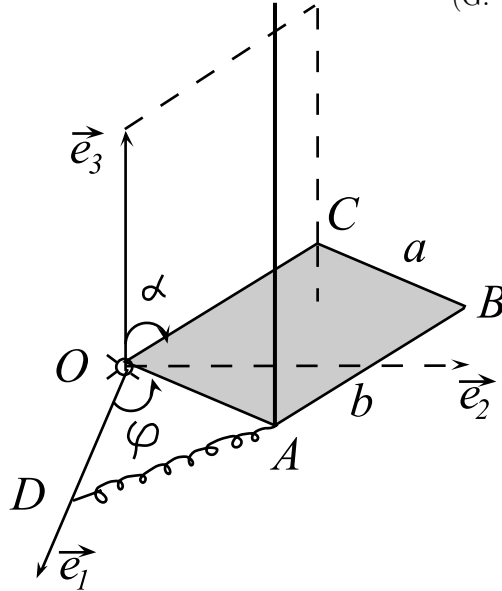


Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 23 giugno 2014

(G. Tondo)



Una lamina rettangolare, di massa m e lati di lunghezza a e b , ha l'estremo O del lato OA fissato a terra con una cerniera sferica e ha il punto A appeso ad un filo sempre verticale, che vincola A a stare nel piano orizzontale passante per O . Una molla di costante elastica c , collega il vertice A della lamina con un punto fisso D a distanza d da O ($d > a$) e appartenente al piano orizzontale per O . Scelte come coordinate libere l'angolo φ , tra la retta di riferimento passante per O e D e il lato OA e l'angolo α , tra l'asse verticale e il lato OC , si chiede di:

STATICA.

Determinare:

- 1) le configurazioni di equilibrio della lamina e discuterne la stabilità;
- 2) le reazioni vincolari del filo sul vertice A della lamina, all'equilibrio;
- 3) le reazioni vincolari della cerniera sferica sul vertice O della lamina, all'equilibrio.

DINAMICA.

- 4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;
- 5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio stabile e calcolare le pulsazioni delle piccole oscillazioni;
- 6) calcolare le reazioni vincolari del filo sul vertice A della lamina, durante il moto.

Tema del 23/06/2014

Il modello è un rigido vincolato con una cerniera sferica in O e fissato ad un filo verticale in A . Il piano $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$ è orizzontale.

Il rigido ha 2 g.l.: rotolamenti successivi.

Coordinate libere: $0 \leq \varphi < 2\pi$; $0 \leq \alpha < 2\pi$

$(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: fissa

$(O; \vec{i}, \vec{j}', \vec{e}_3)$: intermedia

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: solidale

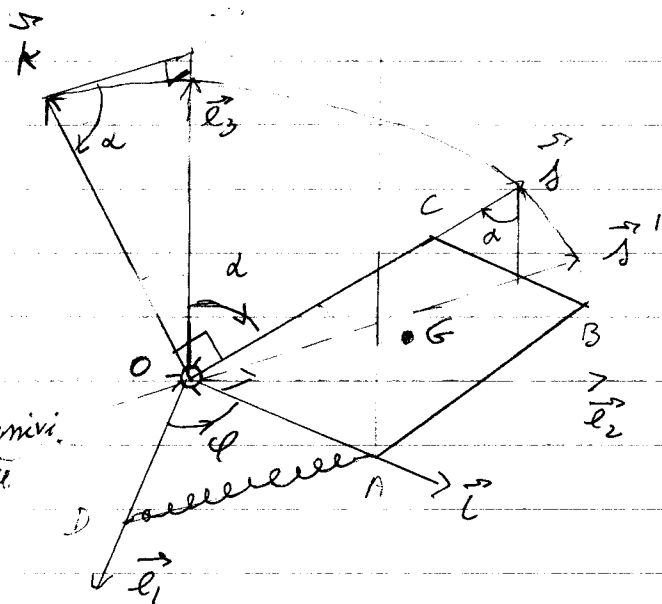
$$A-O = a \vec{i}, \quad G-O = \frac{1}{2}(a \vec{i} + b \vec{j})$$

$$D-O = d \vec{e}_1$$

$$A-D = a \vec{i} - d \vec{e}_1$$

$$\vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_3 - \dot{\alpha} \vec{i}$$

N.B. Il segno meno davanti a $\dot{\alpha}$ è dovuto al fatto che il verso di rotazione di α intorno all'asse $(O, \vec{i})$ è orario.



$$\vec{i} = \cos \varphi \vec{e}_1 + \sin \varphi \vec{e}_2$$

$$\vec{j}' = -\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2$$

$$\vec{j} = \cos \alpha \vec{e}_3 + \sin \alpha \vec{j}'$$

$$= \cos \alpha \vec{e}_3 + \sin \alpha (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2)$$

$$\vec{k} = \sin \alpha \vec{e}_3 - \cos \alpha \vec{j}'$$

$$= \sin \alpha \vec{e}_3 - \cos \alpha (-\sin \varphi \vec{e}_1 + \cos \varphi \vec{e}_2)$$

Statica

La sollecitazione attiva, dovuta al peso proprio e alle forze elastiche di una molla con un estremo fisso è conservativa. Quindi, possiamo utilizzare l'energia potenziale del modello.

$$V(\varphi, d) = \frac{1}{2} c \overline{AD}^2 - m \vec{g} \cdot \vec{x}_G$$

$$\overline{AD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos \varphi \quad (\text{teorema del coseno})$$

$$\vec{g} \cdot \vec{x}_G = -g \vec{e}_3 \cdot \frac{1}{2} (a \vec{i} + b \vec{j}) = -\frac{g}{2} (a \cancel{\vec{e}_3 \cdot \vec{i}} + b \vec{e}_3 \cdot \vec{j}) = -\frac{gb}{2} \cos d$$

Pertanto, trascurando i termini costanti,

$$V(\varphi, d) = -cad \cos \varphi + mg \frac{b}{2} \cos d$$

I punti stazionari sono le soluzioni del sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial \varphi} = 0 \\ \frac{\partial V}{\partial d} = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} cad \sin \varphi = 0 \\ -mg \frac{b}{2} \sin d = 0 \end{cases}$$

Quindi, le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, d_e)$ sono 4:

$$\vec{q}_e^{(1)} = (0, 0) ; \vec{q}_e^{(2)} = (0, \bar{d}) ; \vec{q}_e^{(3)} = (\bar{\varphi}, 0) , \vec{q}_e^{(4)} = (\bar{\varphi}, \bar{d}).$$

Per determinare la stabilità degli equilibri, calcoliamo la matrice

Hessiana di $V(\varphi, \alpha)$:

$$H(\varphi, \alpha) = \begin{bmatrix} c \cos \varphi & 0 \\ 0 & -\frac{mgb}{2} \cos \alpha \end{bmatrix}, \quad H_{11} = c \cos \varphi$$

$$\det H = -\frac{c \cos \alpha mgb}{2} \cos \alpha \cos \varphi$$

e valutiamola nelle configurazioni di equilibrio

$$H_{11}|_{\vec{q}_e^{(1)}} = H_{11}|_{\vec{q}_e^{(2)}} > 0, \quad H_{11}|_{\vec{q}_e^{(3)}} = H_{11}|_{\vec{q}_e^{(4)}} < 0$$

$$\det H|_{\vec{q}_e^{(1)}} = \det H|_{\vec{q}_e^{(4)}} < 0, \quad \det H|_{\vec{q}_e^{(2)}} = \det H|_{\vec{q}_e^{(3)}} > 0$$

Quindi

$$\vec{q}_e^{(1)} = (0, 0), \quad \left. \begin{array}{l} H_{11} > 0 \\ \det H < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ sella} \Rightarrow \text{instabile}$$

$$\vec{q}_e^{(2)} = (0, \bar{\alpha}) \quad \left. \begin{array}{l} H_{11} > 0 \\ \det H > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{minimo} \Rightarrow \text{stabile}$$

$$\vec{q}_e^{(3)} = (\pi, 0) \quad \left. \begin{array}{l} H_{11} < 0 \\ \det H > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{max} \Rightarrow \text{instabile}$$

$$\vec{q}_e^{(4)} = (\pi, \bar{\alpha}) \quad \left. \begin{array}{l} H_{11} < 0 \\ \det H < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{ sella} \Rightarrow \text{instabile}$$

2) Reazioni vincolari in A all'equilibrio

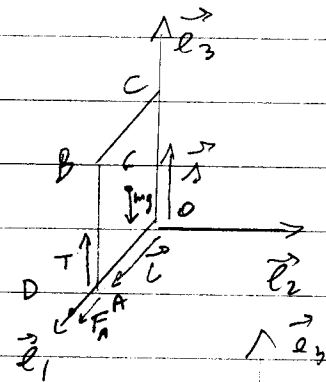
Il filo è appeso al filo verticale, quindi sarà

$$\vec{\phi}_A = T \vec{e}_3$$

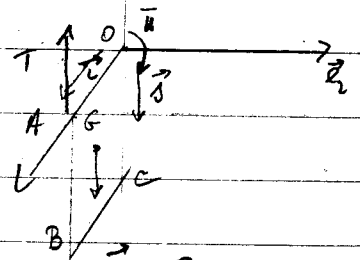
Per semplificare i conti, conviene metterci nella configurazione di equilibrio e richiedere che sia soddisfatta la II ECS con polo in O:

$$\vec{M}_O^{(ext)} = \vec{0}$$

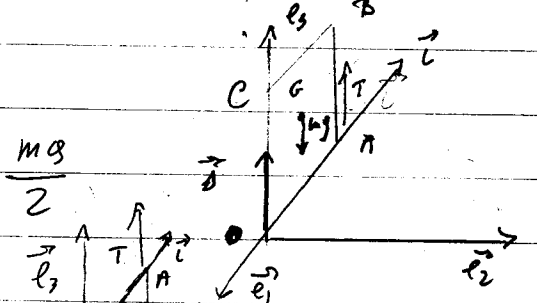
$$\vec{q}_e^{(1)} = (0, 0) \quad \vec{M}_O \cdot \vec{e}_2: mg \frac{a}{2} - T a = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2}$$



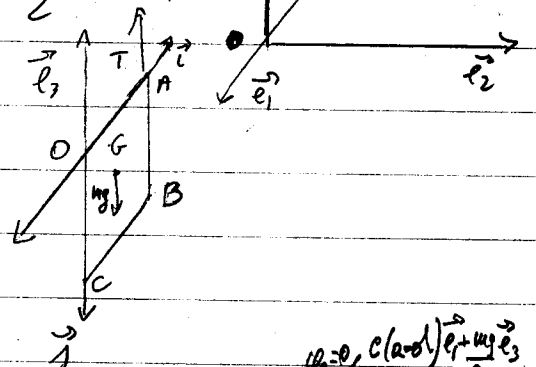
$$\vec{q}_e^{(2)} = (0, a) \quad \vec{M}_O \cdot \vec{e}_2: \frac{mg a}{2} - T a = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2}$$



$$\vec{q}_e^{(3)} = (a, 0) \quad \vec{M}_O \cdot \vec{e}_2: -\frac{mg a}{2} + T a = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2}$$



$$\vec{q}_e^{(4)} = (a, 0) \quad \vec{M}_O \cdot \vec{e}_2: -\frac{mg a}{2} + T a = 0 \Rightarrow T = \frac{mg}{2}$$



3) Reazioni in O all'equilibrio

IECS

$$\vec{\phi}_O + \vec{T} + \vec{F}_A + m \vec{g} = \vec{0} \quad \vec{\phi}_O = -\vec{F}_A - m \vec{g} - \vec{T} = -c(a \vec{e}_1 - d \vec{e}_2) + mg \vec{e}_3 - \frac{mg}{2} \vec{e}_3$$

$$\vec{F}_A = -c(A-D) = -c(a \vec{e}_1 - d \vec{e}_2)$$

$$\vec{\phi}_O = -c(a \vec{e}_1 - d \vec{e}_2) + \frac{mg}{2} \vec{e}_3$$

$$\vec{\phi}_O = -c(a \vec{e}_1 - d \vec{e}_2) + \frac{mg}{2} \vec{e}_3$$

Dinamica

- 4) Scriviamo le equazioni di Lagrange relative alle coordinate libere (φ, α) . A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica della lamina

$$(5.1) \quad K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbf{I}_O(\vec{\omega})$$

Velocità angolare

Per determinare $\vec{\omega}$ utilizziamo il teo di Eulero.

Consideriamo le 3 terne:

$(O; \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$: fissa

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{e}_3)$: intermedie $\Rightarrow \vec{\omega}^{(in)} = \dot{\varphi} \vec{e}_3$

$(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: solidale $\Rightarrow \vec{\omega}^{(rel)} = -\dot{\alpha} \vec{i}$

Pertanto,

$$(5.2) \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}^{(in)} + \vec{\omega}^{(rel)} = \dot{\varphi} \vec{e}_3 - \dot{\alpha} \vec{i}$$

Conviene scomporre $\vec{\omega}$ nelle terne solidale. Poiché

$$(5.3) \quad \vec{e}_3 = \cos \alpha \vec{j} + \sin \alpha \vec{k},$$

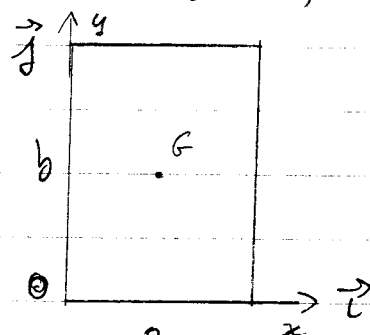
si ottiene

$$(5.4) \quad \vec{\omega} = -\dot{\alpha} \vec{i} + \dot{\varphi} \cos \alpha \vec{j} + \dot{\varphi} \sin \alpha \vec{k}$$

Matrice d'inertie relative forme solide

$$\mathcal{B}' = \{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$$

$$[I_0] = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & 0 \\ -I_{xy} & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{xx} + I_{yy} \end{bmatrix}$$



$$I_{xx} = \int_0^a \int_0^b \frac{m}{ab} y^2 dy dx = \frac{m}{ab} \int_0^a \left[\frac{y^3}{3} \right]_0^b dx = \frac{m b^2}{ab^3} \left[x \right]_0^a = \frac{m b^2}{3}$$

$$I_{yy} = \frac{m a^2}{3}$$

$$I_{xy} = - \int_0^a \int_0^b \frac{m}{ab} xy dy dx = - \frac{m}{ab} \int_0^a x \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^b dx = - \frac{m b^2}{2ab} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^a = - \frac{m b a^2}{4} = - \frac{m a b}{4}$$

Dunque

$$[I_0]_{\mathcal{B}'} = m \begin{bmatrix} \frac{b^2}{3} & -\frac{ab}{4} & 0 \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

Allora, il momento angolare r.s. a O vale

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= I_O(\vec{\omega}) = [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] \begin{bmatrix} \frac{b^2}{3} & -\frac{ab}{4} & 0 \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3}(a^2+b^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\dot{\alpha} \\ \dot{\varphi} \cos \alpha \\ \dot{\varphi} \sin \alpha \end{bmatrix} \\ (7.1) \quad &= m [\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}] \begin{bmatrix} -\frac{b^2}{3} \dot{\alpha} - \frac{ab}{4} \dot{\varphi} \cos \alpha \\ \frac{ab}{4} \dot{\alpha} + \frac{a^2}{3} \dot{\varphi} \cos \alpha \\ \frac{1}{3}(a^2+b^2) \dot{\varphi} \sin \alpha \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$= m \left[\left(-\frac{ab}{4} \cos \alpha \dot{\varphi} - \frac{b^2}{3} \dot{\alpha} \right) \vec{i} + \left(\frac{a^2}{3} \cos \alpha \dot{\varphi} + \frac{ab}{4} \dot{\alpha} \right) \vec{j} + \frac{a^2+b^2}{3} \sin \alpha \dot{\varphi} \vec{k} \right]$$

Pertanto, l'energia cinetica è

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}_O = \frac{m}{2} \left[\dot{\alpha} \left(\frac{ab}{4} \cos \alpha \dot{\varphi} + \frac{b^2}{3} \dot{\alpha} \right) + \dot{\varphi} \cos \alpha \left(\frac{a^2}{3} \cos \alpha \dot{\varphi} + \frac{ab}{4} \dot{\alpha} \right) + \frac{a^2+b^2}{3} \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 \right] \\ &= \frac{m}{2} \left[\frac{ab}{4} \cos \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} + \frac{b^2}{3} \dot{\alpha}^2 + \frac{a^2}{3} \cos^2 \alpha \dot{\varphi}^2 + \frac{ab}{4} \cos \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} + \frac{a^2+b^2}{3} \sin^2 \alpha \dot{\varphi}^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m \left[\frac{1}{3} (a^2+b^2 \sin^2 \alpha) \dot{\varphi}^2 + \frac{b^2}{3} \dot{\alpha}^2 + \frac{ab}{2} \cos \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} \right] \\ &= \frac{1}{2} m \begin{bmatrix} \dot{\varphi} & \dot{\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{a^2+b^2 \sin^2 \alpha}{3} & \frac{ab}{4} \cos \alpha \\ \frac{ab}{4} \cos \alpha & \frac{b^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\alpha} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m}{3} (a^2 + b^2 \sin^2 \alpha) \dot{\varphi} + m \frac{a b}{4} \cos \alpha \dot{\alpha}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{m}{3} \left[2 b^2 \sin \alpha \cos \alpha \dot{\alpha} \dot{\varphi} + (a^2 + b^2 \sin^2 \alpha) \ddot{\varphi} \right] +$$

$$+ \frac{m a b}{4} \left[-\sin \alpha \dot{\alpha}^2 + \cos \alpha \ddot{\alpha} \right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$(8.1) EL_{\varphi} : \frac{m}{3} \left[(b^2 \sin 2\alpha \dot{\alpha} \dot{\varphi}) + (a^2 + b^2 \sin^2 \alpha) \ddot{\varphi} \right] + \frac{m a b}{4} (-\sin \alpha \dot{\alpha}^2 + \cos \alpha \ddot{\alpha}) =$$

$$= -c a d \sin \varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\alpha}} = m \left[\frac{b^2}{3} \dot{\alpha} + \frac{a b}{4} \cos \alpha \dot{\varphi} \right]$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\alpha}} \right) = m \left[\frac{b^2}{3} \ddot{\alpha} + \frac{a b}{4} (-\sin \alpha \dot{\alpha} \dot{\varphi} + \cos \alpha \ddot{\varphi}) \right]$$

$$\frac{\partial K}{\partial \alpha} = m \left[\frac{b^2}{3} \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2 - \frac{a b}{4} \sin \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} \right]$$

$$(8.2) EL_{\alpha} : m \left(\frac{b^2}{3} \ddot{\alpha} + \frac{a b}{4} \cos \alpha \ddot{\varphi} - \frac{b^2}{6} \sin 2\alpha \dot{\varphi}^2 \right) = m g \frac{b}{2} \sin \alpha$$

5) linearizzazione intorno alla configurazione di equilibrio stabile

$$\vec{q}_e^{(2)} = (0, \bar{a})$$

La sollecitazione attiva è conservativa, quindi le eq. di Lagrange linearizzate sono

$$A \ddot{\vec{x}} + V \vec{x} = 0 \quad \vec{x} = \frac{\vec{q}(t) - \vec{q}_e^{(2)}}{\varepsilon}$$

dove A è la matrice di massa e V la matrice di rigidezza. Pertanto,

$$A = m \begin{bmatrix} \frac{a^2 + b^2 \sin^2 \alpha}{3} & \frac{a b \cos \alpha}{4} \\ \frac{a b \cos \alpha}{4} & \frac{b^2}{3} \end{bmatrix} \Big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = m \begin{bmatrix} \frac{a^2}{3} & -\frac{a b}{4} \\ -\frac{a b}{4} & \frac{b^2}{3} \end{bmatrix}$$

$$V = \mathcal{H}_v(0, \bar{a}) = \begin{bmatrix} c \alpha d & 0 \\ 0 & \frac{m g b}{2} \end{bmatrix}$$

Quindi

$$m \begin{bmatrix} \frac{a^2}{3} & -\frac{a b}{4} \\ -\frac{a b}{4} & \frac{b^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \alpha d & 0 \\ 0 & \frac{m g b}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m a \left(\frac{a \ddot{x}_1}{3} - \frac{b}{4} \ddot{x}_2 \right) + c \alpha d x_1 = 0 \\ m b \left(-\frac{a}{4} \ddot{x}_1 + \frac{b \ddot{x}_2}{3} \right) + \frac{m g b}{2} x_2 = 0 \end{cases}$$

110

Le pulsazioni delle piccole oscillazioni sono le radici quadrate delle soluzioni dell'equazione

$$\det (V - \gamma A) = 0$$

$$\text{cioè} \quad \det \begin{bmatrix} ccd - \gamma \frac{m a^2}{3} & + \gamma \frac{m a b}{4} \\ + \gamma \frac{m a b}{4} & \frac{m g b}{2} - \gamma \frac{m b^2}{3} \end{bmatrix} = 0$$

Quindi,

$$\left(ccd - \gamma \frac{m a^2}{3} \right) \left(\frac{m g b}{2} - \gamma \frac{m b^2}{3} \right) - \left(\gamma \frac{m a b}{4} \right)^2 = 0$$

$$\left(\frac{m^2 a^2 b^2}{9} - \frac{m^2 a^2 b^2}{16} \right) \gamma^2 - \left(\frac{m c c d b^2}{3} + \frac{m^2 a^2 b g}{6} \right) \gamma + \frac{m g c a d b}{2} = 0$$

$$\frac{7}{144} m^2 a^2 b^2 \gamma^2 - \frac{m a b}{3} \left(c b d + \frac{a m g}{2} \right) \gamma + \frac{m g c a d b}{2} = 0$$

$$\gamma_{1,2} = \frac{1}{3} \left(c b d + \frac{a m g}{2} \right) \pm \frac{\sqrt{\frac{1}{9} \left(c b d + \frac{a m g}{2} \right)^2 - \frac{7}{72} m g a b c d}}{7 m a b / 72}$$

le pulsazioni sono

$$\nu_1 = \sqrt{\gamma_1}, \quad \nu_2 = \sqrt{\gamma_2}$$

6) Reazione del filo in dinamica

In dinamica la tensione del filo è:

$$(11.1) \quad \vec{\phi}_A' = T' \vec{e}_3$$

Per determinare T' è sufficiente un'equazione che contenga la sola incognita T' . Pertanto, scriviamo la II ECD con polo nel punto fisso O.

$$(11.2) \quad \vec{M}_O^{\text{ext}} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_O^{\text{ext}} &= (G-O) \times m\vec{g} + (G-A) \times (\vec{F}_A + \vec{\phi}_A') \\ &= \left(\frac{a}{2} \vec{i} + \frac{b}{2} \vec{j} \right) \times (-mg \vec{e}_2) + a\vec{i}' \times (-c(\vec{e}_1 - d\vec{e}_1) + T' \vec{e}_3) \\ &= -mg \frac{a}{2} \vec{i} \times \vec{e}_2 - \frac{mg b}{2} \vec{j} \times \vec{e}_2 + ac d \vec{i} \times \vec{e}_1 + a T' \vec{i} \times \vec{e}_3 \\ &= \left(a T' - mg \frac{a}{2} \right) \vec{i} \times \vec{e}_3 - \frac{mg b}{2} \vec{j} \times \vec{e}_2 + ac d \vec{i} \times \vec{e}_1 \\ &= \left(mg \frac{a}{2} - a T' \right) \vec{j}' - mg \frac{b}{2} \sin d \vec{i} - ac d \sin \varphi \vec{e}_3, \end{aligned}$$

dove abbiamo utilizzato le seguenti identità facilmente ricavabili geometricamente

$$\vec{i} \times \vec{e}_3 = -\vec{j}', \quad \vec{j} \times \vec{e}_2 = \sin d \vec{i}, \quad \vec{i} \times \vec{e}_1 = -\sin \varphi \vec{e}_3$$

Calcoliamo il II lato delle (11.2)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_O(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega} \times I_O(\vec{\omega})$$

$$\dot{\vec{\omega}} \stackrel{(5.1)}{=} -\ddot{\alpha} \vec{l} + (\ddot{\varphi} \cos \alpha - \sin \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha}) \vec{j} + (\sin \alpha \ddot{\alpha} + \cos \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha}) \vec{k}$$

$$I_O(\dot{\vec{\omega}}) = [\vec{l}, \vec{j}, \vec{k}] m \begin{bmatrix} \frac{b^2}{3} & -\frac{ab}{4} & 0 \\ -\frac{ab}{4} & \frac{a^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a^2+b^2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ddot{\alpha} \\ \dot{\varphi} \cos \alpha - \sin \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} \\ \sin \alpha \ddot{\alpha} + \cos \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} \end{bmatrix} =$$

$$= m [\vec{l}, \vec{j}, \vec{k}] \begin{bmatrix} -\ddot{\alpha} \left(\frac{b^2}{3} \right) - \frac{ab}{4} (\dot{\varphi} \cos \alpha - \sin \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha}) \\ \frac{ab}{4} \dot{\alpha} + \frac{a^2}{3} (\dot{\varphi} \cos \alpha - \sin \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha}) \\ \frac{a^2+b^2}{3} (\sin \alpha \ddot{\alpha} + \cos \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha}) \end{bmatrix}$$

$$= m \left[-\left(\frac{b^2}{3} \ddot{\alpha} + \frac{ab}{4} \cos \alpha \dot{\varphi} - \frac{ab}{4} \sin \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} \right) \vec{l} + \right. \\ \left. + \left(\frac{ab}{4} \dot{\alpha} + \frac{a^2}{3} \cos \alpha \dot{\varphi} - \frac{a^2}{3} \sin \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} \right) \vec{j} + \right. \\ \left. + \frac{a^2+b^2}{3} (\sin \alpha \ddot{\alpha} + \cos \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha}) \vec{k} \right]$$

$$\vec{\omega} \times I_0(\vec{\omega}) = m \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -\dot{\alpha} & \dot{\varphi} \cos \alpha & \dot{\varphi} \sin \alpha \\ -\left(\frac{a^2 b \cos \alpha \dot{\varphi}}{4} + \frac{b^2 \dot{\alpha}}{3}\right) & \frac{a^2 \cos \alpha \dot{\varphi}}{3} + \frac{a b \dot{\alpha}}{4} & \frac{a^2 + b^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}}{3} \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned} &= m \vec{i} \left[\dot{\varphi} \cos \alpha \frac{a^2 + b^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}}{3} - \dot{\varphi} \sin \alpha \left(\frac{a^2 \cos \alpha \dot{\varphi}}{3} + \frac{a b \dot{\alpha}}{4} \right) \right] + \\ &- m \vec{j} \left[-\dot{\alpha} \frac{a^2 + b^2 \sin^2 \alpha \dot{\varphi}}{3} + \dot{\varphi} \sin \alpha \left(\frac{a b \cos \alpha \dot{\varphi}}{4} + \frac{b^2 \dot{\alpha}}{3} \right) \right] + \\ &+ m \vec{k} \left[-\dot{\alpha} \left(\frac{a^2 \cos \alpha \dot{\varphi}}{3} + \frac{a b \dot{\alpha}}{4} \right) + \dot{\varphi} \cos \alpha \left(\frac{a b \cos \alpha \dot{\varphi}}{4} + \frac{b^2 \dot{\alpha}}{3} \right) \right] \\ &= m \vec{i} \left(\frac{b^2}{3} \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2 - \frac{a b}{4} \sin \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} \right) + \\ &- m \vec{j} \left(-\frac{a^2}{3} \sin \alpha \dot{\alpha} \dot{\varphi} + \frac{a b}{4} \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2 \right) + \\ &+ m \vec{k} \left(\frac{b^2 - a^2 \cos \alpha}{3} \dot{\varphi} \dot{\alpha} - \frac{a b}{4} \dot{\alpha}^2 + \frac{a b \cos^2 \alpha}{4} \dot{\varphi}^2 \right) \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned} (13.1) \quad \frac{d\vec{L}_0}{dt} &= m \vec{i} \left(-\frac{b^2}{3} \dot{\alpha} - \frac{a b \cos \alpha}{4} \ddot{\varphi} + \frac{b^2}{3} \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2 \right) + \\ &+ m \vec{j} \left(\frac{a b}{4} \dot{\alpha} + \frac{a^2 \cos \alpha}{3} \ddot{\varphi} - \frac{a b}{4} \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2 \right) + \\ &+ m \vec{k} \left(\frac{a^2 + b^2 \sin^2 \alpha}{3} \dot{\varphi} + \frac{2 b^2 \cos \alpha}{3} \dot{\varphi} \dot{\alpha} - \frac{a b}{4} \dot{\alpha}^2 + \frac{a b \cos^2 \alpha}{4} \dot{\varphi}^2 \right) \end{aligned}$$

Proiettando la (11.2) lungo $\vec{j}'$ si trova:

$$(13.1) \left(m g \frac{a}{2} - Q T' \right) = m \left(\frac{a b}{4} \ddot{\alpha} + \frac{a^2}{3} \cos \alpha \ddot{\varphi} - \frac{a b}{4} \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2 \right) \vec{j} \cdot \vec{j}' + \\ + m \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \sin \alpha \ddot{\varphi} + \frac{2 b^2}{3} \cos \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} - \frac{a b}{4} \dot{\alpha}^2 + \frac{a b}{4} \cos^2 \alpha \dot{\varphi}^2 \right) \vec{k} \cdot \vec{j}'$$

Tenendo conto che

$$\vec{j} \cdot \vec{j}' = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \vec{k} \cdot \vec{j}' = -\cos \alpha,$$

la (13.1) si scrive

$$m g \frac{a}{2} - Q T' = m \sin \alpha \left(\frac{a b}{4} \ddot{\alpha} + \frac{a^2}{3} \cos \alpha \ddot{\varphi} - \frac{a b}{4} \sin \alpha \cos \alpha \dot{\varphi}^2 \right) + \\ - m \cos \alpha \left(\frac{a^2 + b^2}{3} \sin \alpha \ddot{\varphi} + \frac{2 b^2}{3} \cos \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} - \frac{a b}{4} \dot{\alpha}^2 + \frac{a b}{4} \cos^2 \alpha \dot{\varphi}^2 \right)$$

Pertanto

$$Q T' = m g \frac{a}{2} + m \left(-\frac{a b}{4} \sin \alpha \ddot{\alpha} + \frac{a b}{4} \cos \alpha \dot{\varphi}^2 + \frac{b^2}{3} \sin \alpha \cos \alpha \ddot{\varphi} + \frac{2 b^2}{3} \cos^2 \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} - \frac{a b}{4} \cos^2 \alpha \dot{\varphi}^2 \right)$$

cioè

$$T' = \frac{m g}{2} + m \left(-\frac{b}{4} \sin \alpha \ddot{\alpha} + \frac{b}{4} \cos \alpha \dot{\varphi}^2 + \frac{b^2}{3 a} \sin \alpha \cos \alpha \ddot{\varphi} + \frac{2 b^2}{3 a} \cos^2 \alpha \dot{\varphi} \dot{\alpha} - \frac{b}{4} \cos^2 \alpha \dot{\varphi}^2 \right)$$

N.B. Verificare per esercizio che le proiezioni della $\vec{\Gamma}$ ECD lungo i vettori $\vec{i}$ ed $\vec{e}_3$, sono 2 eq. pure di moto che coincidono, rispettivamente, con la (8.2) e la (8.1).