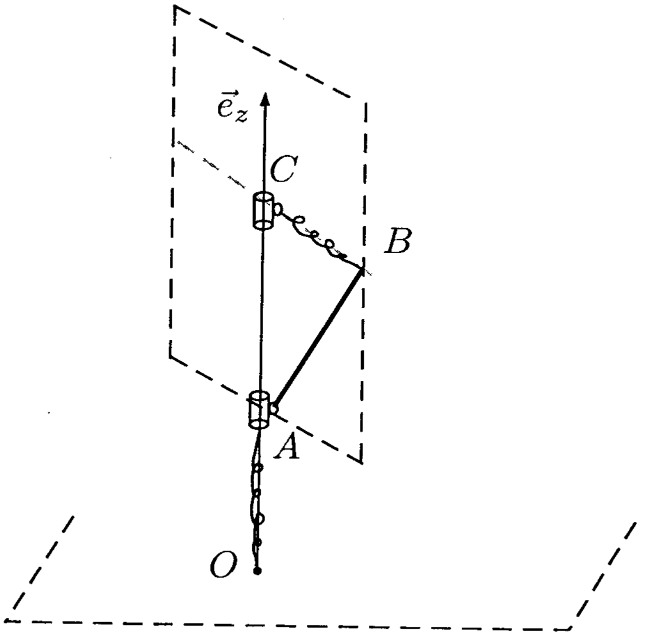
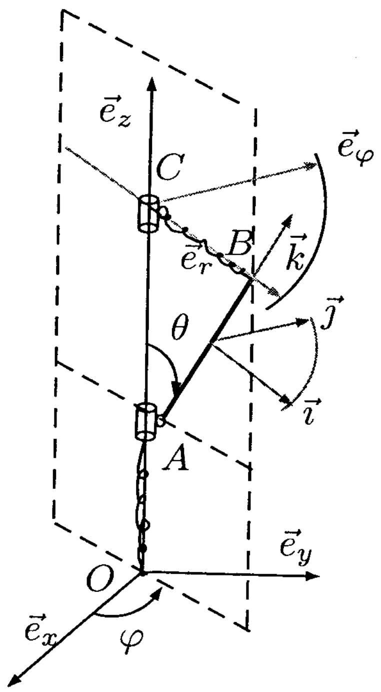
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 2 febbraio 2015

(G. Tondo)





Un'asta omogenea AB, di massa m e di lunghezza L, ha l'estremo A vincolato a scorrere senza attrito su un asse verticale tramite un collare cilindrico e una cerniera cilindrica con asse orizzontale fissata al collare, in modo che l'asta possa ruotare nel piano verticale contenente l'asse verticale e l'asta stessa. All'estremo A è fissata una molla che ha l'altro estremo fisso in un punto O dell'asse verticale; all'estremo B è applicata un'altra molla che si mantiene sempre orizzontale e ha l'altro estremo sull'asse verticale in C. La costante elastica di entrambe le molle è c. Scegliamo come prima coordinata libera l'angolo $0 \le \varphi < 2\pi$ tra il piano verticale passante per O contenente $\vec{e}_x$ e il piano verticale contenente l'asta; come seconda coordinata libera l'angolo $0 < \theta < \pi$, tra l'asse fisso $(A, \vec{e}_z)$ e l'asse $(A, \vec{k})$ dell'asta; come terza coordinata libera la quota z di A a partire dal piano orizzontale per O. (Si osservi che le configurazioni in cui l'asta è verticale non sono coperte da tale sistema di coordinate, quindi devono essere studiate a parte). Si chiede di:

STATICA.

Determinare:

1) le configurazioni di equilibrio dell'asta;

2) la forza di reazione vincolare sull'estremo A dell'asta, all'equilibrio;

3) la coppia delle reazioni vincolari sull'asta, all'equilibrio.

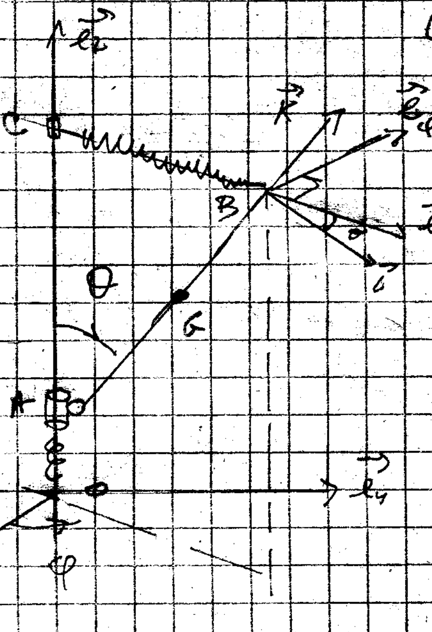
DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio coperte dalle coordinate assegnate;

6) calcolare le reazioni vincolari (forza in A e coppia) sull'asta, durante il moto.

Tema del 2/02/2015



Il modello è costituito da un solo rigido (asta). Col metodo dei congelamenti successivi, si ricava che l'asta ha 3 g.l.

Infatti, può ruotare intorno all'asse $(O, \vec{e_z})$ grazie al collare cilindrico; congelato tale spostamento, può ancora ruotare intorno all'asse $(O, \vec{e_\varphi})$, ortogonale al piano passante per l'asse $(O, \vec{e_z})$ e l'asta stessa. Congelato anche questo spostamento, l'estremo A può ancora scorrere lungo l'asse verticale. Scegliamo come coordinate libere la tripla

$$(\varphi, \theta, z) \qquad \begin{array}{l} 0 \le \varphi < 2\pi \\ 0 < \theta < \pi \\ z \in \mathbb{R} \end{array}$$

Inoltre, utilizzeremo le terne di versori

$(\vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ "fissa"

$(\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$ "intermedia"

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ "solidale"

$$\begin{cases} \vec{e_r} = \cos\varphi\, \vec{e_x} + \sin\varphi\, \vec{e_y} \\ \vec{e_\varphi} = -\sin\varphi\, \vec{e_x} + \cos\varphi\, \vec{e_y} \\ \vec{e_z} = \vec{e_z} \end{cases}$$

(1.1)
$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta\, \vec{e_r} - \sin\theta\, \vec{e_z} \\ \vec{j} = \vec{K} \times \vec{i} = \vec{e_\varphi} \\ \vec{K} = \sin\theta\, \vec{e_r} + \cos\theta\, \vec{e_z} \end{cases}$$

(1.2)
$$\begin{cases} \vec{i} = \cos\theta\cos\varphi\, \vec{e_x} + \cos\theta\sin\varphi\, \vec{e_y} - \sin\theta\, \vec{e_z} \\ \vec{j} = -\sin\varphi\, \vec{e_x} + \cos\varphi\, \vec{e_y} \\ \vec{k} = \sin\theta\cos\varphi\, \vec{e_x} + \sin\theta\sin\varphi\, \vec{e_y} + \cos\theta\, \vec{e_z} \end{cases}$$

$A-O = z\,\vec{e_4}$

$G-O = (A-O)+(G-A) = z\,\vec{e_z} + \frac{L}{2}\vec{K} = z\,\vec{e_z} + \frac{L}{2}\left(\sin\theta\,\vec{e_2} + \cos\theta\,\vec{e_z}\right)$

$B-O = (A-O)+(B-A) = z\,\vec{e_z} + L\,\vec{K}$

$B-C = L\sin\theta\,\vec{e_2}$

$\vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e_z} + \dot{\theta}\,\vec{e_4}$

Statica

La sollecitazione attiva, dovuta al peso proprio dell'asta e alla forza di richiamo delle due molle, una con estremo fisso, l'altra con estremo mobile lungo una direzione ortogonale alla molla stessa, è conservativa.

L'energia potenziale è

$$V(\varphi,\theta,z) = -m\vec{g}\cdot(G-O) + \frac{1}{2}c\left(\overline{AO}^2 + \overline{BC}^2\right)$$

$$= mg\,\vec{e_z}\cdot\left(z\,\vec{e_z} + \frac{L}{2}\vec{K}\right) + \frac{1}{2}c\left(z^2 + L^2\sin^2\theta\right)$$

$$= mg\left(z + \frac{L}{2}\cos\theta\right) + \frac{1}{2}c\left(z^2 + L^2\sin^2\theta\right)$$

N.B. La funzione V è indipendente da φ.

Cerchiamo i punti stazionari di V

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 = -Q_\varphi \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial \theta} = -mg\dfrac{L}{2}\sin\theta + cL^2\sin\theta\cos\theta = -Q_\theta \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial z} = mg + cz = -Q_z \end{cases}$$

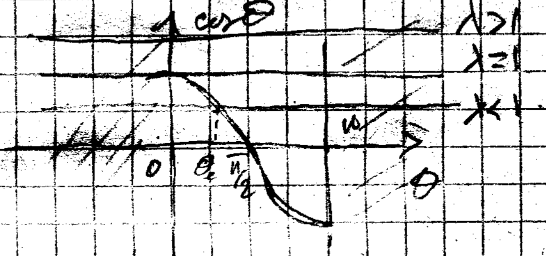
le eq. pure di equilibrio si riducono a

$$\begin{cases} \sin\theta\left(-mg\dfrac{L}{2} + cL^2\cos\theta\right) = 0 \\ cz + mg = 0 \end{cases}$$

Tenuto conto che l'equazione

(3.1) $$\sin\theta \neq 0 \quad \text{se } 0<\theta<\pi ,$$

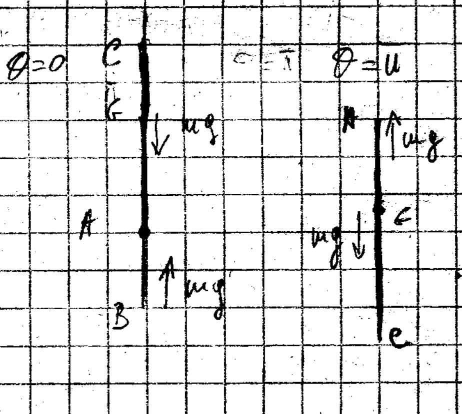
il sistema (1.2) si riduce ulteriormente a



(3.2) $$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{mg}{2cL} = \lambda \geq 0 \\ z = -\dfrac{mg}{c} \end{cases}$$

La prima eq. ha una soluzione accettabile se $\lambda < 1$, $\theta_e = \arccos\lambda$. Quindi, $\vec{q}_e^{(1)} = \left(\varphi, \arccos\lambda, -\frac{mg}{c}\right)$.

Studiamo ora le configurazioni dell'asta non coperte dal sistema di coordinate scelto, $\theta=0$, $\theta=\pi$, tramite le ECS.



Nelle configurazioni in cui l'asta è verticale, le ECS forniscono

(3.3) $$\begin{cases} -m\vec{g} - c(A-O) + \vec{\phi} = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{est,att} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

dove abbiamo indicato con $\vec{\phi}$ e $\vec{\mu}$ la forza e la coppia di reazione del vincolo in A. Poiché il vincolo è liscio, calcolando il LV delle reazioni vincolari, si può dedurre che

(3.4) $$LV = \vec{\phi}\cdot\delta\vec{x}_A + \vec{\mu}\cdot\vec{\varepsilon} \qquad \delta\vec{x}_A = \delta z\,\vec{e}_z$$

$$= \vec{\phi}\cdot\vec{e}_z\,\delta z + \vec{\mu}\cdot(\delta\varphi\,\vec{e}_z + \delta\theta\,\vec{e}_\varphi) \qquad \vec{\varepsilon} = \vec{\omega}\,\delta\tau = \delta\varphi\,\vec{e}_z + \delta\theta\,\vec{e}_\varphi$$

Poiché LV deve annullarsi $\forall\delta z$, $\forall\delta\varphi$, $\forall\delta\theta$, segue che

(3.5) $$\vec{\phi}\cdot\vec{e}_z = 0, \quad \vec{\mu}\cdot\vec{e}_z = 0, \quad \vec{\mu}\cdot\vec{e}_\varphi = 0 \quad \text{anche in Dinamica}$$

Quindi, la sollecitazione reattiva sarà sempre data da

$$(4.1)\quad \vec{\phi} = \phi_x \vec{e_x} + \phi_y \vec{e_y} = \phi_r \vec{e_r} + \phi_\varphi \vec{e_\varphi}$$

$$\vec{\mu} = \mu_z \vec{e_z}$$

- Allora, decomponendo le ECS (3.3), ad esempio lungo $(\vec{e_r}, \vec{e_\varphi}, \vec{e_z})$ si trova

$$(4.2)\quad \begin{cases} \phi_r = 0 \\ \phi_\varphi = 0 \\ z_e = -\dfrac{mg}{2cL} \\ \vec{M}_A^{\,est,att} = \vec{0} \\ \mu_z = 0 \end{cases} \Rightarrow \quad \vec{q_e}^{(2)} = \left(\varphi, 0, -\frac{mg}{c}\right) \quad \vec{q_e}^{(3)} = \left(0, \frac{\pi}{2}, -\frac{mg}{c}\right) \quad \vec{\phi} = \vec{0}, \ \vec{\mu} = \vec{0}$$

2) e 3) Anche per il calcolo della sollecitazione reattiva in $q_e^{(1)}$ utilizziamo le ECS. Allora, calcoliamo

$$(4.3)\quad \vec{R}^{\,est,att} = m\vec{g} - c(A-O) - c(B-C) = -mg\vec{e_z} - cz\vec{e_z} - cL\sin\theta\,\vec{e_r}$$

$$\vec{M}^{\,est,att} = (G-A)\times m\vec{g} + (B-A)\times(-c(B-C)) = \frac{L}{2}\vec{k}\times(-mg\vec{e_z}) + L\vec{k}\times(-cL\sin\theta\,\vec{e_r}) =$$

$$= \left(-mg\frac{L}{2}\sin\theta + cL^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{e_\varphi}$$

Allora, dalla I ECS si trova che

$$\vec{\phi} = -\vec{R}^{\,est,att}\big|_{\vec{q_e}} = +(\cancel{mg + cz_e})\vec{e_z} + cL\sin\theta_e\,\vec{e_r}$$

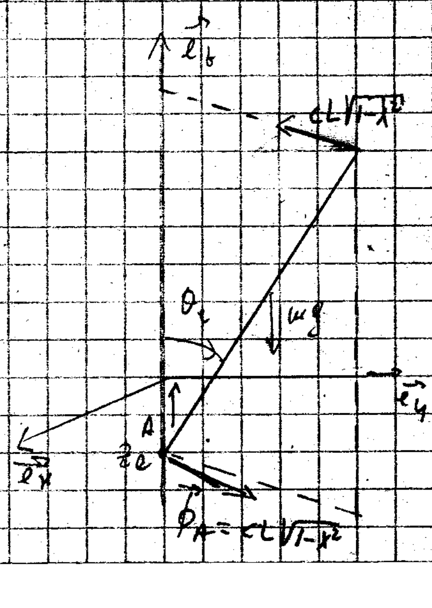
$$= cL\sqrt{1-\lambda^2}\,\vec{e_r}.$$

Dalla II ECS

$$\vec{\mu} = -\vec{M}^{\,est,att}\big|_{\vec{q_e}} =$$

$$= -\frac{mgL}{2}\sin\theta_e\,\vec{e_\varphi} + cL^2\sin\theta_e\cos\theta_e\,\vec{e_\varphi}$$

$$= \sin\theta_e\left(-\frac{mgL}{2} + \cancel{c}L^2\frac{mg}{2\cancel{c}\cancel{L}}\right)\vec{e_\varphi} = \vec{0}$$



Dinamica

4) Scriviamo le 3 EL relative a (φ, θ, z).
A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del modello.

$$(5.1)\quad K = \frac{1}{2} m |\vec{V}_G|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot I_G(\vec{\omega})$$

$$(5.2)\quad \vec{V}_G = \frac{d}{dt}(G-O) = \frac{d}{dt}\left(\left(z + \frac{L}{2}\cos\theta\right)\vec{e}_z + \frac{L}{2}\sin\theta\, \vec{e}_r\right) =$$

$$= \left(\dot{z} - \frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_z + \frac{L}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\,\vec{e}_r + \frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$(5.3)\quad |\vec{V}_G|^2 = \left(\dot{z} - \frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\cos\theta\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(\frac{L}{2}\sin\theta\,\dot{\varphi}\right)^2$$

$$= \dot{z}^2 + \frac{L^2}{4}\dot{\theta}^2 - L\sin\theta\,\dot{z}\,\dot{\theta} + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2$$

$$(5.4)\quad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}\left(\cos\theta\,\vec{k} - \sin\theta\,\vec{i}\right) + \dot{\theta}\,\vec{j}$$

$$[I_G]^{(\text{sol})} = \frac{mL^2}{12}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} \cdot I_G(\vec{\omega}) = \frac{mL^2}{12}\left[-\dot{\varphi}\sin\theta,\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi}\cos\theta\right]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ \dot{\varphi}\cos\theta \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{mL^2}{12}\left[-\dot{\varphi}\sin\theta,\ \dot{\theta},\ \dot{\varphi}\cos\theta\right]\begin{bmatrix} -\dot{\varphi}\sin\theta \\ \dot{\theta} \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{mL^2}{12}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$$

Dunque,

$$K = \frac{1}{2}m\left(\dot z^2 + \frac{L^2}{4}\dot\theta^2 + \frac{L^2}{4}\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 - L\sin\theta\,\dot z\,\dot\theta\right) +$$

$$\frac{1}{24}mL^2\left(\dot\varphi^2\sin^2\theta + \dot\theta^2\right) =$$

$$= \frac{1}{2}m\left(\dot z^2 + \frac{L^2}{3}\dot\theta^2 + \frac{L^2}{3}\sin^2\theta\,\dot\varphi^2 - L\sin\theta\,\dot\theta\,\dot z\right)$$

$$= \frac{1}{2}m\left[\dot\varphi,\ \dot\theta,\ \dot z\right]\begin{bmatrix} \frac{L^2}{3}\sin^2\theta & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2}\sin\theta \\ 0 & -\frac{L}{2}\sin\theta & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot\varphi \\ \dot\theta \\ \dot z\end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi} = m\frac{L^2}{3}\sin^2\theta\,\dot\varphi, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi}\right) = \frac{mL^2}{3}\left(2\sin\theta\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi + \sin^2\theta\,\ddot\varphi\right), \quad \frac{\partial K}{\partial\varphi} = 0$$

$$EL_\varphi: \quad \frac{mL^2}{3}\left(\sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi + \sin^2\theta\,\ddot\varphi\right) = 0$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\theta} = \frac{mL^2}{3}\dot\theta - \frac{1}{2}mL\sin\theta\,\dot z, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\theta}\right) = \frac{mL^2}{3}\ddot\theta - \frac{mL}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta\dot z + \sin\theta\,\ddot z\right)$$

$$\frac{\partial K}{\partial\theta} = \frac{mL^2}{6}2\sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2 - \frac{mL}{2}\cos\theta\,\dot\theta\dot z$$

$$EL_\theta: \quad \frac{mL^2}{3}\ddot\theta - \frac{mL}{2}\sin\theta\,\ddot z - \frac{mL^2}{6}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2 = \frac{mgL}{2}\sin\theta - \frac{cL^2}{2}\sin 2\theta$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot z} = m\dot z - \frac{mL}{2}\sin\theta\,\dot\theta, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot z}\right) = m\ddot z - \frac{mL}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right), \quad \frac{\partial K}{\partial z} = 0$$

$$EL_z: \quad m\ddot z - \frac{mL}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) = -(mg + cz)$$

5) Linearizzazione intorno a $\vec{q}_e = \left(\varphi_e, \arccos\lambda, -\frac{mg}{c}\right)$

Introduciamo il vettore scarto dalla conf. di equilibrio:

$$\vec{x} = \vec{q} - \vec{q}_e$$

$$\varepsilon$$

Poiché la sollecitazione attiva è conservativa, le eq. linearizzate si scrivono

$$A(\vec{q}_e)\ddot{\vec{x}} + V\vec{x} = 0$$

$$A(\vec{q}_e) = m\begin{bmatrix} \frac{L^2}{3}\sin^2\theta_e & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2}\sin\theta_e \\ 0 & -\frac{L}{2}\sin\theta_e & 1 \end{bmatrix} = m\begin{bmatrix} \frac{L^2}{3}(1-\lambda^2) & 0 & 0 \\ 0 & \frac{L^2}{3} & -\frac{L}{2}\sqrt{1-\lambda^2} \\ 0 & -\frac{L}{2}\sqrt{1-\lambda^2} & 1 \end{bmatrix}$$

$$V = \mathcal{H}_V(\vec{q}_e) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi} & \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\varphi} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial\theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\theta} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial\varphi\partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial z} & \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \end{bmatrix}(\vec{q}_e)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial\varphi^2} = \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi} = \frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial\theta} = 0$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = c$$

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2}\right|_{\vec{q}_e} = -mg\frac{L}{2}\cos\theta_e + cL^2\cos 2\theta_e = -\frac{mgL}{2}\lambda + cL^2\left(\lambda^2 - (1-\lambda^2)\right) =$$

$$= -\frac{mgL}{2}\lambda + cL^2(2\lambda^2 - 1) = -\cancel{cL^2\lambda^2} + 2c\cancel{L^2}\lambda - cL^2 = cL^2\lambda - cL^2 = cL^2(\lambda - 1)$$

Allora

$$V = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & cL^2(\lambda-1) & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$$

Dunque, le eq di Lagrange linearizzate intorno a $\vec{q}_e^{(1)}$ sono

$$\begin{cases} m\,\dfrac{L^2}{3}\left(1-\lambda^2\right)\ddot{x}_1 = 0 \\[2ex] m\,\dfrac{L^2}{3}\,\ddot{x}_2 - \dfrac{L}{2}\sqrt{1-\lambda^2}\,\ddot{x}_3 + cL^2\left(\lambda^2-1\right)x_2 = 0 \\[2ex] -\dfrac{mL}{2}\sqrt{1-\lambda^2}\,\ddot{x}_2 + m\,\ddot{x}_3 + c\,x_3 = 0 \end{cases}$$

Reazioni in A durante il moto

Già sappiamo che

$$(9.1)\quad \vec{\Phi}'_A = \Phi'_r \vec{e}_r + \Phi'_\varphi \vec{e}_\varphi$$

$$(9.2)\quad \vec{\mu} = \mu' \vec{e}_r$$

Per calcolare le 3 incognite $(\Phi'_r, \Phi'_\varphi, \mu')$, scriviamo le ECD:

$$(9.2)\quad \vec{\Phi}'_A + \vec{R}^{est,att} = m\,\vec{a}_G$$

$$(9.3)\quad \vec{\mu} + \vec{M}_A^{est,att} = \frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}_A \times m\vec{v}_G$$

Calcolo $\vec{a}_G$

$$\vec{a}_G = \dot{\vec{v}}_G \overset{(5.2)}{=} \left(\ddot{z} - \frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right)\right)\vec{e}_z + \frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\,\dot\theta^2\right)\vec{e}_r +$$

$$+\frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi + \sin\theta\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_\varphi + \frac{L}{2}\cos\theta\,\dot\theta\,\dot{\vec{e}}_r + \frac{L}{2}\sin\theta\,\dot\varphi\,\dot{\vec{e}}_\varphi$$

$$= \left(\ddot{z} - \frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right)\right)\vec{e}_z + \frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\right)\right)\vec{e}_r +$$

$$+\frac{L}{2}\left(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi + \sin\theta\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_\varphi$$

Quindi, tenendo conto della (4.3)

$$\vec{\Phi}'_A = (mg + cz)\vec{e}_z + cL\sin\theta\,\vec{e}_r + m\left(\ddot{z} - \frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right)\right)\vec{e}_z +$$

$$+\frac{mL}{2}\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\right)\right)\vec{e}_r + \frac{mL}{2}\left(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi + \sin\theta\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_\varphi$$

Dalla (9.1) si trova

$$\vec{\Phi}'_A = \left(cL\sin\theta + \frac{mL}{2}\left(\cos\theta\,\ddot\theta - \sin\theta\left(\dot\varphi^2 + \dot\theta^2\right)\right)\right)\vec{e}_r + \frac{mL}{2}\left(2\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi + \sin\theta\,\ddot\varphi\right)\vec{e}_\varphi$$

e l'eq. pura di moto, coincidente con EL(z):

$$\vec{e}_z:\quad m\ddot{z} - \frac{L}{2}\left(\cos\theta\,\dot\theta^2 + \sin\theta\,\ddot\theta\right) + (mg + cz) = 0$$

Per il calcolo di $\vec{\mu}$, scriviamo il secondo lato della (8.3) nel seguente modo, tenendo conto che $A \in R$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + \vec{v}_A \times m\vec{v}_G = \frac{d}{dt}\left(I_A(\vec{\omega}) + (G-A)\times m\vec{v}_A\right) + \vec{v}_A \times m\vec{v}_G$$

$$= \frac{d}{dt} I_A(\vec{\omega}) + \cancel{(\vec{v}_G - \vec{v}_A)\times m\vec{v}_A} + (G-A)\times m\vec{a}_A + \cancel{\vec{v}_A \times m\vec{v}_G}$$

$$= \frac{d}{dt} I_A(\vec{\omega}) + (G-A)\times m\vec{a}_A$$

$$= I_A(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times I_A(\vec{\omega}) + (G-A)\times m\vec{a}_A$$

Allora, dalla (8.3) si ottiene

$$\vec{\mu} = -\vec{M}_A^{\,est,att} + I_A(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times I_A(\vec{\omega}) + (G-A)\times m\vec{a}_A$$

$$\vec{\omega} = -\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{i} + \dot{\theta}\,\vec{j} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{k}$$

$$\dot{\vec{\omega}} = -(\ddot{\varphi}\sin\theta + \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta)\vec{i} + \ddot{\theta}\,\vec{j} + (\ddot{\varphi}\cos\theta - \dot{\varphi}\sin\theta\,\dot{\theta})\vec{k}$$

$$[I_A]^{rel} = \frac{mL^2}{3}\begin{bmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 0\end{bmatrix} \Rightarrow I_A(\dot{\vec{\omega}}) = \frac{mL^2}{3}\left[-(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta})\vec{i} + \ddot{\theta}\,\vec{j}\right]$$

$$I_A(\vec{\omega}) = \frac{mL^2}{3}\left(-\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{i} + \dot{\theta}\,\vec{j}\right)$$

$$\vec{\omega}\times I_A(\vec{\omega}) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\dot{\varphi}\sin\theta & \dot{\theta} & \dot{\varphi}\cos\theta \\ \frac{mL^2}{3}(-\dot{\varphi}\sin\theta) & \frac{mL^2}{3}\dot{\theta} & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{k}\left(\cancel{-\frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta + \frac{mL^2}{3}\dot{\theta}\dot{\varphi}\sin\theta}\right) - \dot{\varphi}\cos\theta\,\frac{mL^2}{3}\left(\dot{\theta}\,\vec{i} + \dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{j}\right)$$

$$(G-A)\times m\,\vec{a}_A = \frac{L}{2}\vec{k}\times m\,\ddot{z}\,\vec{e}_z = -\frac{mL}{2}\ddot{z}\sin\theta\,\vec{j}$$

Allora, tenendo conto delle (4.3), la (3.3) fornisce

$$\vec{\mu} = \left(-mg\frac{L}{2}\sin\theta + cL^2\sin\theta\cos\theta\right)\vec{j} +$$
$$\frac{mL^2}{3}\left[-\left(\ddot{\varphi}\sin\varphi + \cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{i} + \ddot{\theta}\,\vec{j}\right] +$$
$$-\frac{mL^2}{3}\left(\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{i} + \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\,\vec{j}\right) +$$
$$-\frac{mL}{2}\ddot{z}\sin\theta\,\vec{j}$$

(11.2)
$$= \frac{mL^2}{3}\left(-\ddot{\varphi}\sin\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta - \dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{i} +$$
$$+\left(-mg\frac{L}{2}\sin\theta + cL^2\sin\theta\cos\theta + \frac{mL^2}{3}\left(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right) - \frac{mL}{2}\ddot{z}\sin\theta\right)\vec{j}$$

$$= -\frac{mL^2}{3}\left(\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\vec{i} +$$
$$+\left(-mg\frac{L}{2}\sin\theta + cL^2\sin\theta\cos\theta + \frac{mL^2}{3}\left(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right) - \frac{mL}{2}\ddot{z}\sin\theta\right)\vec{j}$$

La (9.2) suggerisce di proiettare la (11.2) lungo la terna intermedia. Allora, si ottiene

$\vec{e}_z$: $\quad \mu = -\dfrac{mL^2}{3}\left(\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\cos\theta$

(11.3) $\vec{e}_\varphi$: $\quad 0 = -mg\dfrac{L}{2}\sin\theta + \dfrac{cL^2}{2}\sin 2\theta + \dfrac{mL^2}{3}\left(\ddot{\theta} - \dot{\varphi}^2\sin\theta\cos\theta\right) - \dfrac{mL}{2}\ddot{z}\sin\theta$

$\vec{e}_\xi$: $\quad 0 = -\dfrac{mL^2}{3}\left(\ddot{\varphi}\sin\theta + 2\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\right)\left(-\sin\theta\right)$

N.B. Si noti che la I eq. delle (11.3) fornisce la risposta alla domanda 6), mentre la II e la III eq. sono 2 eq. pure di moto che coincidono, rispettivamente, con le $EL(\theta)$ e la $EL(\varphi)$.