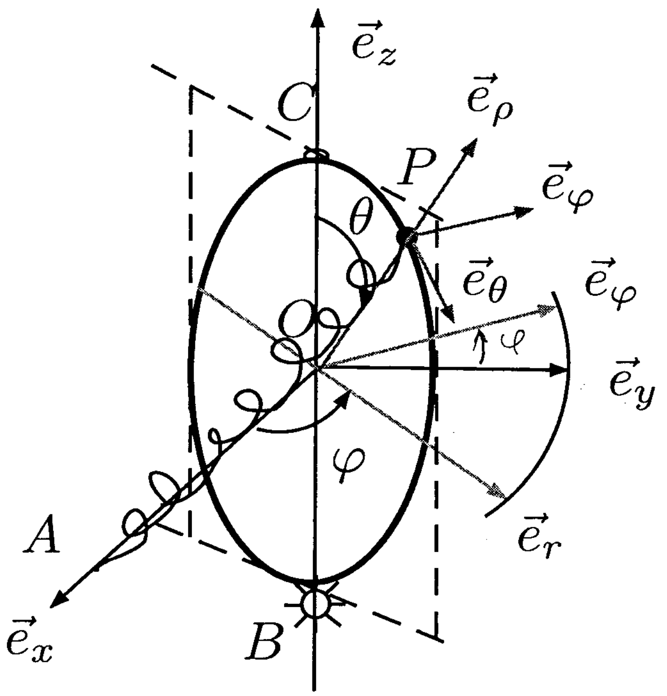
Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

Trieste, 15 settembre 2014
(G. Tondo)



Un anello omogeneo, di massa $3m$ e raggio R, è vincolato ad un asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ mediante un anellino in C e una cerniera sferica fissa in B, entrambi lisci. Sull'anello, è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P, di massa m. Una molla, di costante elastica c, collega il punto P ad un punto fisso A dell'asse $(O, \vec{e}_x)$, con $\overline{OA} = 2R$. Scelte come coordinate libere gli angoli φ e θ di figura, si chiede di:

STATICA.

1) individuare le configurazioni di equilibrio del modello e discuterne la stabilità;

2) determinare le reazioni vincolari esterne sull'anello nel punto C, all'equilibrio;

3) determinare le reazioni vincolari dell'anello sul punto materiale P, all'equilibrio.

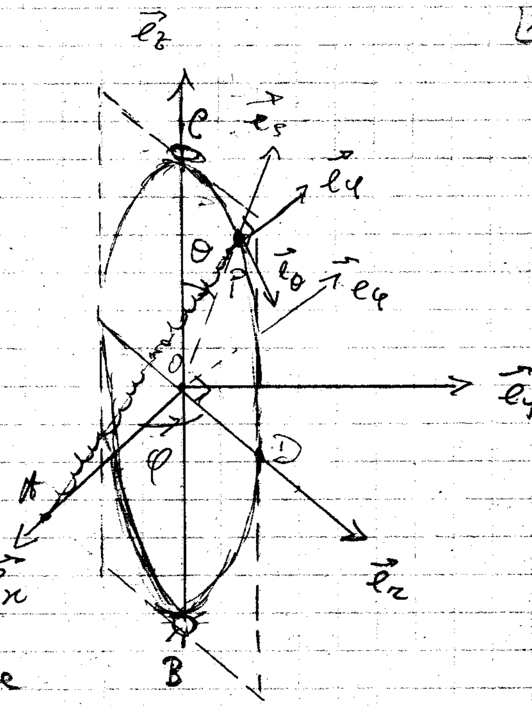
DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio stabile;

6) calcolare le reazioni vincolari esterne sull'anello nel punto C, durante il moto.

Tema del 15/09/2014



Il modello, formato da 1 rigido, l'anello, e un punto materiale P di massa m, ha 2 g.l., come si può desumere dal metodo dei congelamenti successivi. Come coordinate libere, si possono prendere 2 angoli:

l'angolo φ formato dall'asse $(O, \vec{e}_x)$ e l'asse $(O, \vec{e}_r)$ passante per il punto D dell'anello,

l'angolo θ formato tra l'asse $(O, \vec{e}_z)$ e l'asse $(O, \vec{e}_\rho)$.

Entrambi gli angoli variano nell'intervallo

$$]-\pi, \pi] \quad ,$$

quindi lo spazio delle configurazioni è dato da

$$\mathcal{C}_V = S^1 \times S^1 = T^2$$

(1.1) $P-O = R\,\vec{e}_\rho \quad , \quad A-O = 2R\,\vec{e}_x \, , \quad B-O = -R\,\vec{e}_z \, , \quad C-O = R\,\vec{e}_z$

(1.2) $P-A = (P-O)+(O-A) = R\,\vec{e}_\rho - 2R\,\vec{e}_x$

(1.3)
$$|P-A|^2 = R(\vec{e}_\rho - 2\vec{e}_x)\cdot R(\vec{e}_\rho - 2\vec{e}_x) = R^2(\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_\rho - 4\,\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_x + 4\,\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x)$$
$$= R^2(5 - 4\,\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_x)$$

Consideriamo la terne di assi seguenti

$(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$

(1.4) $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$:
$$\vec{e}_r = \cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y, \quad \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\,\vec{e}_x + \cos\varphi\,\vec{e}_y$$
$$\vec{e}_x = \cos\varphi\,\vec{e}_r - \sin\varphi\,\vec{e}_\varphi, \quad \vec{e}_y = \sin\varphi\,\vec{e}_r + \cos\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

(1.5) $(O, \vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$:
$$\vec{e}_\rho = \cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta\,\vec{e}_r = \cos\theta\,\vec{e}_z + \sin\theta(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)$$
$$\vec{e}_\theta = -\sin\theta\,\vec{e}_z + \cos\theta\,\vec{e}_r = -\sin\theta\,\vec{e}_z + \cos\theta(\cos\varphi\,\vec{e}_x + \sin\varphi\,\vec{e}_y)$$

Statica

La sollecitazione è conservativa e la sua energia potenziale è data da

$$V(\varphi,\theta) = \frac{1}{2} c \overline{AP}^2 - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P \cancel{-3m\vec{g}\cdot\vec{x}_0}$$

(2.1) $$\overset{(1.3)\,e\,(1.5)}{=} \frac{1}{2} c R^2 \left(\cancel{5} - 4\cos\varphi\sin\theta\right) + mg\vec{e}_3\cdot R\vec{e}_\rho$$

$$\overset{(1.5)}{=} -2cR^2\cos\varphi\sin\theta + mgR\cos\theta$$

(2.2) $$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = 2cR^2\sin\varphi\sin\theta = -Q_\varphi$$

(2.3) $$\frac{\partial V}{\partial\theta} = -2cR^2\cos\varphi\cos\theta - mgR\sin\theta = -Q_\theta$$

Dunque, le eq. pure di equilibrio sono

(2.4) $$\begin{cases} \sin\varphi\sin\theta = 0 \\ 2cR\cos\varphi\cos\theta + mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Il sistema (2.4) è equivalente a

(2.5) $$\begin{cases} \sin\theta = 0 \\ 2cR\cos\varphi\cos\theta = 0 \end{cases} \quad \text{vel} \quad \begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ 2cR\cos\varphi\cos\theta + mg\sin\theta = 0 \end{cases}$$

Le soluzioni del sistema $(2.5)_1$ sono

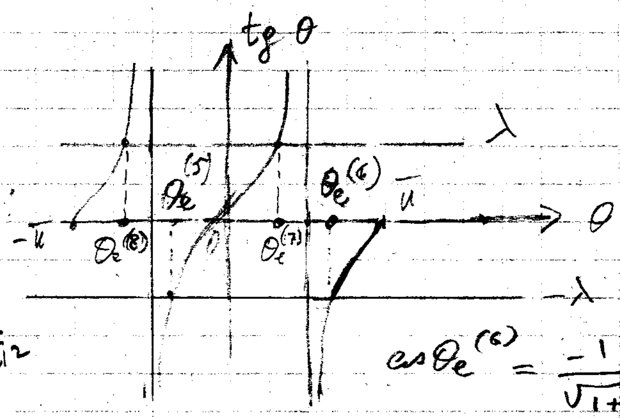
$$\begin{cases} \sin\theta = 0 \\ \cos\varphi = 0 \end{cases} \iff \vec{q}_e = (\varphi_e,\theta_e): \quad \vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \ \vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

$$\vec{q}_e^{\,(3)} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right), \ \vec{q}_e^{\,(4)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$$

le soluzioni del sistema $(2.5)_2$ sono

$$\begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = -\dfrac{2cR}{mg}\cos\varphi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi = 0 \\ tg\,\theta = -\dfrac{2cR}{mg} \end{cases} \text{ vel } \begin{cases} \varphi = \pi \\ tg\,\theta = \dfrac{2cR}{mg} = \lambda \end{cases}$$

Quindi



$$\vec{q}_e^{\,(5)} = \left(0,\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{2cR}{mg}\right)\right),\ \sin\theta_e^{(5)} = -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\vec{q}_e^{\,(6)} = \left(0,\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{2cR}{mg}\right)+\pi\right),\ \sin\theta_e^{(6)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad \cos\theta_e^{(6)} = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\vec{q}_e^{\,(7)} = \left(\pi,\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2cR}{mg}\right)\right),\ \sin\theta_e^{(7)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},\ \cos\theta_e^{(7)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\vec{q}_e^{\,(8)} = \left(\pi,\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2cR}{mg}\right)-\pi\right),\ \sin\theta_e^{(8)} = -\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},\ \cos\theta_e^{(8)} = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

<u>Stabilità degli equilibri.</u> Determiniamo la matrice Hessiana della funzione (2.1)

$$\frac{\partial^2 V}{\partial^2\varphi} = 2cR^2\cos\varphi\sin\theta, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\,\partial\varphi} = 2cR^2\sin\varphi\cos\theta$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\,\partial\theta} = +2cR^2\sin\varphi\cos\theta, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = 2cR^2\cos\varphi\sin\theta - mgR\cos\theta$$

Dunque

$$\mathcal{H}_V = 2cR^2\begin{bmatrix} \cos\varphi\sin\theta & \sin\varphi\cos\theta \\ \sin\varphi\cos\theta & \cos\varphi\sin\theta - \dfrac{1}{\lambda}\cos\theta \end{bmatrix}$$

Valutiamo la matrice Hessiana nelle configurazioni di equilibrio.

a) Nelle configurazione $\vec{q}_e^{(1)}, \vec{q}_e^{(2)}, \vec{q}_e^{(3)}, \vec{q}_e^{(4)}$, si ha

$$\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \mp\frac{1}{\lambda} \end{bmatrix} \Rightarrow \det \mathcal{H}_{V|\vec{q}_e} = -1 < 0 \Rightarrow \text{instabilità}$$

b)

$$\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(5)}} = 2cR^2 \left[\begin{array}{c|c} \sin\theta_e^{(5)} & 0 \\ \hline 0 & \sin\theta_e^{(5)} - \frac{1}{\lambda}\cos\theta_e^{(5)} \end{array}\right] \quad (4.1)$$

Poichè $\sin\theta_e^{(5)} < 0$ $\det \mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(5)}} \neq 0$ $\vec{q}_e^{(5)}$ è instabile

$$\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(6)}} = 2cR^2 \left[\begin{array}{c|c} \sin\theta_e^{(6)} & 0 \\ \hline 0 & \sin\theta_e^{(6)} - \frac{1}{\lambda}\cos\theta_e^{(6)} \end{array}\right] \quad (4.2)$$

Poichè $\sin\theta_e^{(6)} > 0$ e $\cos\theta_e^{(6)} < 0$ segue che $\left(\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(6)}}\right)_1^1 > 0$ e $\det\left(\mathcal{H}_{|\vec{q}_e^{(6)}}\right) > 0$ $\Rightarrow \vec{q}_e^{(6)}$ è stabile.

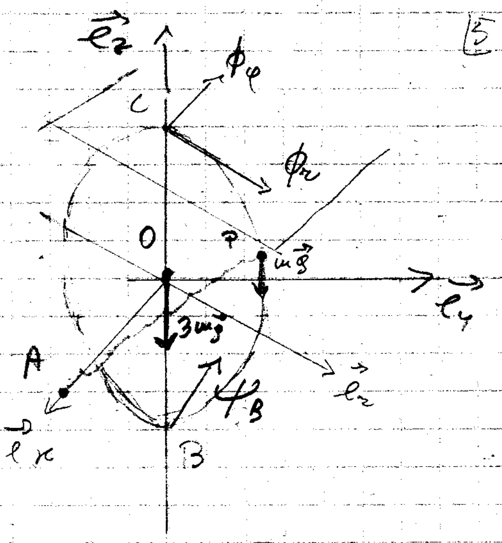
$$\mathcal{H}_{V|q_e^{(7)}} = 2cR^2 \left[\begin{array}{c|c} -\sin\theta_e^{(7)} & 0 \\ \hline 0 & -\sin\theta_e^{(7)} - \frac{1}{\lambda}\cos\theta_e^{(7)} \end{array}\right] \quad (4.3)$$

Poichè $\sin\theta_e^{(7)} > 0$ si ha $\left(\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(7)}}\right)_1^1 < 0$, $\det \mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(7)}} \neq 0 \Rightarrow$ $\vec{q}_e^{(7)}$ è instabile

$$\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(8)}} = 2cR^2 \left[\begin{array}{c|c} -\sin\theta_e^{(8)} & 0 \\ \hline 0 & -\sin\theta_e^{(8)} - \frac{1}{\lambda}\cos\theta_e^{(8)} \end{array}\right] \quad (4.4)$$

Poichè $\sin\theta_e^{(8)} < 0$ e $\cos\theta_e^{(8)} < 0$ si ha $\left(\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(8)}}\right)_1^1 > 0$ e $\det\left(\mathcal{H}_{V|\vec{q}_e^{(8)}}\right) > 0 \Rightarrow$ $\vec{q}_e^{(8)}$ è stabile.

2) Reazione esterna in C all'equilibrio



Poiché il contatto tra l'asse fisso e l'anellino in C è liscio, le reazioni su C sono date da una forza $\vec\phi$ ortogonale all'asse

(5.1) $$\vec\phi_C \cdot \vec e_z = 0$$

Conviene scomporre tale reazione nella terna solidale all'anello $(O, \vec e_r, \vec e_\varphi, \vec e_z)$.

Dunque,

(5.2) $$\vec\phi_C = \phi_r \vec e_r + \phi_\varphi \vec e_\varphi$$

Utilizziamo la II ECS con polo in B, per eliminare la reazione incognita $\vec\Psi_B$ della cerniera in B

(5.3) $$\vec M_B^{est} = \vec 0$$

(5.4) $$\vec M_B^{est} = (C-B)\times \vec\phi_C + \cancel{(O-B)\times 3m\vec g} + \vec M_B^{est\to P}$$

Quindi

(5.5) $$\vec\phi_C \times (C-B) = (P-B)\times(m\vec g + \vec F_P)$$

(5.6) $$C-B = 2R\vec e_z, \quad P-B = (P-O)+(O-B) = R\vec e_\xi + R\vec e_z$$
$$\vec g = -g\vec e_z, \quad \vec F_P = -c(P-A) = -c\big((P-O)+(O-A)\big) = -c(R\vec e_\xi - 2R\vec e_x)$$

Dunque

(5.7) $$(\phi_r \vec e_r + \phi_\varphi \vec e_\varphi)\times 2R\vec e_z = R(\vec e_\xi + \vec e_z)\times\big(-mg\vec e_z - cR(\vec e_\xi - 2\vec e_x)\big)$$
$$2R(\phi_r \vec e_r\times\vec e_z + \phi_\varphi \vec e_\varphi\times\vec e_z) = -mgR(\vec e_\xi + \cancel{\vec e_z})\times\vec e_z - cR^2(\vec e_\xi+\vec e_z)\times(\vec e_\xi - 2\vec e_x)$$

Tenuto conto di

(6.1) $$\vec{e}_r \times \vec{e}_z = -\vec{e}_\varphi\,,\quad \vec{e}_\varphi \times \vec{e}_z = \vec{e}_r\,,\quad \vec{e}_\zeta \times \vec{e}_r = -\sin\theta\, \vec{e}_\varphi$$

$$\vec{e}_\zeta \times \vec{e}_x = \left(\cos\theta\, \vec{e}_z + \sin\theta\, \vec{e}_r\right) \times \vec{e}_x = \cos\theta\, \vec{e}_y + \sin\theta\left(-\sin\varphi\, \vec{e}_z\right)$$

il momento delle forze esterne nel punto P risulta

(6.2)
$$\vec{M}_B^{\,est\to P} = m g R \sin\theta\, \vec{e}_\varphi +$$

$$-cR^2\left[-2\left(\cos\theta\, \vec{e}_y - \sin\theta \sin\varphi\, \vec{e}_z\right) + \sin\theta\, \vec{e}_\varphi - 2\vec{e}_y\right]$$

$$= m g R \sin\theta\, \vec{e}_\varphi - 2cR^2\left[-(1+\cos\theta)\, \vec{e}_y + \sin\theta\sin\varphi\, \vec{e}_z + \frac{1}{2}\sin\theta\, \vec{e}_\varphi\right]$$

$$= m g R \sin\theta\, \vec{e}_\varphi - 2cR^2\left[-(1+\cos\theta)\left(\sin\varphi\, \vec{e}_r + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi\right) + \sin\theta\sin\varphi\, \vec{e}_z + \frac{1}{2}\sin\theta\, \vec{e}_\varphi\right]$$

$$= m g R \sin\theta\, \vec{e}_\varphi - 2cR^2\left[-(1+\cos\theta)\sin\varphi\, \vec{e}_r + \left(\frac{1}{2}\sin\theta - (1+\cos\theta)\cos\varphi\right)\vec{e}_\varphi + \sin\theta\sin\varphi\, \vec{e}_z\right]$$

$$= \left[\left(mgR - cR^2\right)\sin\theta + \left(2cR^2(1+\cos\theta)\cos\varphi\right)\right]\vec{e}_\varphi + 2cR^2(1+\cos\theta)\sin\varphi\, \vec{e}_r +$$

$$-2cR^2\sin\theta\sin\varphi\, \vec{e}_z$$

Quindi, le 3 componenti della I ECS risultano

$$\vec{M}_B^{est}\cdot\vec{e}_r \Rightarrow \cancel{2}R\,\Phi_\varphi = \cancel{2}cR^{\cancel{2}}\left(1+\cos\theta_e\right)\sin\varphi_e$$

$$\vec{M}_B^{est}\cdot\vec{e}_\varphi \Rightarrow -\cancel{2}R\,\Phi_r = \frac{\cancel{R}}{2}\left(mg - cR\right)\sin\theta_e + \cancel{2}cR^{\cancel{2}}\left(1+\cos\theta_e\right)\cos\varphi_e \qquad (6.3)$$

$$\vec{M}_B^{est}\cdot\vec{e}_z \Rightarrow \quad 0 = -2cR^2\sin\theta_e\sin\varphi_e$$

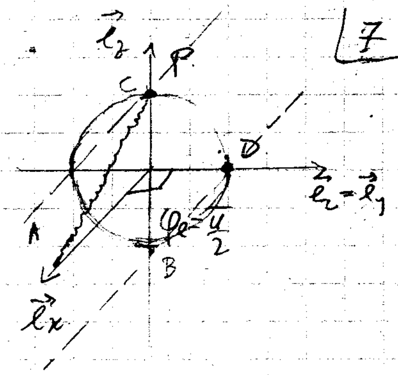
e la reazione vincolare in C

(6.4) $$\vec{\Phi}_C = \left[\frac{1}{2}\left(cR - mg\right)\sin\theta_e - cR\left(1+\cos\theta_e\right)\cos\varphi_e\right]\vec{e}_r + cR\left(1+\cos\theta_e\right)\sin\varphi_e\, \vec{e}_\varphi$$

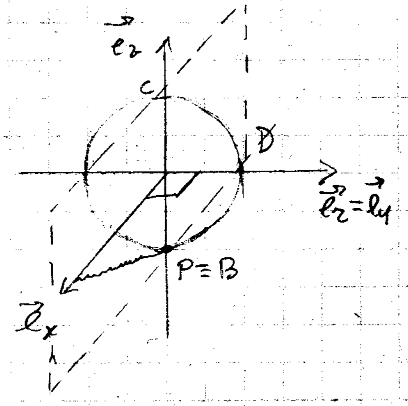
Valutando la $\vec{\Phi}_C$ nelle configurazioni di equilibrio, si trova

Ricapitolando: $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$

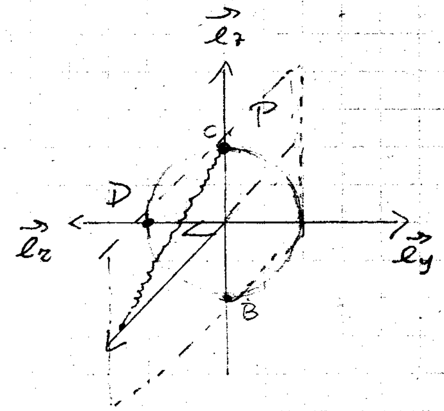
$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\vec{\Phi}_c = 2cR\,\vec{e}_\varphi = -2cR\,\vec{e}_x$



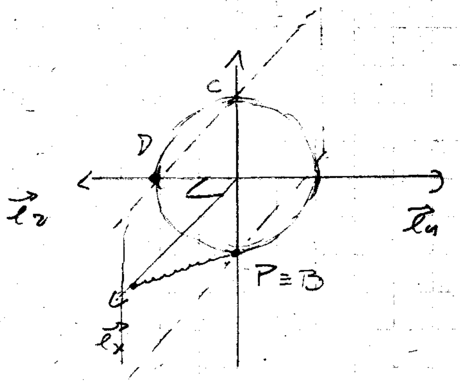
$\vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; $\vec{\Phi}_c = \vec{0}$



$\vec{q}_e^{\,(3)} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$; $\vec{\Phi}_c = -2cR\,\vec{e}_\varphi = -2cR\,\vec{e}_x$

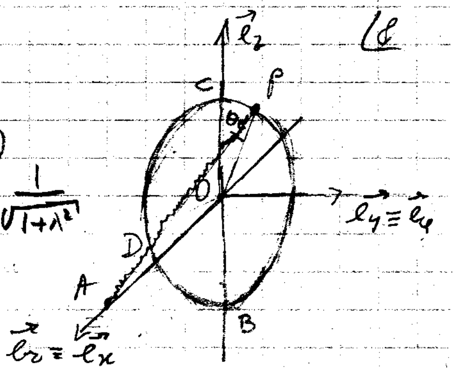


$\vec{q}_e^{\,(4)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right)$; $\vec{\Phi}_c = \vec{0}$



$$\vec{q}_e^{\,(5)} = \left(0,\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{2cR}{mg}\right)\right),\quad \sin\theta_e^{(5)} = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},\ \cos\theta_e^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

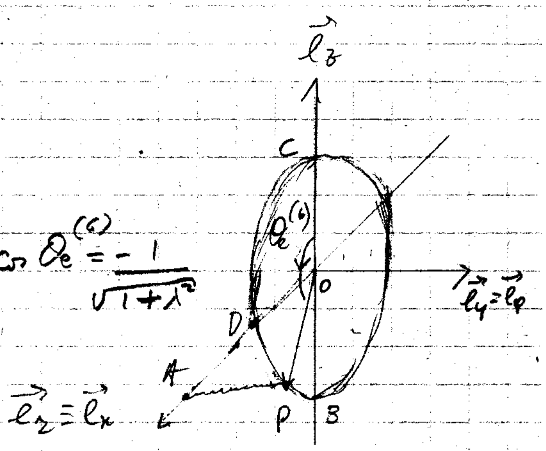
$$\vec{\phi}_c = \left[-\frac{1}{2}\left(cR-mg\right)\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} - cR\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_z$$



Instabile

$$\vec{q}_e^{\,(6)} = \left(0,\ \operatorname{arctg}\left(\frac{-2cR}{mg}\right)+\pi\right),\quad \sin\theta_e^{(6)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},\ \cos\theta_e^{(6)} = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

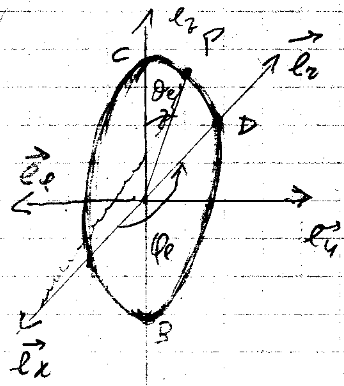
$$\vec{\phi}_c = \left[\frac{1}{2}\left(cR-mg\right)\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} - cR\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_z$$



Stabile

$$\vec{q}_e^{\,(7)} = \left(\pi,\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2cR}{mg}\right)\right),\quad \sin\theta_e^{(7)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}},\ \cos\theta_e^{(7)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\vec{\phi}_c = \left[\frac{1}{2}\left(cR-mg\right)\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} - cR\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_z$$

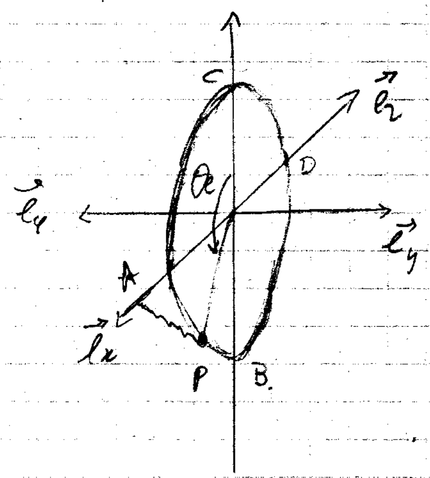


Instabile

$$\vec{q}_e^{\,(8)} = \left(\pi,\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2cR}{mg}\right)-\pi\right),\quad \sin\theta_e^{(8)} = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\cos\theta_e^{(8)} = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\vec{\phi}_c = \left[-\frac{1}{2}\left(cR-mg\right)\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} - cR\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_z$$



Stabile

N.B. La III eq. delle (6.3) è un'equazione pura di equilibrio e coincide con la I delle (2.4) e implica: $Q_\varphi = \vec{M}_B^{\,ext} \cdot \vec{e}_z$

3) Reazioni dell'anello nel punto P, all'equilibrio.

Scriviamo l'eq. della statica del punto P, tenendo conto che, in P, agiscono oltre alle forze attive della molla e del peso, anche le reazioni dell'anello che indicheremo con

$$(9.1) \qquad \vec{\Phi}_P$$

Poiché il contatto tra anello e punto P è liscio, si può dimostrare che la reazione dell'anello in P non ha componenti tangenti al vincolo, cioè

$$(9.2) \qquad \vec{\Phi}_P \cdot \vec{e}_\theta = 0$$

Dunque, possiamo rappresentare la reazione come

$$(9.3) \qquad \vec{\Phi}_P = \Phi_\rho \vec{e}_\rho + \Phi_\varphi \vec{e}_\varphi$$

L'equazione della statica del punto P è

$$(9.4) \qquad \vec{\Phi}_P + \vec{R}^{\,att \to P} = 0 \quad , \quad \vec{R}^{\,att \to P} = m\vec{g} + \vec{F}_P$$

Tenendo conto che

$$\vec{e}_r'' = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_\theta \quad , \quad \vec{e}_z = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_\theta$$

(9.5)

$$\vec{e}_x \overset{(1.4)}{=} \cos\varphi\, \vec{e}_r - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi = \cos\varphi\left(\sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_\theta\right) - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

si ha

$$\vec{g} = -g\,\vec{e}_z \overset{(9.5)}{=} -g\left(\cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_\theta\right)$$

$$\vec{F}_P \overset{(5.6)}{=} -c\left(R\,\vec{e}_\rho - 2R\,\vec{e}_x\right) = -cR\left(\vec{e}_\rho - 2\cos\varphi\left(\sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_\theta\right) + 2\sin\varphi\, \vec{e}_\varphi\right) =$$

$$= -cR\left[\left(1 - 2\cos\varphi\sin\theta\right)\vec{e}_\rho - 2\cos\varphi\cos\theta\, \vec{e}_\theta + 2\sin\varphi\, \vec{e}_\varphi\right]$$

Quindi l'eq. della Statica (8.4) si scrive:

$$(10.1)\quad \begin{cases} \vec{e}_\xi: & \Psi_\rho - mg\cos\theta_e - cR(1-2\cos\varphi_e\sin\theta_e) = 0 \\ \vec{e}_\theta: & mg\sin\theta + 2cR\cos\theta_e\cos\varphi_e = 0 \\ \vec{e}_\varphi: & \Psi_\varphi - 2cR\sin\varphi_e = 0 \end{cases}$$

Dalla I e dalla III delle suddette eq. si ottiene

$$(10.2)\quad \begin{aligned} \Psi_\rho &= mg\cos\theta_e + cR(1-2\cdot\cos\varphi_e\sin\theta_e) \\ \Psi_\varphi &= 2cR\sin\varphi_e \end{aligned}$$

Valutando le (10.3) sulle configurazioni di equilibrio si ottengono i risultati delle 2 pagine successive.

$$(10.3)\quad \vec{\Psi}_P = \left[mg\cos\theta_e + cR(1-2\cos\varphi_e\sin\theta_e)\right]\vec{e}_\xi + 2cR\sin\varphi_e\,\vec{e}_\varphi$$

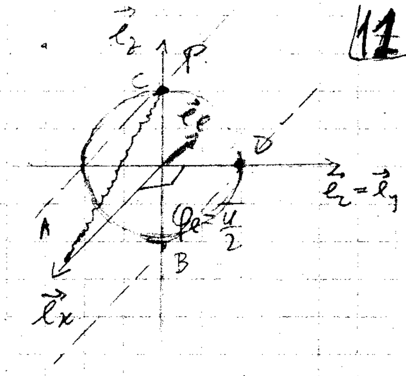
N.B. La II eq. della (10.1) è un'equazione pura di equilibrio che equivale alla (2.3) e che chiarisce il significato di Q_θ:

$$Q_\theta = R\left(\vec{R}^{att\to P}\cdot\vec{e}_\theta\right)$$

Ricapitolando: $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$

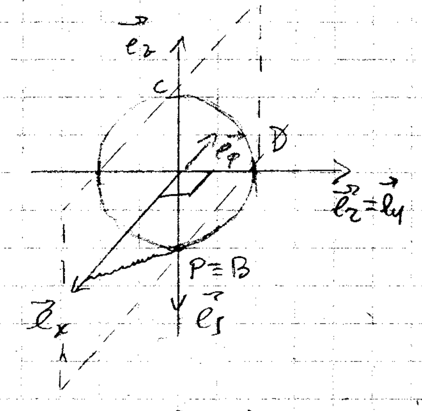
$$\vec{q}_e^{\,(1)} = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad ; \quad \vec{\phi}_C = 2cR\,\vec{e}_\varphi = -2cR\,\vec{e}_x$$

$$\vec{\psi}_P = (mg + cR)\,\vec{e}_\rho + 2cR\,\vec{e}_\varphi \overset{!}{=} (mg+cR)\,\vec{e}_z - 2cR\,\vec{e}_x$$



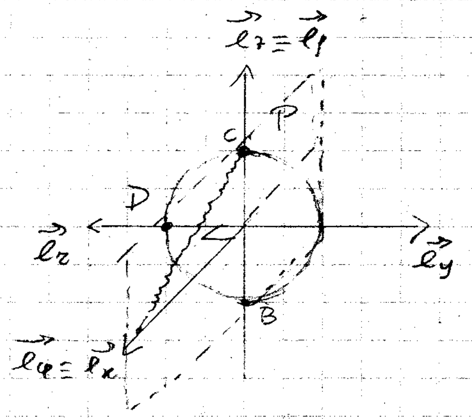
$$\vec{q}_e^{\,(2)} = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad ; \quad \vec{\phi}_C = \vec{0}$$

$$\vec{\psi}_P = (-mg + cR)\,\vec{e}_\rho + 2cR\,\vec{e}_\varphi \overset{!}{=} (mg-cR)\,\vec{e}_z - 2cR\,\vec{e}_x$$



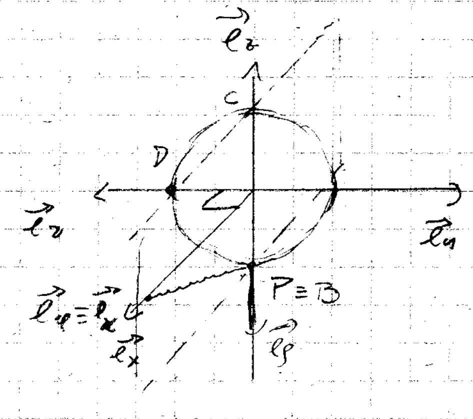
$$\vec{q}_e^{\,(3)} = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) \quad ; \quad \vec{\phi}_C = -2cR\,\vec{e}_\varphi = -2cR\,\vec{e}_x$$

$$\vec{\psi}_P = (mg + cR)\,\vec{e}_\rho - 2cR\,\vec{e}_\varphi \overset{!}{=} (mg+cR)\,\vec{e}_z - 2cR\,\vec{e}_x$$

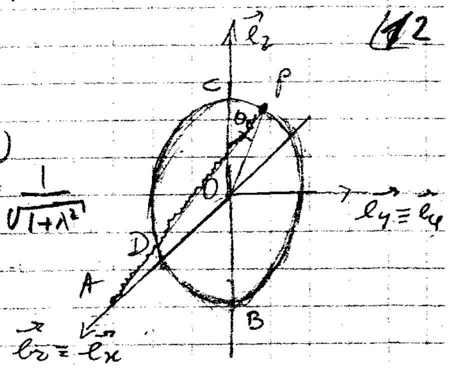


$$\vec{q}_e^{\,(4)} = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right) \quad ; \quad \vec{\phi}_C = \vec{0}$$

$$\vec{\psi}_P = (-mg + cR)\,\vec{e}_\rho - 2cR\,\vec{e}_\varphi = (mg-cR)\,\vec{e}_z - 2cR\,\vec{e}_x$$



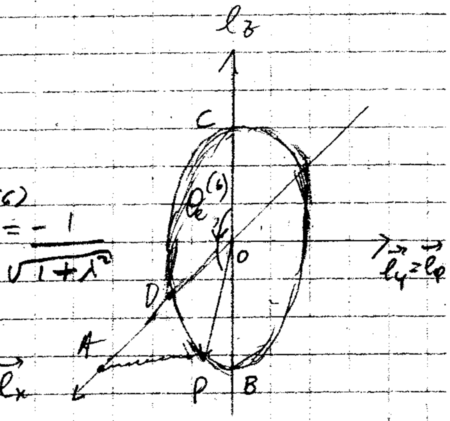
$$\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$$



$$\vec{q}_e^{\,(5)} = \left(0,\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{2cR}{mg}\right)\right), \quad \sin\theta_e^{(5)} = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad \cos\theta_e^{(5)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\vec{\Phi}_c = \left[-\frac{1}{2}(cR - mg)\frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} - cR\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_z$$

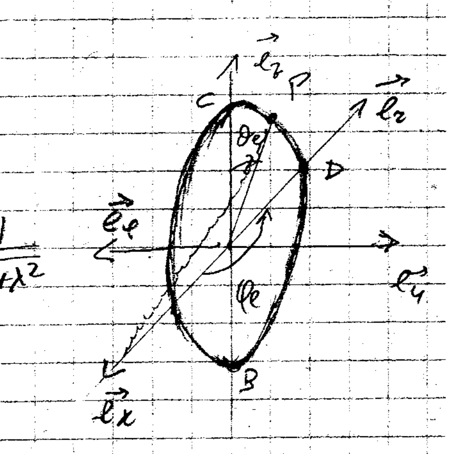
$$\vec{\Psi}_r = \left[mg\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}} + cR\left(1+\frac{2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_\rho$$



$$\vec{q}_e^{\,(6)} = \left(0,\ \operatorname{arctg}\left(-\frac{2cR}{mg}\right) + \pi\right), \quad \sin\theta_e^{(6)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad \cos\theta_e^{(6)} = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\vec{\Phi}_c = \left[\frac{1}{2}(cR - mg)\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} - cR\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_z$$

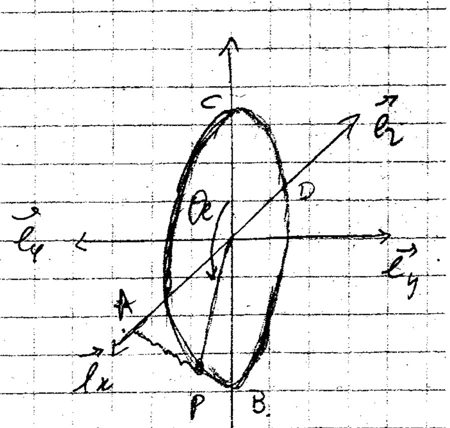
$$\vec{\Psi}_\rho = \left[\frac{-mg}{\sqrt{1+\lambda^2}} + cR\left(1-\frac{2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_\rho$$



$$\vec{q}_e^{\,(7)} = \left(\pi,\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2cR}{mg}\right)\right), \quad \sin\theta_e^{(7)} = \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}, \quad \cos\theta_e^{(7)} = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\vec{\Phi}_c = \left[\frac{1}{2}(cR - mg)\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} - cR\left(1+\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_z$$

$$\vec{\Psi}_\rho = \left[\frac{mg}{\sqrt{1+\lambda^2}} + cR\left(1+\frac{2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_\rho$$



$$\vec{q}_e^{\,(8)} = \left(\pi,\ \operatorname{arctg}\left(\frac{2cR}{mg}\right) - \pi\right), \quad \sin\theta_e^{(8)} = \frac{-\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\cos\theta_e^{(8)} = \frac{-1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

$$\vec{\Phi}_c = \left[-\frac{1}{2}(cR - mg)\frac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}} - cR\left(1-\frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_z$$

$$\vec{\Psi}_\rho = \left[\frac{-mg}{\sqrt{1+\lambda^2}} + cR\left(1-\frac{2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}\right)\right]\vec{e}_\rho$$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange del modello.
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica come somma dell'energia cinetica dell'anello rigido $K^{(1)}$ più l'energia cinetica del punto materiale P, $K^{(2)}$

$$(13.1) \qquad K = K^{(1)} + K^{(2)}$$

L'energia cinetica dell'anello è quella di un rotore che ha velocità angolare $\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$

$$(13.2) \qquad K^{(1)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot I_o(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\vec{e}_z\cdot I_o(\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 I_{oz} = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\left(\frac{3}{2}mR^2\right) = \frac{3}{4}mR^2\dot{\varphi}^2$$

$$(13.3) \qquad K^{(2)} = \frac{1}{2}\,m\,|\vec{v}_P|^2$$

Per calcolare la velocità di P, osserviamo che $\vec{v}_P$ si può scomporre come somma della velocità rispetto all'anello (velocità relativa) più la velocità di P pensato solidale all'anello (velocità di trascinamento).

$$(13.4) \qquad \vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)}$$

Il moto di P relativo all'anello è un moto circolare di raggio R intorno all'asse $\vec{e}_\varphi$ $\quad \vec{v}_P^{(rel)} = R\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta$

Il moto di trascinamento, è anch'esso un moto circolare intorno all'asse $\vec{e}_z$, di raggio pari a $R\sin\theta$, quindi

$$(13.5) \qquad \vec{v}_P^{(tr)} = R\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

Dunque

$$(13.6) \qquad \vec{v}_P = R\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

Allora

(14.1) $$|\vec{v}_P|^2 = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

(14.2) $$K^{(2)} = \frac{1}{2}\, m R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

(14.3) $$K = \frac{1}{2}\, m R^2\left[\left(\frac{3}{2} + \sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right] = \frac{1}{2}\, m R^2\left[\dot{\varphi}, \dot{\theta}\right]\begin{bmatrix}\frac{3}{2}+\sin^2\theta & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

(14.4) $$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m R^2\left(\frac{3}{2} + \sin^2\theta\right)\dot{\varphi}\,, \qquad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = m R^2\left(2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \left(\frac{3}{2} + \sin^2\theta\right)\ddot{\varphi}\right)$$

(14.5) EL_φ: $$m R^2\left(\sin 2\theta\,\dot{\theta}\dot{\varphi} + \left(\frac{3}{2} + \sin^2\theta\right)\ddot{\varphi}\right) = -2cR^2\sin\theta\sin\varphi$$

(14.6) $$\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}} = m R^2\dot{\theta} \qquad \frac{\partial K}{\partial \theta} = m R^2\sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\theta}}\right) = m R^2\ddot{\theta}$$

(14.7) EL_θ: $$m R^2\left(\ddot{\theta} - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot{\varphi}^2\right) = 2cR^2\cos\varphi\cos\theta + mg\cancel{R}\sin\theta$$

5) Le configurazioni di eq. stabile sono $\vec{q}^{(6)}$ e $\vec{q}^{(8)}$.
La sollecitazione attiva è conservativa, quindi le eq. linearizzate sono date da

$$A\ddot{\vec{x}} + \mathcal{V}\vec{x} = \vec{0}$$

dove

$$A_{ij} = \left.\frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right|_{\vec{q}_e}, \quad \mathcal{V} = \left.\frac{\partial^2 V}{\partial q_i \partial q_j}\right|_{\vec{q}_e} = \mathcal{H}_V\Big|_{\vec{q}_e}$$

$$A = mR^2\begin{bmatrix} \frac{3}{2}+\sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A\Big|_{\vec{q}_e^{(6)}} = mR^2\begin{bmatrix} \frac{3}{2}+\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A\Big|_{\vec{q}_e^{(8)}}$$

$$\mathcal{H}_V\Big|_{\vec{q}_e^{(6)}} \overset{(4.2)}{=} 2cR^2\begin{bmatrix} \sin\theta_e^{(6)} & 0 \\ 0 & \sin\theta_e^{(6)} - \frac{1}{\lambda}\cos\theta_e^{(6)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} + \frac{1}{\lambda\sqrt{1+\lambda^2}} \end{bmatrix} 2cR^2$$

$$\mathcal{H}_V\Big|_{\vec{q}_e^{(8)}} \overset{(4.4)}{=} 2cR^2\begin{bmatrix} -\sin\theta_e^{(8)} & 0 \\ 0 & -\sin\theta_e^{(8)} - \frac{1}{\lambda}\cos\theta_e^{(8)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} & 0 \\ 0 & \frac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}} + \frac{1}{\lambda\sqrt{1+\lambda^2}} \end{bmatrix} 2cR^2$$

Dunque, le eq. linearizzate in $\vec{q}_e^{(6)}$ e $\vec{q}_e^{(8)}$ coincidono in

$$\begin{cases} m\cancel{R^2}\left(\frac{3}{2}+\frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}\right)\ddot{x}_1 + \frac{2\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}c\cancel{R^2}x_1 = 0 \\ m\cancel{R^2}\,\ddot{x}_2 + \frac{2}{\lambda}\sqrt{1+\lambda^2}\,c\cancel{R^2}x_2 = 0 \end{cases}$$

e sono disaccoppiate.

16) Reazioni vincolari esterne in C durante il moto.

Utilizziamo la II ECD con polo in B

$$\vec e_z \times \vec e_\theta = \cos\theta\, \vec e_\varphi \qquad \vec e_z \times \vec e_\varphi \overset{(6.1)}{=} -\vec e_r$$

(16.1) $$\vec M_B^{\,est} = \frac{d \vec L_B}{dt}$$

(16.2) $$\vec L_B = \vec L_B^{(1)} + \vec L_B^{(2)}$$

(16.3) $$\vec L_B^{(1)} = I_B(\vec\omega) = I_B(\dot\varphi\, \vec e_3) = \dot\varphi\, I_B(\vec e_3) = \dot\varphi\, \frac{3}{2} m R^2\, \vec e_z$$

(16.4) $$\vec L_B^{(2)} = (P-B)\times m \vec v_P \overset{(5.6)(13.1)}{=} R(\vec e_r + \vec e_z)\times m R(\dot\theta\, \vec e_\theta + \sin\theta\,\dot\varphi\, \vec e_\varphi) =$$

$$= mR^2(\dot\theta\, \vec e_r\times\vec e_\theta + \sin\theta\,\dot\varphi\, \vec e_r\times \vec e_\varphi + \dot\theta\, \vec e_z \times \vec e_\theta + \sin\theta\,\dot\varphi\, \vec e_z\times\vec e_\varphi) =$$

$$= mR^2(\dot\theta\, \vec e_\varphi - \sin\theta\,\dot\varphi\, \vec e_\theta + \dot\theta\cos\theta\, \vec e_\varphi - \sin\theta\,\dot\varphi\, \vec e_r) =$$

$$\overset{(9.5)}{=} mR^2\left[(1+\cos\theta)\dot\theta\, \vec e_\varphi - \sin\theta\,\dot\varphi\, \vec e_\theta - \sin\theta\,\dot\varphi\, \vec e_r\right] =$$

$$\overset{(1.5)}{=} mR^2\left[(1+\cos\theta)\dot\theta\, \vec e_\varphi - \sin\theta\,\dot\varphi(-\sin\theta\, \vec e_z + \cos\theta\, \vec e_r) - \sin\theta\,\dot\varphi\, \vec e_r\right] =$$

$$= mR^2\left[-\sin\theta(\cos\theta+1)\dot\varphi\, \vec e_r + (1+\cos\theta)\dot\theta\, \vec e_\varphi + \sin^2\theta\,\dot\varphi\, \vec e_z\right]$$

Quindi,

(6.5) $$\vec L_B = mR^2\left[-\sin\theta(1+\cos\theta)\dot\varphi\, \vec e_r + (1+\cos\theta)\dot\theta\, \vec e_\varphi + \left(\frac{3}{2} + \sin^2\theta\right)\dot\varphi\, \vec e_z\right]$$

(16.6) $$\frac{d}{dt}\vec L_B = mR^2\Big\{\left[\left(-(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta\right)\dot\theta\dot\varphi - \sin\theta(1+\cos\theta)\ddot\varphi\right]\vec e_r +$$
$$+\left[-\sin\theta\,\dot\theta^2 + (1+\cos\theta)(-\sin\theta\,\dot\varphi^2 + \ddot\theta)\right]\vec e_\varphi + \left[2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi + \left(\frac{3}{2}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi\right]\vec e_z\Big\}$$

(16.7) $$\vec M_B^{\,est} = 2R(-\phi'_\varphi\, \vec e_r + \phi'_r\, \vec e_\varphi) + \vec M_B^{\,est\to P}$$

Dunque, la II ECD (16.1), scomposta sulla terna $(O; \vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$, si scrive:

$$(17.1)\quad \vec{e}_r: \; -2R\,\phi'_\varphi + 2cR^2(1+\cos\theta)\sin\varphi = \frac{mR^2}{2}\left[\left(\sin^2\theta-(1+\cos\theta)^2\right)\dot\theta\dot\varphi - \sin\theta(1+\cos\theta)\ddot\varphi\right]$$

$$(17.2)\quad \vec{e}_\varphi: \; 2R\,\phi'_r + \frac{R}{2}(mg-cR)\sin\theta + 2cR^2(1+\cos\theta)\cos\varphi = \frac{mR^2}{2}\left[-\sin\theta\,\dot\theta^2 + (1+\cos\theta)\left(-\sin\theta\,\dot\varphi^2+\ddot\theta\right)\right]$$

$$(17.3)\quad \vec{e}_z: \; -2cR^2\sin\theta\sin\varphi = mR^2\left[\sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi + \left(\frac{3}{2}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi\right]$$

Dalle prime due equazioni si ricava la reazione dinamica in C:

$$(17.4)\quad \vec{\phi}'_C = \left\{\frac{cR-mg}{2}\sin\theta - cR(1+\cos\theta)\cos\varphi + \frac{mR}{2}\left[\sin\varphi\,\dot\theta\dot\varphi + (1+\cos\theta)\ddot\theta\right]\right\}\vec{e}_r +$$
$$+\left\{cR(1+\cos\theta)\sin\varphi - \frac{mR}{2}\left[-\cos\theta(1+\cos\theta)+\sin^2\theta\right]\dot\theta\dot\varphi + \right.$$
$$\left. - \sin\theta(1+\cos\theta)\ddot\varphi\right\}\vec{e}_\varphi$$

N.B. La (17.3) è un'equazione pura di moto che coincide con la (14.5). Inoltre, confrontando la (16.5) con la (14.4) si può osservare che

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi} = \vec{L}_B \cdot \vec{e}_z\,,$$

cioè $\dfrac{\partial K}{\partial\dot\varphi}$ è uguale alla componente del momento angolare del modello, lungo l'asse verticale.