -g\vec{e}_3\cdot(L\cancel{\vec{j}}+\vec{e}_3) = -gL$

(2.3) $\vec{x}_{G_2} = \frac{3}{2}L\vec{j}+L\vec{i}$ $\qquad \vec{g}\cdot\vec{x}_{G_2} = -g\vec{e}_3\cdot L(\cancel{\tfrac{3}{2}\vec{j}}+\vec{i}) = -gL\,\vec{e}_3\cdot\vec{i} = -gL\cos\theta$

$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2+\overline{AD}^2 - 2\,\overline{AB}\cdot\overline{AD}\cos\theta = 8L^2(1-\cos\theta)$

(2.4) $\vec{x}_N = \frac{L}{2}\vec{j}$ $\qquad \vec{F}_N\cdot\vec{x}_N = -\cancel{2}F\vec{e}_1\cdot\frac{L}{\cancel{2}}\vec{j} = -FL\,\vec{e}_1\cdot\vec{j} = -FL\cos\varphi$

Dunque

(2.5) $V = \cancel{+2mgL} + mgL\cos\theta + \frac{1}{\cancel{2}}c\,\overset{4}{\cancel{8}}L^2(\cancel{1}-\cos\theta) + FL\cos\varphi$

$\quad \doteq L(mg-4cL)\cos\theta + FL\cos\varphi$

(2.6) $\dfrac{\partial V}{\partial\varphi} = -FL\sin\varphi = -Q_\varphi^{(con)}$

(2.7) $\dfrac{\partial V}{\partial\theta} = -L(mg-4cL)\sin\theta = -Q_\theta^{(con)}$

Determiniamo, ora, le componenti lagrangiane della sollecitazione non conservativa. Dalla definizione, segue

$$(3.1)\quad Q_\varphi^{(n.cons)} = \vec{F}_E \cdot \frac{\partial \vec{x}_E}{\partial \varphi} \qquad\qquad \vec{F}_E = -F\vec{k}$$

$$(3.2)\quad Q_\theta^{(n.cons.)} = \vec{F}_E \cdot \frac{\partial \vec{x}_E}{\partial \theta} \qquad\qquad \vec{x}_E = \vec{x}_H + (\vec{x}_E - \vec{x}_H) = L\vec{j} + 2L\vec{i}$$

$$\frac{\partial \vec{x}_E}{\partial \varphi} = L\left(2\frac{\partial \vec{i}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \vec{j}}{\partial \varphi}\right) \overset{(1.3)}{=} L\left(2\cos\varphi \sin\theta\, \vec{e}_1 + 2\sin\varphi\sin\theta\, \vec{e}_2 + -\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2\right)$$

$$\frac{\partial \vec{x}_E}{\partial \theta} \overset{(1.1)}{=} L\left(2\frac{\partial \vec{i}}{\partial \theta} + \cancel{\frac{\partial \vec{j}}{\partial \theta}}\right) \overset{(1.3)}{=} 2L\left(\sin\varphi\cos\theta\, \vec{e}_1 - \cos\varphi\cos\theta\, \vec{e}_2 - \sin\theta\, \vec{e}_3\right)$$

$$Q_\varphi^{(n.cons.)} = -FL\left[\cos\theta\left(-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2\right) + \sin\theta\, \vec{e}_3\right] \cdot \left[\left(2\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\right)\vec{e}_1 + \left(2\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\right)\vec{e}_2\right]$$

(3.3)

$$= -FL\left[-\cos\theta\sin\varphi\left(2\cos\varphi\sin\theta - \sin\varphi\right) + \cos\theta\cos\varphi\left(2\sin\varphi\sin\theta + \cos\varphi\right)\right]$$

$$= -FL\left(+\cos\theta\sin^2\varphi + \cos\theta\cos^2\varphi\right) = -FL\cos\theta$$

$$Q_\theta^{(n.cons.)} = -F\left[\cos\theta\left(-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2\right) + \sin\theta\, \vec{e}_3\right] \cdot 2L\left[\cos\theta\left(\sin\varphi\, \vec{e}_1 - \cos\varphi\, \vec{e}_2\right) - \sin\theta\, \vec{e}_3\right]$$

$$(3.4)\quad = -2FL\left(-\cos^2\theta\sin^2\varphi - \cos^2\theta\cos^2\varphi - \sin^2\theta\right)$$

$$= +2FL\left[\cos^2\theta\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) + \sin^2\theta\right]$$

$$= 2FL$$

Dunque

$$(3.5)\quad Q_\varphi^{(n.cons.)} = -FL\cos\theta \quad , \quad Q_\theta^{(n.cons)} = 2FL$$

N.B.

$$\frac{\partial Q_\varphi^{(n.cons.)}}{\partial \theta} = +FL\sin\theta \quad , \quad \frac{\partial Q_\theta^{(n.cons.)}}{\partial \varphi} = 0 \implies \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \neq \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi}$$

Allora, le componenti lagrangiane di tutte le sollecitazioni attive sono:

$$(4.1)\quad Q_\varphi = Q_\varphi^{(cons.)} + Q_\varphi^{(n.cons.)} = FL\sin\varphi - FL\cos\theta = FL(\sin\varphi - \cos\theta)$$

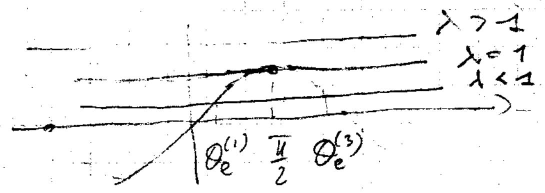
$$(4.2)\quad Q_\theta = Q_\theta^{(cons.)} + Q_\theta^{(n.cons.)} = L(mg - 4cL)\sin\theta + 2FL$$

quindi, le eq. pure di equilibrio

$$(4.3)\quad \begin{cases} \cancel{FL}(\sin\varphi - \cos\theta) = 0 \\ \cancel{L}(mg - 4cL)\sin\theta = -2F\cancel{L} \end{cases} \iff \begin{cases} \sin\varphi = \cos\theta \\ \sin\theta = \dfrac{2F}{4cL - mg} = \lambda > 0 \end{cases}$$

- Risolviamo

$$(4.4)\quad \begin{cases} \sin\theta_e = \lambda \\ \sin\varphi_e = \cos\theta_e \end{cases}$$



Dunque

se $\lambda = 1$ $\quad \theta_e^{(2)} = \dfrac{\pi}{2} \quad \sin\varphi_e = 0 \Rightarrow \begin{cases} \varphi_e = 0 \\ \varphi_e = \pi \end{cases}$

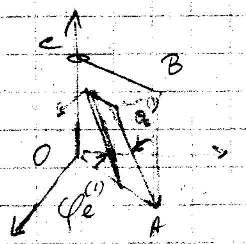
se $\lambda < 1$ $\quad \theta_e^{(1)} = \arcsin\lambda \quad \sin\varphi_e = \cos\theta_e = \sqrt{1-\lambda^2} \quad \begin{cases} \varphi_e = \arcsin\sqrt{1-\lambda^2} \\ \varphi_e = \pi - \arcsin\sqrt{1-\lambda^2} \end{cases}$

$\quad \theta_e^{(3)} = \pi - \arcsin\lambda \quad \sin\varphi_e = \cos\theta_e = -\sqrt{1-\lambda^2} \quad \begin{cases} \varphi_e = -\arcsin\sqrt{1-\lambda^2} \\ \varphi_e = \arcsin\sqrt{1-\lambda^2} - \pi \end{cases}$

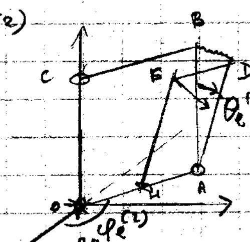
Dunque, possono esistere 6 configurazioni di equilibrio

Configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$

Se $\lambda < 1$



$\theta_e^{(1)} = \theta_e^{(2)}$

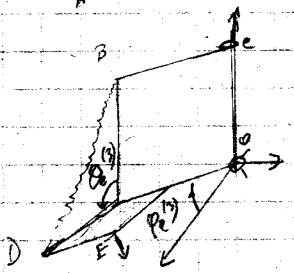


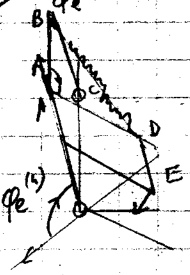
$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\arcsin\sqrt{1-\lambda^2},\ \arcsin\lambda\right)$$

$$\vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\pi - \arcsin\sqrt{1-\lambda^2},\ \arcsin\lambda\right)$$

(5.1) $$\vec{q}_e^{\,(3)} = \left(-\arcsin\sqrt{1-\lambda^2},\ \pi - \arcsin\lambda\right)$$

$$\vec{q}_e^{\,(4)} = \left(\arcsin\sqrt{1-\lambda^2} - \pi,\ \pi - \arcsin\lambda\right)$$

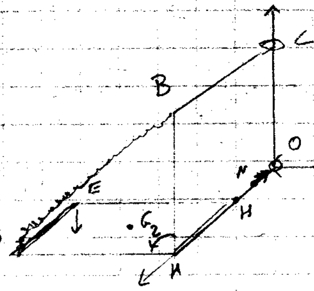


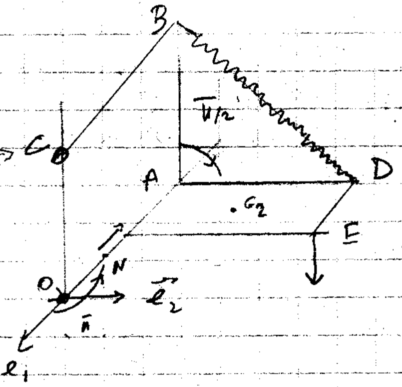


Se $\lambda = 1$

(5.2) $$\vec{q}_e^{\,(5)} = \left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\vec{q}_e^{\,(6)} = \left(\pi,\ \frac{\pi}{2}\right)$$





Reazioni all'equilibrio

L'anellino liscio esercita, sulla lamina 1, una reazione vincolare ortogonale all'asse fisso. Quindi,

(5.3) $$\vec{\Phi}_c = \phi_1 \vec{j} + \phi_2\, \vec{e}_3 \times \vec{j}$$

Per calcolare le 2 incognite (ϕ_1, ϕ_2) usiamo la II ECS su tutto il modello con polo in O:

(5.4) $$\vec{0} = (C-O)\times\vec{\phi}_c + \vec{M}_O^{(est)} \iff \vec{\phi}_c \times (C-O) = \vec{M}_O^{(est)}$$

$$\vec{M}_O^{(est)} = (H-O)\times\vec{F}_N + (G_1-O)\times 2m\vec{g} + (E-O)\times\vec{F}_F + (G_2-O)\times m\vec{g}$$

$$= \frac{L}{2}\,\vec{j}\times(-2F\vec{e}_1) + L(\vec{j}+\vec{e}_3)\times(-2mg\,\vec{e}_3) + L(2\vec{i}+\vec{j})\times(-F\vec{k}) +$$

$$+ L\left(\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{j}\right)\times(-mg\,\vec{e}_3)$$

$$= FL\sin\varphi\,\vec{e}_3 + 2mgL\,\vec{e}_3\times\vec{j} + 2FL\,\vec{j} - FL\,\vec{i} - mgL\left(-\sin\theta\,\vec{j} - \frac{3}{2}\vec{e}_3\times\vec{j}\right)$$

Tenendo conto della $(1.2)_1$ si ottiene

(6.1)
$$\vec{M}_O^{(att)} = FL\sin\varphi\,\vec{e}_3 + 2mgL\,\vec{e}_3\times\vec{j} + 2FL\,\vec{j} - FL\left(-\sin\theta\,\vec{e}_3\times\vec{j} + \cos\theta\,\vec{e}_3\right) + mgL\left(\sin\theta\,\vec{j} + \frac{3}{2}\vec{e}_3\times\vec{j}\right)$$
$$= FL(\sin\varphi-\cos\theta)\vec{e}_3 + L\left(\frac{7}{2}mg + F\sin\theta\right)\vec{e}_3\times\vec{j} + \left(2FL + mgL\sin\theta\right)\vec{j}$$

Allora, la II ECS (5.4) diventa

(6.2)
$$\left(\phi_1\vec{j} + \phi_2\,\vec{e}_3\times\vec{j}\right)\times 2L\,\vec{e}_3 = FL(\sin\varphi-\cos\theta)\vec{e}_3 + \left(\frac{7}{2}mgL + FL\sin\theta\right)\vec{e}_3\times\vec{j} + L\left(2F + mg\sin\theta\right)\vec{j}$$

cioè

$$-2L\,\phi_1\,\vec{e}_3\times\vec{j} + 2L\,\phi_2\,\vec{j} = FL(\sin\varphi-\cos\theta)\vec{e}_3 + \left(\frac{7}{2}mgL + FL\sin\theta\right)\vec{e}_3\times\vec{j} + L\left(2F + mg\sin\theta\right)\vec{j}$$

che equivale

(6.3)
$$\begin{cases} FL(\sin\varphi - \cos\theta) = 0 & \Rightarrow\ FL(\sin\varphi_e - \cos\theta_e) = 0 \\ -2L\,\phi_1 = L\left(\frac{7}{2}mg + F\sin\theta\right) & \Rightarrow\ \phi_1 = -\frac{7}{4}mg - \frac{F}{2}\sin\theta_e \\ 2L\,\phi_2 = L\left(2F + mg\sin\theta\right) & \Rightarrow\ \phi_2 = F + \frac{mg}{2}\sin\theta_e \end{cases}$$

N.B. Si osservi che la prima delle (6.3) coincide con l'eq. pura di equilibrio $(4.3)_1$. Ciò chiarisce il significato fisico della forza generalizzata Q_φ:

(6.4)
$$Q_\varphi = \vec{M}_O^{(att)}\cdot\vec{e}_3$$

Dunque, dalle (6.3) e (4.4) si ottiene

(6.5)
$$\vec{\Phi}_C = -\left(\frac{7}{4}mg + \frac{F}{2}\lambda\right)\vec{j} + \left(F + \frac{mg}{2}\lambda\right)\vec{e}_3\times\vec{j}$$

Se si vogliono le componenti di $\vec{\Phi}_C$ nella base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ e/o $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, basta utilizzare la trasformazione (1.1), rispettivamente la trasformazione (1.2) inversa, nella (6.5).

Per calcolare la reazione vincolare della cerniera sferica in O

(7.1) $$\vec{\Psi}_O = \psi_1 \vec{J} + \psi_2\, \vec{e}_3 \times \vec{J} + \psi_3\, \vec{e}_3$$

utilizziamo la I ECS applicata all'intero modello

(7.2) $$\vec{R}^{(att,est)} + \vec{\phi}_C + \vec{\Psi}_O = \vec{0}$$

$$\vec{R}^{(att,est)} = \vec{F}_N + 2m\vec{g} + \vec{F}_E + m\vec{g} = -2F\vec{e}_1 - 2mg\,\vec{e}_3 - F\vec{K} - mg\,\vec{e}_3$$

(7.3) $$= -2F\vec{e}_1 - 3mg\,\vec{e}_3 - F\vec{K}$$

$$\overset{(1.2)_2}{=} -2F\vec{e}_1 - 3mg\,\vec{e}_3 - F\left(\cos\theta\, \vec{e}_3\times\vec{J} + \sin\theta\, \vec{e}_3\right)$$

Per scomporre $\vec{e}_1$ sulla terna intermedia $(\vec{J}, \vec{e}_3\times\vec{J}, \vec{e}_3)$, il modo più semplice è quello di calcolare i prodotti scalari

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{J} \overset{(1.1)_1}{=} \vec{e}_1 \cdot \left(\cos\varphi\, \vec{e}_1 + \sin\varphi\, \vec{e}_2\right) = \cos\varphi$$

(7.4) $$\vec{e}_1 \cdot \left(\vec{e}_3\times\vec{J}\right) = \vec{e}_1 \left(-\sin\varphi\, \vec{e}_1 + \cos\varphi\, \vec{e}_2\right) = -\sin\varphi$$

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 = 0$$

Dunque

(7.5) $$\vec{e}_1 = \cos\varphi\, \vec{J} - \sin\varphi\, \vec{e}_3\times\vec{J}$$

Quindi, il risultante delle forze attive esterne sulla terna intermedia è dato da

$$\vec{R}^{(att,est)} = -2F\left(\cos\varphi\, \vec{J} - \sin\varphi\, \underset{\sim}{\vec{e}_3\times\vec{J}}\right) - 3mg\,\vec{e}_3 - F\left(\cos\theta\, \underset{\sim}{\vec{e}_3\times\vec{J}} + \sin\theta\, \vec{e}_3\right)$$

(7.6) $$= -2F\cos\varphi\, \vec{J} + F\left(2\sin\varphi - \cos\theta\right) \vec{e}_3\times\vec{J} - \left(3mg + F\sin\theta\right)\vec{e}_3$$

Allora

(7.7) $$\vec{\Psi}_O = -\vec{\phi}_C - \vec{R}^{(att,est)}$$

cioè

(8.1)
$$\vec{\Psi}_0 = \left(\frac{7}{4} mg + \frac{F}{2}\lambda\right)\vec{\jmath} - \left(F + \frac{mg}{2}\lambda\right)\vec{e}_3 \times \vec{\jmath} +$$
$$+ 2F\cos\varphi_e\,\vec{\jmath} + F\left(2\sin\varphi_e - \cos\theta_e\right)\vec{e}_3\times\vec{\jmath} + \left(3mg + F\sin\theta_e\right)\vec{e}_3$$
$$= \left(\frac{7}{4} mg + \frac{F}{2}\lambda + 2F\cos\varphi_e\right)\vec{\jmath} + \left[F\left(-1 + 2\sin\varphi_e - \cos\theta_e\right) - \frac{mg}{2}\lambda\right]\vec{e}_3\times\vec{\jmath} +$$
$$+ \left(3mg + F\sin\theta_e\right)\vec{e}_3$$

Allora

in $\vec{q}_e^{\,(1)}$ $\quad \sin\varphi_e = \sqrt{1-\lambda^2} = \cos\theta_e$, $\cos\varphi_e = \lambda$, $\sin\theta_e = \lambda$

(8.2)
$$\vec{\Psi}_0 = \left(\frac{7}{4} mg + \frac{5}{2}F\lambda\right)\vec{\jmath} + \left[F\left(-1 + \sqrt{1-\lambda^2}\right) - \frac{mg}{2}\lambda\right]\vec{e}_3\times\vec{\jmath} +$$
$$+ \left(3mg + F\lambda\right)\vec{e}_3$$

in $\vec{q}_e^{\,(2)}$ $\quad \sin\varphi_e = +\sqrt{1-\lambda^2} = \cos\theta_e$, $\cos\varphi_e = -\lambda$, $\sin\theta_e = \lambda$

(8.3)
$$\vec{\Psi}_0 = \left(\frac{7}{4} mg - \frac{3}{2}F\lambda\right)\vec{\jmath} + \left[F\left(-1 + \sqrt{1-\lambda^2}\right) - \frac{mg}{2}\lambda\right]\vec{e}_3\times\vec{\jmath} +$$
$$+ \left(3mg + F\lambda\right)\vec{e}_3$$

in $\vec{q}_e^{\,(3)}$ $\quad \sin\varphi_e = -\sqrt{1-\lambda^2} = \cos\theta_e$, $\cos\varphi_e = \lambda$, $\sin\theta_e = \lambda$

(8.4)
$$\vec{\Psi}_0 = \left(\frac{7}{4} mg + \frac{5}{2}F\lambda\right)\vec{\jmath} + \left[-F\left(1 + \sqrt{1-\lambda^2}\right) - \frac{mg}{2}\lambda\right]\vec{e}_3\times\vec{\jmath} +$$
$$+ \left(3mg + F\lambda\right)\vec{e}_3$$

in $\vec{q}_e^{\,(4)}$ $\quad \sin\varphi_e = -\sqrt{1-\lambda^2} = \cos\theta_e$, $\cos\varphi_e = -\lambda$, $\sin\theta_e = \lambda$

(8.5)
$$\vec{\Psi}_0 = \left(\frac{7}{4} mg - \frac{3}{2}F\lambda\right)\vec{\jmath} + \left[-F\left(1 + \sqrt{1-\lambda^2}\right) - \frac{mg}{2}\lambda\right]\vec{e}_3\times\vec{\jmath} +$$
$$+ \left(3mg + F\lambda\right)\vec{e}_3$$

$\lambda = 1$ in $\vec{q}_e^{\,(5)}$ $\quad \sin\varphi_e = 0 = \cos\theta_e$ $\quad \cos\varphi_e = 1$, $\sin\theta_e = 1$

(8.6)
$$\vec{\Psi}_0 = \left(\frac{7}{4} mg + \frac{5}{2}F\right)\vec{\jmath} - \left(F + \frac{mg}{2}\right)\vec{e}_3\times\vec{\jmath} + \left(3mg + F\right)\vec{e}_3$$

$\lambda = 1 \quad \vec{q}_e^{\,(6)} \qquad \sin\varphi_e = 0 = \cos\theta_e, \quad \cos\varphi_e = -1, \quad \sin\theta_e = 1$

$$(9.1) \qquad \vec{\Phi}_0 = \left(\frac{7}{4}mg - \frac{3}{2}F\right)\vec{j} - \left(F + \frac{mg}{2}\right)\vec{e}_3 \times \vec{j} + \left(3mg + F\right)\vec{e}_3$$

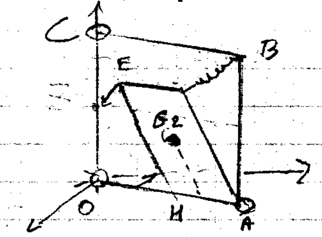
Dinamica

4) Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica del modello

$$(9.2) \qquad K = K^{(1)} + K^{(2)}$$

La lamina 1 compie un moto rotatorio attorno all' asse fisso $(O, \vec{e}_3)$. Quindi

$\vec{\omega}^{(1)} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3$



$$K^{(1)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^{(1)} \cdot I_O^{(1)}\left(\vec{\omega}^{(1)}\right)$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_3 \cdot I_O^{(1)}\left(\vec{e}_3\right)$$

$$(9.3) \qquad = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_{O3}^{(1)}$$

lamina quadrata omogenea $\Rightarrow$

$$= \frac{4}{3}mL^2\dot{\varphi}^2 \qquad\qquad I_{O3}^{(1)} = \frac{1}{3}\,2m\,(2L) = \frac{8}{3}mL^2$$

$$(9.4) \qquad K^{(2)} = \frac{1}{2}m\left|\vec{V}_{G_2}\right|^2 + \frac{1}{2}\,\vec{\omega}^{(2)} \cdot I_{G_2}^{(2)}\left(\vec{\omega}^{(2)}\right)$$

$$(9.5) \qquad \vec{\omega}^{(2)} = \vec{\omega}^{(tr)} + \vec{\omega}^{(rel)} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 + \dot{\theta}\,\vec{j} = \dot{\varphi}\left(\cos\theta\,\vec{i} + \sin\theta\,\vec{k}\right) + \dot{\theta}\,\vec{j}$$

$$\vec{V}_{G_2} = \vec{V}_Q + \vec{\omega}^{(2)} \times (G_2 - Q), \qquad \vec{V}_Q = \cancel{\vec{V}_O} + \vec{\omega}^{(1)} \times (Q - O) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \frac{3}{2}L\,\vec{j}$$

$$(9.6) \qquad = \frac{3}{2}L\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \vec{j} + \left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 + \dot{\theta}\,\vec{j}\right) \times L\,\vec{i}$$

$$= \frac{3}{2}L\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \vec{j} + L\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \vec{i} + L\dot{\theta}\,\vec{j} \times \vec{i}$$

$$= \frac{3}{2}L\dot{\varphi}\,\vec{e}_3 \times \vec{j} + L\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{j} - L\dot{\theta}\,\vec{k}$$

Scomponendo il versore $\vec{e}_3 \times \vec{j}$ nella terna "mobile"

(10.1)
$$\vec{e}_3 \times \vec{j} \cdot \vec{k} = \cos\theta \quad , \quad \vec{e}_3 \times \vec{j} \cdot \vec{i} = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\theta$$
$$\vec{e}_3 \times \vec{j} = -\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{k}$$

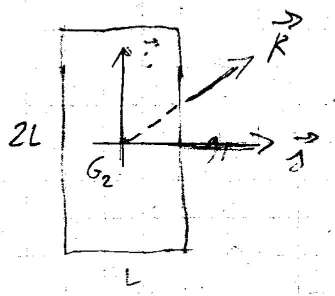
si può scrivere la velocità di G_2 nella terna "mobile"

(10.2)
$$\vec{v}_{G_2} = \frac{3}{2} L \dot\varphi \left(-\sin\theta\, \vec{i} + \cos\theta\, \vec{k}\right) + L\dot\varphi \sin\theta\, \vec{j} - L\dot\theta\, \vec{k}$$
$$= -\frac{3}{2} L \sin\theta\, \dot\varphi\, \vec{i} + L \sin\theta\, \dot\varphi\, \vec{j} + \left(\frac{3}{2} L \cos\theta\, \dot\varphi - L\dot\theta\right)\vec{k}$$

(10.3)
$$\left|\vec{v}_{G_2}\right|^2 = \left(\frac{3}{2} L \sin\theta\, \dot\varphi\right)^2 + \left(L \sin\theta\, \dot\varphi\right)^2 + \left(\frac{3}{2} L \cos\theta\, \dot\varphi - L\dot\theta\right)^2$$
$$= \frac{9}{4} L^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2 + L^2 \sin^2\theta\, \dot\varphi^2 + \frac{9}{4} L^2 \cos^2\theta\, \dot\varphi^2 + L^2 \dot\theta^2 - 3L^2 \cos\theta\, \dot\varphi\dot\theta$$
$$= L^2\left[\left(\frac{9}{4} + \sin^2\theta\right)\dot\varphi^2 + \dot\theta^2 - 3 \cos\theta\, \dot\varphi\, \dot\theta\right]$$

Calcoliamo il termine polare di $K^{(2)}$:

(10.4)
$$K^{(2)} = \frac{1}{2}\, \vec{\omega}^{(2)} \cdot I_{G_2}^{(2)}\left(\vec{\omega}^{(2)}\right) = \frac{1}{2}\, \vec{\omega}^{(2)} \cdot \vec{L}_{G_2}^{(2)}$$



$$\vec{L}_{G_2}^{(2)} = I_{G_2}^{(2)}\left(\vec{\omega}^{(2)}\right) = \left[\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right] m L^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{12} & & \\ & \frac{4}{12} & \\ & & \frac{5}{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot\varphi \cos\theta \\ \dot\theta \\ \dot\varphi \sin\theta \end{bmatrix} =$$

(10.5)

$$= \text{———} \; m L^2 \left(\frac{1}{12} \dot\varphi \cos\theta\, \vec{i} + \frac{1}{3} \dot\theta\, \vec{j} + \frac{5}{12} \dot\varphi \sin\theta\, \vec{k}\right)$$

$$\vec{\omega}^{(2)} \cdot \vec{L}_{G_2}^{(2)} = m L^2 \left[\frac{1}{12}\left(\dot\varphi \cos\theta\right)^2 + \frac{1}{3}\dot\theta^2 + \frac{5}{12}\left(\dot\varphi \sin\theta\right)^2\right] =$$
$$= m L^2 \left[\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3} \sin^2\theta\right)\dot\varphi^2 + \frac{1}{3}\dot\theta^2\right]$$

Quindi

$$K^{(2)} = \frac{1}{2} m l^2 \left[\left(\frac{9}{4} + \sin^2\theta \right) \dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2 - 3 \cos\theta\, \dot{\varphi}\dot{\theta} + \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{3}\sin^2\theta \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{3}\dot{\theta}^2 \right] =$$

(11.1)
$$= \frac{1}{2} m L^2 \left[\left(\frac{7}{3} + \frac{4}{3}\sin^2\theta \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}\dot{\theta}^2 - 3\cos\theta\, \dot{\varphi}\dot{\theta} \right]$$

Dunque,

$$K = \frac{1}{2} m L^2 \left[\left(5 + \frac{4}{3}\sin^2\theta \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}\dot{\theta}^2 - 3\cos\theta\, \dot{\varphi}\dot{\theta} \right]$$

(11.2)
$$= \frac{1}{2} [\dot{\varphi}, \dot{\theta}] \; mL^2 \begin{bmatrix} 5 + \frac{4}{3}\sin^2\theta & -\frac{3}{2}\cos\theta \\ -\frac{3}{2}\cos\theta & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = mL^2 \left(5 + \frac{4}{3}\sin^2\theta \right)\dot{\varphi} - \frac{3}{2} mL^2 \cos\theta\, \dot{\theta} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = mL^2 \left[\frac{8}{3}\sin\theta\cos\theta\, \dot{\theta}\dot{\varphi} + \left(5 + \frac{4}{3}\sin^2\theta \right) \ddot{\varphi} \right] - \frac{3}{2} mL^2 \left(-\sin\theta\, \dot{\theta}^2 + \cos\theta\, \ddot{\theta} \right)$$

EL_φ: $$mL^2 \left[\left(5 + \frac{4}{3}\sin^2\theta \right) \ddot{\varphi} - \frac{3}{2}\cos\theta\, \ddot{\theta} + \frac{4}{3}\sin 2\theta\, \dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{3}{2}\sin\theta\, \dot{\theta}^2 \right] = FL(\sin\varphi - \cos\theta)$$
(11.3)

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = mL^2 \left(\frac{4}{3}\dot{\theta} - \frac{3}{2}\cos\theta\, \dot{\varphi} \right) \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{1}{2} mL^2 \left[\left(\frac{8}{3}\sin\theta\cos\theta \right) \dot{\varphi}^2 + 3\sin\theta\, \dot{\varphi}\dot{\theta} \right]$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} \right) = mL^2 \left(\frac{4}{3}\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\left(-\sin\theta\, \dot{\theta}\dot{\varphi} + \cos\theta\, \ddot{\varphi} \right) \right)$$

EL_θ: $$mL^2 \left[\frac{4}{3}\ddot{\theta} + \cancel{\frac{3}{2}\sin\theta\, \dot{\theta}\dot{\varphi}} - \frac{3}{2}\cos\theta\, \ddot{\varphi} - \frac{2}{3}\sin 2\theta\, \dot{\varphi}^2 - \cancel{\frac{3}{2}\sin\theta\, \dot{\varphi}\dot{\theta}} \right] = L(mg - 4cb)\sin\theta + $$
$$+ 2FL$$
(11.4)

5) Linearizzazione delle EL intorno alle configurazioni di equilibrio con $\theta_e = \frac{\pi}{2}$

Poiché la sollecitazione è non conservativa, le EL linearizzate sono

(12.1) $$A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0 \qquad \vec{x} := \frac{\vec{q} - \vec{q}_e}{\varepsilon}$$

$$[A]_{jk} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_j \partial \dot{q}_k}\Big|_{\vec{q}_e}, \quad [B]_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial \dot{q}_k}\Big|_{\vec{q}_e} = 0, \quad [C]_{jk} = -\frac{\partial Q_j}{\partial q_k}\Big|_{\vec{q}_e}$$

(12.2) $$[C] = -\begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{\vec{q}_e} = -\begin{bmatrix} FL\cos\varphi_e & FL\sin\theta_e \\ 0 & L(mg-4eL)\cos\theta_e \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} FL\cos\varphi_e & FL\lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(12.3) $$[A] = mL^2 \begin{bmatrix} 5+\frac{2}{3}\sin^2\theta_e & -\frac{3}{2}\cos\theta_e \\ -\frac{3}{2}\cos\theta_e & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = mL^2 \begin{bmatrix} 5+\frac{2}{3}\lambda^2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

Le configurazioni di equilibrio con $\theta_e = \frac{\pi}{2}$ sono 2:

$$\lambda = 1 \qquad \vec{q}_e^{\,(5)} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \qquad \vec{q}_e^{\,(6)} = \left(\pi, \frac{\pi}{2}\right)$$

Allora le eq. linearizzate si scrivono

$$mL^2 \begin{bmatrix} 5+\frac{2}{3}\lambda^2 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} FL\cos\varphi_e & FL\lambda \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

(12.4) $$\vec{q}_e^{\,(5)}: \quad \begin{cases} mL^2\left(5+\frac{2}{3}\lambda^2\right)\ddot{x}_1 - FL\,x_1 - FL\lambda\,x_2 = 0 \\ \frac{4}{3}\ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

(12.5) $$\vec{q}_e^{\,(6)}: \quad \begin{cases} mL^2\left(5+\frac{2}{3}\lambda^2\right)\ddot{x}_1 + FL\,x_1 - FL\lambda\,x_2 = 0 \\ \frac{4}{3}\ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

6) Reazioni dinamiche in C

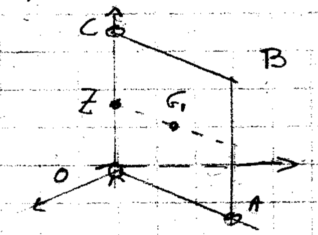
Usiamo la II ECD su tutto il modello con polo nel punto fisso O:

$$(13.1)\quad (C-O)\times\vec\phi_c + \vec M_O^{(att)} = \frac{d\vec L_O}{dt} + \cancel{\vec v_O\times\vec p} \qquad \vec\phi_c\times(C-O) = \vec M_O^{(att)} - \frac{d\vec L_O}{dt}$$

$$(13.2)\quad \vec L_O = \vec L_O^{(1)} + \vec L_O^{(2)} \qquad \vec L_O^{(1)} = \vec L_Z^{(1)} + (Z-O)\times 2m\vec v_{G_1} = \vec L_Z^{(1)} + L\vec e_3\times(2mL\dot\varphi\,\vec e_3\times\vec j) = \vec L_Z^{(1)} - 2mL^2\dot\varphi\,\vec j$$

$$\vec L_Z^{(1)} = I_Z^{(1)}(\vec\omega^{(1)}) = I_Z^{(1)}(\dot\varphi\,\vec e_3) = \dot\varphi\, I_Z^{(1)}(\vec e_3) = \dot\varphi\, I_{Z3}\,\vec e_3 \Leftarrow \vec e_3 : API(Z)$$

$$= \frac83 mL^2\dot\varphi\,\vec e_3 = \frac83 mL^2\dot\varphi(\cos\theta\,\vec i + \sin\theta\,\vec k)$$



$$(13.3)\quad \vec L_O^{(1)} = mL^2\dot\varphi\left(\frac83\cos\theta\,\vec i - 2\vec j + \frac83\sin\theta\,\vec k\right)$$

$$\vec L_O^{(2)} = (G_2-O)\times m\vec v_{G_2} + I_{G_2}^{(2)}(\vec\omega^{(2)})$$

$$(13.4)\quad \overset{(10.2),(10.5)}{=} L\left(\vec i + \frac32\vec j\right)\times m\left[-\frac32 L\sin\theta\,\dot\varphi\,\vec i + L\sin\theta\,\dot\varphi\,\vec j + \left(\frac32 L\cos\theta\,\dot\varphi - L\dot\theta\right)\vec k\right] +$$

$$+ mL^2\left(\frac1{12}\dot\varphi\cos\theta\,\vec i + \frac13\dot\theta\,\vec j + \frac5{12}\dot\varphi\sin\theta\,\vec k\right)$$

$$= mL\left[L\sin\theta\,\dot\varphi\,\vec k - \left(\frac32 L\cos\theta\,\dot\varphi - L\dot\theta\right)\vec j + \frac94 L\sin\theta\,\dot\varphi\,\vec k + \right.$$

$$\left. + \frac32\left(\frac32 L\cos\theta\,\dot\varphi - L\dot\theta\right)\vec i\right] + mL^2\left(\frac1{12}\dot\varphi\cos\theta\,\vec i + \frac13\dot\theta\,\vec j + \frac5{12}\dot\varphi\sin\theta\,\vec k\right)$$

$$= mL^2\left[\left(\frac73\cos\theta\,\dot\varphi - \frac32\dot\theta\right)\vec i + \left(\frac43\dot\theta - \frac32\cos\theta\,\dot\varphi\right)\vec j + \frac{11}{3}\dot\varphi\sin\theta\,\vec k\right]$$

Quindi

$$(13.5)\quad \vec L_O = mL^2\left[\left(5\cos\theta\,\dot\varphi - \frac32\dot\theta\right)\vec i + \left(\frac43\dot\theta - \left(\frac32\cos\theta + 2\right)\dot\varphi\right)\vec j + \frac{19}{3}\sin\theta\,\dot\varphi\,\vec k\right]$$

$$\overset{(1.2)}{=} mL^2\left[\left(5\cos\theta\,\dot\varphi - \frac32\dot\theta\right)\left(-\sin\theta\,\vec e_3\times\vec j + \cos\theta\,\vec e_3\right) + \left(\frac43\dot\theta - \left(\frac32\cos\theta + 2\right)\dot\varphi\right)\vec j\right.$$

$$\left. + \frac{19}{3}\sin\theta\,\dot\varphi\left(\cos\theta\,\vec e_3\times\vec j + \sin\theta\,\vec e_3\right)\right]$$

$$= mL^2\left[\left(\frac43\cos\theta\,\dot\varphi + \frac32\dot\theta\right)\sin\theta\,\vec e_3\times\vec j + \left[\left(5 + \frac43\sin^2\theta\right)\dot\varphi - \frac32\cos\theta\,\dot\theta\right]\vec e_3 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac43\dot\theta - \left(\frac32\cos\theta + 2\right)\dot\varphi\right)\vec j\right]$$

Tenuto conto che dalle formule di Poisson

$$(14.1)\qquad \begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\vec{e}_3\times\vec{j}\right) &= \vec{\omega}^{(1)}\times\left(\vec{e}_3\times\vec{j}\right) = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3\times\left(\vec{e}_3\times\vec{j}\right) = -\dot{\varphi}\,\vec{j} \\ \frac{d}{dt}\vec{j} &= \vec{\omega}^{(1)}\times\vec{j} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_3\times\vec{j} \end{aligned}$$

segue che

$$(14.2)\qquad \begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O}{dt} = mL^2\Big[&\frac{2}{3}\left(2\cos 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \sin 2\theta\,\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}^2 + \frac{3}{2}\sin\theta\,\ddot{\theta}\right)\vec{e}_3\times\vec{j} + \\ &+\left(\frac{4}{3}\cos\theta\,\dot{\varphi} - \cancel{\frac{3}{2}\dot{\theta}}\right)\sin\theta\left(-\dot{\varphi}\,\vec{j}\right) + \\ &+\left(\frac{4}{3}\sin 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \left(5+\frac{4}{3}\sin^2\theta\right)\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta}\right)\right)\vec{e}_3 + \\ &+\left(\frac{4}{3}\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\left(-\cancel{\sin\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi}} + \cos\theta\,\ddot{\varphi}\right) - 2\ddot{\varphi}\right)\vec{j} + \left(\frac{4}{3}\dot{\theta} - \left(\frac{3}{2}\cos\theta + 2\right)\dot{\varphi}\right)\dot{\varphi}\,\vec{e}_3\times\vec{j}\Big] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} = mL^2\Big[&\frac{4}{3}\left(1+\cos 2\theta\right)\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{2}{3}\sin 2\theta\,\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}^2 - \left(\frac{3}{2}\cos\theta + 2\right)\dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2}\sin\theta\,\ddot{\theta}\Big]\vec{e}_3\times\vec{j} \\ &+\left(-\frac{2}{3}\sin 2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}\ddot{\theta} - \frac{3}{2}\cos\theta\,\ddot{\varphi}\right)\vec{j} + \\ &+\left[\frac{4}{3}\sin 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \left(5+\frac{4}{3}\sin^2\theta\right)\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta}\right)\right]\vec{e}_3 \end{aligned}$$

Dunque, tenendo conto delle (6.2), la (13.1) si scrive

$$(14.3)\qquad \begin{array}{rl} \vec{e}_3: & FL\left(\sin\varphi - \cos\theta\right) - mL^2\left[\frac{4}{3}\sin 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \left(5+\frac{4}{3}\sin^2\theta\right)\ddot{\varphi} - \frac{3}{2}\left(-\sin\theta\,\dot{\theta}^2 + \cos\theta\,\ddot{\theta}\right)\right] \\ \vec{e}_3\times\vec{j}: & -2L\,\phi_1' = L\left(\frac{7}{2}mg + F\sin\theta\right) - mL^2\left[\frac{4}{3}\left(1+\cos 2\theta\right)\dot{\theta}\dot{\varphi} + \frac{2}{3}\sin 2\theta\,\ddot{\varphi} + \frac{3}{2}\cos\theta\left(\dot{\theta}^2 - \dot{\varphi}^2\right) + \frac{3}{2}\sin\theta\,\ddot{\theta} - 2\dot{\varphi}^2\right] \\ \vec{j}: & 2L\,\phi_2' = L\left(2F + \frac{mg}{2}\sin\theta\right) - mL^2\left(-\frac{2}{3}\sin 2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \frac{4}{3}\ddot{\theta} - \left(\frac{3}{2}\cos\theta + 2\right)\ddot{\varphi}\right) \end{array}$$

N.B. La $(14.3)_1$ è un'equazione pura di moto e coincide con la EL_φ (11.3). Le altre due (14.3) danno le componenti (ϕ_1', ϕ_2') della reazione dinamica in C.