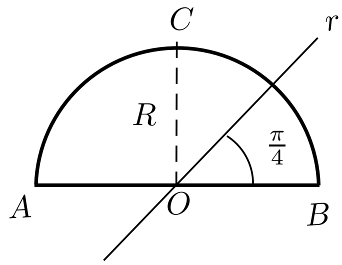
Compito di Meccanica Razionale

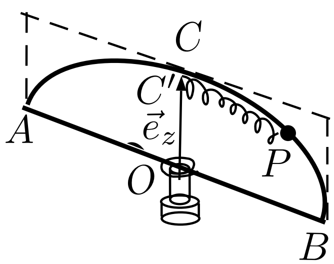
Trieste, 12 luglio 2019

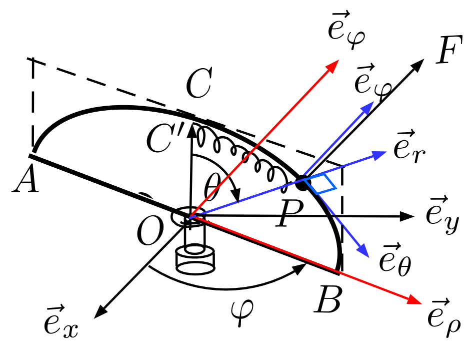
(G. Tondo)



È dato un telaio rigido formato da un semianello omogeneo, di massa $2m$ e raggio R e da un'asta omogenea di massa m saldata al semianello lungo il diametro AB.

1) Determinarne il baricentro e il momento d'inerzia rispetto all'asse r passante per il punto O e inclinato di $\frac{\pi}{4}$ rispetto al vettore $B - O$.





Il telaio è vincolato ad un asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ mediante una cerniera cilindrica liscia fissata in O. Sul semianello, è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P, di massa m, collegato a una molla, di costante elastica c, che ha l'altro estremo fissato nel punto C' dell'asse fisso posto a distanza R da O. Inoltre, su P agisce una forza $F\vec{e}_\varphi$. Sul telaio agisce una molla angolare di richiamo fissata in O e di costante elastica b. Scelte come coordinate libere gli angoli di figura, $\varphi \in \mathbb{R}$ e $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, si chiede di:

STATICA.

2) determinare le configurazioni di equilibrio del modello in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{cR}$;

3) determinare l'insieme delle reazioni vincolari esterne sul telaio nel punto O, all'equilibrio;

DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

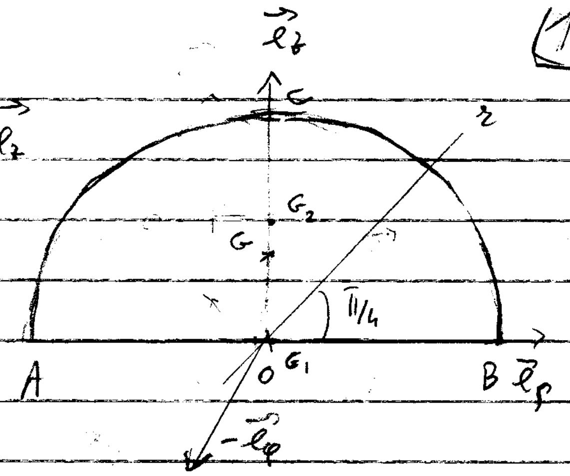
5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e calcolare l'integrale generale intorno a una sola configurazione di equilibrio;

6) calcolare le reazioni vincolari del telaio sul punto materiale P durante il moto.

Tema del 12/7/2019

1.

(1.1) $\vec{x}_G = (G-O) = \frac{\cancel{m(G_1-O)} + 2m(G_2-O)}{3m} = \frac{2}{3}\,\frac{2}{\pi}\,R\,\vec{e}_z$



Dunque

(1.2) $\vec{x}_G = \frac{4R}{3\pi}\,\vec{e}_z$

1) Il momento d'inerzia del telaio rispetto all'asse $(O, \vec{e}_?)$ si può calcolare come

(1.3) $I_z = \vec{u} \cdot I_O(\vec{u})$ $\qquad$ $\vec{u}$: versore di z

Dunque, ci serve la matrice d'inerzia rispetto al punto O.
Per calcolarla, fissiamo la base $\mathcal{B}''' = (\vec{l}_1 = \vec{e}_\rho, \vec{l}_2 = \vec{e}_z, \vec{l}_3 = -\vec{e}_\varphi)$ e osserviamo che $(O, \mathcal{B}''')$ è una TPI(O) per ragioni di simmetria materiale.

(1.4) $\left[I_O\right]^{\mathcal{B}'''} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$

$I_{11} = I_{11}^{(SC)} + \cancel{I_{11}^{(ast)}} = \frac{1}{2}(2m)R^2 = mR^2$

$I_{22} = I_{22}^{(SC)} + I_{22}^{(ast)} =$

$= \frac{1}{2}(2m)R^2 + \frac{1}{12}\,m\,4R^2 = \frac{4}{3}\,mR^2$

Dunque,

(1.5) $\left[I_O\right]^{\mathcal{B}'''} = mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$

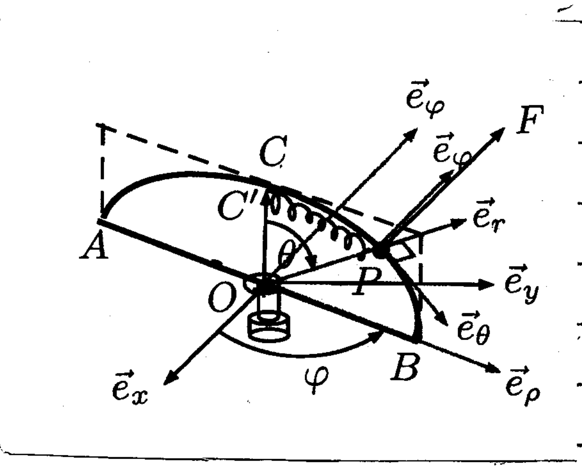
Allora, poiché il versore di r è $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\vec{e}_y + \vec{e}_z\right)$, risulta

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[1,1,0\right] mR^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} mR^2 \left[1,1,0\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{4}{3} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2} mR^2 \left(1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{7}{6} mR^2$$

Il modello è formato da un rigido, il telaio, con asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$, e il punto materiale P vincolato al semianello. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi può essere descritto dalle coordinate lagrangiane della figura



$$\varphi \in \mathbb{R} \quad , \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Consideriamo le 3 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: "intermedia" (solidale all'anello)

$\mathcal{B}'' = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$: solidale al punto P

$$(2.1)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.2)\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(2.3)\begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.4)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_r \end{cases}$$

Quindi,

$$P - O = R\, \vec{e}_r = R\left(\sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z\right)$$

$$P-O = R\,\vec{e}_r$$

$$P-C = (P-O)+(O-C) = R\left(\vec{e}_r - \vec{e}_z\right) = R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + (\cos\theta - 1)\,\vec{e}_z\right)$$

$$|P-C|^2 = R^2\left[\sin^2\theta + (\cos\theta-1)^2\right] = 2R^2(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = R\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial \varphi} = R\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) = R\left(\sin\theta\,\frac{\partial \vec{e}_\rho}{\partial\varphi}\right) = R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \theta} = R\,\frac{\partial \vec{e}_r}{\partial\theta} = R\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) = R\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) = R\,\vec{e}_\theta$$

La sollecitazione dovuta al peso e alle molle è conservativa, quindi ammette energia potenziale

$$V(\varphi,\theta) = -2m\vec{g}\cdot\vec{x}_G - m\vec{g}\cdot\vec{x}_P + \frac{1}{2}b\varphi^2 + \frac{1}{2}c\,\overline{PC}^2$$

$$= \cancel{2mg\vec{e}_z\cdot\frac{R}{\pi}\vec{e}_z} + mg\,\vec{e}_z\cdot R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right) + \frac{1}{2}b\varphi^2 + \frac{1}{\cancel{2}}c\,\cancel{2}R^2(1-\cos\theta)$$

$$\simeq (mgR - cR^2)\cos\theta + \frac{1}{2}b\varphi^2$$

Calcoliamo le componenti lagrangiane della forza $\vec{F}$ in P.

$$Q_\varphi^{(pol)} = \vec{F}_P\cdot\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial\varphi} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi = FR\sin\theta$$

$$Q_\theta^{(pol)} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\theta} = F\,\vec{e}_\varphi\cdot R\,\vec{e}_\theta = 0$$

Dunque

$$\frac{\partial Q_\varphi^{(pol)}}{\partial\theta} \neq \frac{\partial Q_\theta^{(pol)}}{\partial\varphi} \Rightarrow \text{sollecitazione } \underline{\text{non}} \text{ conservativa}$$

Inoltre

$$Q_\varphi^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\varphi} = -b\varphi$$

$$Q_\theta^{(con)} = \frac{\partial(-V)}{\partial\theta} = R(mg - cR)\sin\theta$$

Allora

(4.1) $Q_\varphi = -b\varphi + FR\sin\theta$

(4.2) $Q_\theta = R(mg - cR)\sin\theta$

e le equazioni pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -b\varphi + FR\sin\theta = 0 \\ (mg - cR)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La II eq. pura di equilibrio ha soluzioni, posto $\lambda = \frac{mg}{cR}$,

$\theta = 0 \quad \forall\lambda$, $\forall\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ se $\lambda = 1$.

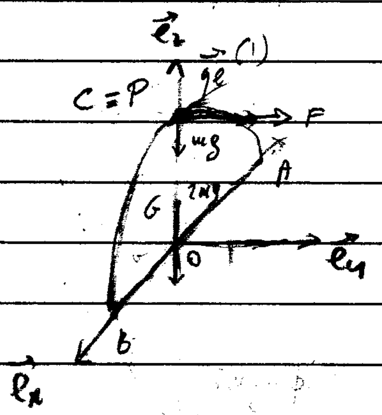
Sostituendo nella I eq. pura di equilibrio si trova

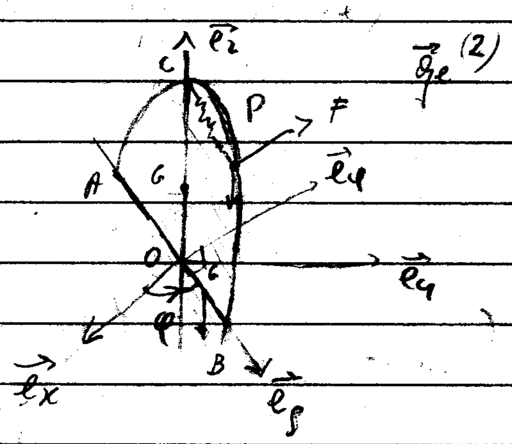
$$\varphi_e = \frac{FR}{b}\sin\theta_e$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$ sono

$\forall\lambda \quad \vec{q}_e^{(1)} = (0, 0)$.

se $\lambda = 1 \quad \vec{q}_e^{(2)} = \left(\frac{FR}{b}\sin\theta_e, \theta_e\right) \quad \forall\theta_e \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$





2) Reazioni esterne sul semidisco in C e B all'equilibrio.

Sappiamo, poiché i vincoli sono non olonomi passivi e bilateri, che la cerniera cilindrica in O esercita l'insieme delle reazioni reattivo

$$\mathcal{L}^{(B)} = \{ (O, \vec{\phi}), \vec{\mu} \} \quad \vec{\mu} \cdot \vec{e}_z = 0$$

Quindi, abbiamo 5 incognite scalari. Scriviamo le ECS su tutto il modello

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est, ett)} + \vec{\phi}_o = \vec{0} \\ \vec{M}_o^{(est, ett)} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

La II. ECS equivale a

$$\vec{\mu} = -\vec{M}_o^{(est, ett)}$$

dove

+ molla

$$\vec{M}_o^{(est, ett)} = \cancel{(G-O) \times (-2mg\vec{e}_z)} + (P-O) \times (\vec{F}^{(el)} + \vec{F}^{(\ldots)} - mg\,\vec{e}_z) - b\varphi \vec{e}_z =$$

$$= R\,\vec{e}_r \times (-cR(\cancel{\vec{e}_r} - e_z) + F\vec{e}_\varphi - mg\,\vec{e}_z) - b\varphi\,\vec{e}_z =$$

$$= R\,\vec{e}_r \times ((cR - mg)\vec{e}_z + F\,\vec{e}_\varphi) - b\varphi\,\vec{e}_z =$$

$$= R\left[-(cR - mg)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - F\,\vec{e}_\theta\right] - b\varphi\,\vec{e}_z$$

Dunque,

$$\vec{M}_O^{(est,att)} = R\left[\left(mg - CR\right)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - F\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right)\right] - b\varphi\,\vec{e}_z$$

(6.1) $$= -FR\cos\theta\,\vec{e}_\rho + R\left(mg - CR\right)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \left(FR\sin\theta - b\varphi\right)\vec{e}_z$$

Allora,

$$\vec{\mu} = FR\cos\theta\,\vec{e}_\rho - R\left(mg - CR\right)\sin\theta\,\vec{e}_\varphi - \left(FR\sin\theta - b\varphi\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{\mu}_{|\vec{q}_e} = FR\cos\theta_e\,\vec{e}_{\rho_{|\vec{q}_e}} - R\left(mg - CR\right)\sin\theta_e\,\vec{e}_{\varphi_{|\vec{q}_e}} - \cancel{\left(FR\sin\theta_e - b\varphi_e\right)\vec{e}_z}$$

Quindi,

$$\vec{\mu}_{|\vec{q}_e}(1) = FR\,\vec{e}_{\rho_{|\vec{q}_e(1)}}$$

$$\vec{\mu}_{|\vec{q}_e(2)} = +FR\cos\theta_e\,\vec{e}_{\rho_{|\vec{q}_e(2)}} - R\cancel{\left(mg - CR\right)}\sin\theta_e\,\vec{e}_{\varphi_{|\vec{q}_e(2)}} \qquad \lambda = 1$$

Dalla I ECS troviamo la $\vec{\phi}_B$:

$$\vec{\phi}_B = -\vec{R}^{(ext,att)}$$

$$\vec{R}^{(ext,att)} = 3m\vec{g} + \vec{F}^{(el)} + \vec{F}^{(foll)} + m\vec{g} = 4m\vec{g} + F\vec{e}_\varphi - cR(\vec{e}_r - \vec{e}_z)$$

$$= -3mg\vec{e}_z + F\vec{e}_\varphi - cR\left[\sin\theta\,\vec{e}_\xi + (\cos\theta - 1)\vec{e}_z\right]$$

Quindi

$$\vec{\phi}_B = -F\vec{e}_\varphi + 4mg\,e_z + cR\left[\sin\theta\,\vec{e}_\xi + (\cos\theta - 1)\vec{e}_z\right]$$

Dunque,

$$\vec{\phi}_B\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} = -F\,\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e^{(1)}} + 4mg\vec{e}_z = -F\vec{e}_y + 4mg\vec{e}_z$$

$$\vec{\phi}_B\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} = -F\,\vec{e}_\varphi\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} + 4mg\vec{e}_z + cR\left[\sin\theta_e\,\vec{e}_\xi\big|_{\vec{q}_e^{(2)}} + (\cos\theta_e - 1)\vec{e}_z\right]$$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. A tale segno calcoliamo

$$K = K^{(tel)} + K^{(P)} \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$K^{(tel)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot I_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_z\cdot I_O(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot I_O(\vec{e}_z)$$
$$= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_{Oz}$$

dove

$$I_{Oz} \overset{(1.4)}{=} I_{zz} = \frac{4}{3}\,mR^2$$ (momento d'inerzia del telaio risp. all'asse $(O,\vec{e}_z)$)

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}\,m\,|\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{\,(rel)} + \vec{v}_P^{\,(tr)} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \vec{\omega}\times(P-O) = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z\times R\,\vec{e}_r$$
$$= R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$= R\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$|\vec{v}_P|^2 = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Quindi

$$K = \frac{2}{3}\,mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,mR^2\left[\left(\frac{4}{3} + \sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\,[\dot{\varphi},\ \dot{\theta}]^T\, mR^2\begin{bmatrix}\left(\frac{4}{3}+\sin^2\theta\right) & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi}\\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

EL_φ : $\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = mR^2\left(\frac{4}{3}+\sin^2\theta\right)\dot\varphi$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = mR^2\left[\left(\frac{4}{3}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$mR^2\left[\left(\frac{4}{3}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\;\dot\theta\dot\varphi\right] \overset{(4.1)}{=} -b\varphi + FR\sin\theta$$

EL_θ : $\frac{\partial K}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta$, $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta$

$$\frac{\partial K}{\partial \theta} = \frac{mR^2}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2$$

$$mR^2\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\;\dot\varphi^2\right) \overset{(4.2)}{=} R\,(mg - cR)\sin\theta$$

Donque, le 2 EL sono

$$(9.1)\quad \begin{cases} EL_\varphi & mR^2\left[\left(\frac{4}{3}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right] = -b\varphi + FR\sin\theta \\ EL_\theta & m\cancel{R^2}\left(\ddot\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2\right) = \cancel{R}\,(mg - cR)\sin\theta \end{cases}$$

5) Linearizzazione delle EL intorno agli equilibri

Poiché la sollecitazione è non conservativa, dobbiamo usare la formula

$$(10.1) \quad A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0 \quad , \quad \text{dove} \quad \vec{x} = \frac{\vec{q}(t) - \vec{q}_e}{\varepsilon}$$

$$A = A(\vec{q}_e) = mR^2 \left[\begin{array}{c|c} \frac{4}{3} + \sin^2\theta_e & 0 \\ \hline 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$B_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Rightarrow \qquad C = -\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{array}\right]_{|\vec{q}_e} = -\left[\begin{array}{c|c} -b & FR\cos\theta_e \\ \hline 0 & R(mg - CR)\cos\theta_e \end{array}\right]$$

Allora, la (10.1) si scrive

$$mR^2 \left[\begin{array}{c|c} \frac{4}{3} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \left[\begin{array}{c|c} b & -FR\cos\theta_e \\ 0 & -R(mg - CR)\cos\theta_e \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè,

$$\begin{cases} mR^2\left(\frac{4}{3} + \sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b\,x_1 - FR\cos\theta_e\, x_2 = 0 \\ \\ mR^2\ddot{x}_2 - R(mg - CR)\cos\theta_e\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Donc que,

$\vec{q}_e^{(1)} = (0, 0)$ $\quad$ (11.1)

$$\begin{cases} \frac{4}{3} m R^2 \ddot{x}_1 + b x_1 - FR x_2 = 0 \\ m R \ddot{x}_2 - (mg - CR) x_2 = 0 \end{cases}$$

x $\lambda = 1$

$q_e^{(2)} = \left(\frac{FR}{b} \sin\theta_e, \theta_e\right)$

$\forall \theta_e \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\begin{cases} m R^2 \left(\frac{4}{3} + \sin^2\theta_e\right) \ddot{x}_1 + b x_1 - FR \cos\theta_e x_2 = 0 \\ \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale generale del sistema (11.3).
La II eq. (11.3) fornisce

$$x_2(t) = c_1 t + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Consideriamo l'omogenea associata alla I eq. (11.3)

$$m R^2 \left(\frac{4}{3} + \sin^2\theta_e \right) \ddot{x}_1 + b\, x_1 = 0$$

Il suo integrale generale è

$$\bar{x}_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{m R^2 \left(\frac{4}{3} + \sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1 \right)$$

Cerchiamo una soluzione particolare della (11.3) del tipo

$$x_1^{(p)} = c_3 t + c_4$$

Sostituendo nella (11.3) troviamo

$$b\,(c_3 t + c_4) = F R \cos\theta_e \,(c_1 t + c_2)$$

Dunque, le costanti soddisfano il sistema

$$\begin{cases} b\, c_3 = F R \cos\theta_e\, c_1 \\ b\, c_4 = F R \cos\theta_e\, c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_3 = \dfrac{F R \cos\theta_e}{b}\, c_1 \\ c_4 = \dfrac{F R \cos\theta_e}{b}\, c_2 \end{cases}$$

Dunque,

$$x_1^{(p)} = \frac{F R \cos\theta_e}{b} (c_1 t + c_2) = \frac{F R \cos\theta_e}{b}\, x_2$$

e

$$x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{m R^2 \left(\frac{4}{3} + \sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1 \right) + \frac{F R \cos\theta_e}{b} (c_1 t + c_2)$$

6) Ricaviamo la reazione in dinamica del telaio nel punto P. A tale scopo, scriviamo l'equazione dinamica per P

$$\vec{F}_P^{(el)} + \vec{F}_P^{(poll)} + m\vec{g} + \vec{\varphi}'_P = m\,\vec{a}_P$$

Risolvendo rispetto a $\vec{\varphi}'_P$, si trova

$$\vec{\varphi}'_P = -\left(\vec{F}_P^{(el)} + \vec{F}_P^{(poll)} - m\vec{g}\right) + m\,\vec{a}_P$$

Tenendo conto della (7.2) otteniamo,

$$\vec{\varphi}'_P = \left[(mg - CR)\cos\theta + CR\right]\vec{e}_z - (mg - CR)\sin\theta\,\vec{e}_\theta - F\vec{e}_\varphi + m\,\vec{a}_P$$

Dalla (14.5) ricaviamo l'espressione di $\vec{a}_P$ nella terna $(\vec{e}_z, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ tramite le (1.4).

$$\vec{a}_P = R\left[\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right]\left(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_r\right) +$$

$$+ R\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi - R\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\left(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r\right)$$

$$= R\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + R\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi -$$

$$- R\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_r$$

che coincide con l'espressione di $\vec{a}_P$ in coordinate sferiche se $\dot{R} = 0$. (Vedi Appunti)

Calcolo $\vec{a}_p$ considerando il moto di P relativo alla terna mobile $(O, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

(14.1) $$\vec{a}_p = \vec{a}_p^{\,(rel)} + \vec{a}_p^{\,(tr)} + \vec{a}_p^{\,(cor)}$$

(14.2) $$\vec{a}_p^{\,(rel)} = R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\,\vec{e}_r = R\left[\ddot{\theta}\left(\cos\theta\,\vec{e}_\rho - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) - \dot{\theta}^2\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)\right]$$

(14.3) $$\vec{a}_p^{\,(tr)} = \dot{\vec{\omega}}\times(P-O) + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times(P-O)\right)$$
$$= \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\,\vec{e}_r + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\,\vec{e}_r\right)$$
$$= R\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z \times \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$= R\sin\theta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - R\,\dot{\varphi}^2\sin\theta\,\vec{e}_\rho$$

(14.4) $$\vec{a}_p^{\,(cor)} = 2\,\vec{\omega}\times\vec{v}_p^{\,(rel)} = 2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = 2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi$$

(14.5) $$\vec{a}_p = R\Big[\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right)\vec{e}_\rho + \left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi - \left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_z\Big]$$

Dunque,

$$\vec{\varphi}'_P = \left[\cancel{-(mg-CR)\sin\theta + mR\left(\ddot\theta - \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2\right)}\right]\vec{e}_\theta +$$

$$+\left[-F + mR\left(\sin\theta\,\ddot\varphi + 2\cos\theta\,\dot\varphi\,\dot\theta\right)\right]\vec{e}_\varphi +$$

$$\left[+(mg-CR)\cos\theta + CR - mR\left(\dot\theta^2 + \sin^2\theta\,\dot\varphi^2\right)\right]\vec{e}_z$$

N.B. Si osservi che, come previsto, $\vec{\varphi}'_P \cdot \vec{e}_\theta = 0$. Infatti $\varphi'_P \cdot \vec{e}_\theta$ coincide con la EL_θ (9.1). Ciò spiega il significato fisico della EL_θ: è la proiezione lungo il versore $\vec{e}_\theta$ dell'equazione della dinamica del punto P.

Analogamente, si può verificare che la EL_φ è la proiezione della II ECD, applicata a tutto il modello, lungo il versore $\vec{e}_z$.