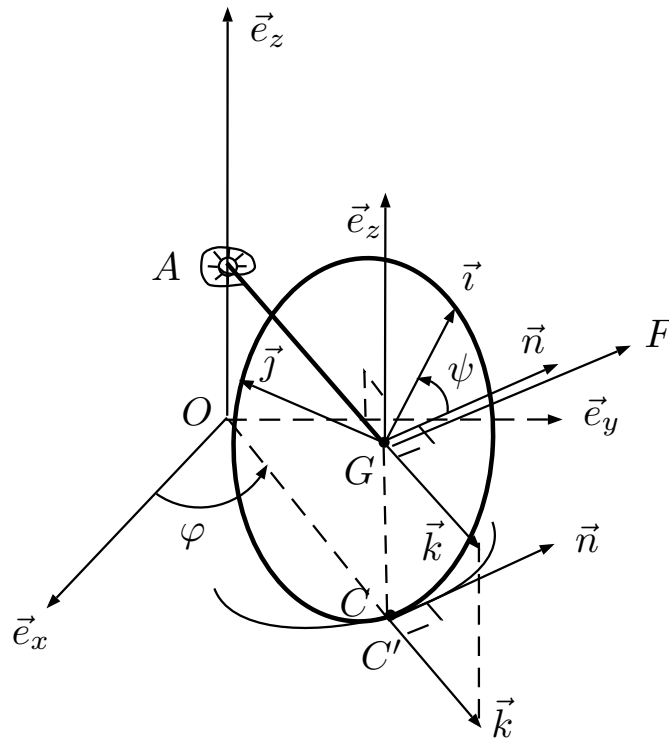


Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 20 gennaio 2020

(G. Tondo)



Un rigido è formato da un **disco** omogeneo, di massa m e raggio R , saldato nel suo centro G ad un asta AG di massa trascurabile e lunghezza d , il cui estremo A è vincolato ad un asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ mediante una cerniera sferica posta a quota R sull'asse $(O, \vec{e}_z)$. L'asta AG è ortogonale al piano del disco, il quale rotola senza strisciare sul piano orizzontale scabro passante per O e avente di coefficiente d'attrito radente statico pari a λ (si trascuri l'attrito di rotolamento). Sul rigido agisce una molla angolare di richiamo fissata in A e di costante elastica b , a riposo quando l'asta AG è parallela a $\vec{e}_x$ e una forza $F > 0$ applicata in G e parallela a $\vec{n}$. Tutti i vincoli sono supposti non dissipativi. Scelta come coordinata libera l'angolo φ della figura, si chiede di:

CINEMATICA.

- 1) Classificare il moto, il campo di velocità del rigido e determinarne l'asse d'istantanea rotazione.

STATICA.

- 2) Individuare le configurazioni di equilibrio del modello;
- 3) determinare le reazioni vincolari esterne sul disco nel punto A , in condizione di equilibrio limite;
- 4) determinare le reazioni vincolari sul disco nel punto di contatto C , in condizione di equilibrio limite.

DINAMICA.

- 5) Trovare il moto del rigido $\varphi(t)$ con le condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$;
- 6) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, calcolarne il valore per il moto ricavato al punto 4);

Tema del 20/01/2020

Il modello è un rigido R con 1 g.l., come si può verificare con il metodo dei congelamenti meccanici. Infatti, se si congela la rotazione dell'asta AB intorno all'asse $\vec{e}_z$, poiché il disco non può scivolare nel piano scabro, il rigido è del tutto congelato. Dunque, ammette una sola coordinata libera, che scegliamo come

$$(1) \quad -\pi < \varphi \leq \pi$$

Dunque, l'angolo di rotazione ^{ψ} del disco intorno al proprio asse, $\vec{K}$, deve poter esprimersi in funzione di φ . Per trovare tale equazione di vincolo, ricordiamo che, per ipotesi, il rigido rotola senza strisciare nel piano $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Tale vincolo di mobilità si esprime tramite l'equazione

$$(2) \quad \vec{v}_C = 0 \quad C \in R$$

Dalle formule di Poisson, segue che

$$(3) \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (C-A) = \vec{\omega} \times (C-A)$$

poiché A è un punto fisso, la velocità angolare $\vec{\omega}$ del rigido vincolato con il ruolo appoggio nel piano, vale

$$(4) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\psi} \vec{K}$$

del Teo di Frenet. Dunque,

$$(5) \quad \vec{v}_C = (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\psi} \vec{K}) \times (d \vec{K} - R \vec{e}_z) = d \dot{\varphi} \vec{n} - R \dot{\psi} (-\vec{n}) = (d \dot{\varphi} + R \dot{\psi}) \vec{n}$$

Allora, dal vincolo (2), segue che

$$(2.1) \quad d\dot{\varphi} + R\dot{\psi} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\dot{\psi} = -\frac{d}{R}\dot{\varphi}}$$

In questo caso, il vincolo di mobilità (2.1) è integrabile, cioè equivale al vincolo olonomo

$$(2.2) \quad \psi = -\frac{d}{R}\varphi + \varphi_0$$

Scegliamo la costante $\varphi_0 = 0$, in modo che $\varphi = 0$ corrisponda a $\psi = 0$, cioè $\vec{e}_{\varphi=0} = \vec{e}_y$. Dunque, l'eq. di vincolo fra i due angoli φ e ψ risulta

$$(2.3) \quad \psi = -\frac{d}{R}\varphi$$

Inoltre, sostituendo la (2.1) nella (4), si trova l'espressione di $\vec{\omega}$ per il rigido in puro rotolamento nel piano

$$(2.4) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z - \dot{\psi} \vec{K} = \dot{\varphi} \left(\vec{e}_z - \frac{d}{R} \vec{K} \right)$$

Possiamo ora rispondere alla domanda 1). Poiché durante il moto si conserva l'angolo fra l'asse fino $(O, \vec{e}_z)$ e quello solidale a R $(A, \vec{K})$, il moto del rigido è un caso particolare ($l=1$) di moto di precessione. Inoltre, poiché A è un punto fisso, l'invariante scalare statico $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$, quindi il campo è rotatorio. Dunque, l'axe di Morin degenera nell' AIP che necessariamente passa per A ma anche per C , dato che $\vec{v}_C = 0$. Quindi, l'AIP è l'unica retta passante per A e C . Dunque, $\vec{\omega} \parallel (A-C)$ ed è diretta come $\text{vers}(A-C)$.

Statica

- 2) Poiché il modello è una macchina semplice con vincoli non dissipativi e ~~non dissipativi non sono~~, per il calcolo degli equilibri utilizziamo il metodo dell'energia potenziale. Sappiamo che

$$V^{(molla)} = \frac{1}{2} b \varphi^2, \quad V^{(peso)} = - m \vec{g} \cdot \vec{x}_G$$

mentre

$$Q^{(P_{tot})} = \vec{F}_0 \cdot \frac{\partial \vec{x}_G}{\partial \varphi}$$

Allora,

$$\vec{x}_G = (G-O) = (G-C) + (C-O) = R \vec{e}_2 + d \vec{k}$$

$$\frac{\partial \vec{x}_G}{\partial \varphi} = d \frac{\partial \vec{k}}{\partial \varphi} = d \vec{n}$$

Quindi,

$$Q^{(P_{tot})} = F \vec{n} \cdot d \vec{n} = F d$$

$$V^{(P_{tot})} = - \int F d \, d\varphi = - F d \varphi$$

Dunque

$$V^{(tot)} = \frac{1}{2} b \varphi^2 + \cancel{mgR} - F d \varphi$$

$$Q^{(tot)} = - \frac{dV}{d\varphi} = - b \varphi + F d$$

Quindi, l'equazione pure di equilibrio è

$$(4.1) \quad -b\varphi + Fd = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_e = \frac{Fd}{b}$$

ed $\exists!$ la configurazione di equilibrio (4.1).

3) Scriviamo le ECS, tenendo conto che i vincoli in A e in C esercitano l'insieme delle reazioni vincolari

$$\mathcal{L} = \{ (A, \vec{\Phi}), (C, \vec{\Psi}) \}$$

con $\vec{\Psi}_C$ che soddisfa la relazione di Coulomb

$$(4.2) \quad \left| \frac{\vec{\Psi}_T}{\vec{\Psi}_N} \right| \leq \lambda \Leftrightarrow \left| \frac{\vec{e}_2 \times (\vec{\Psi}_C \times \vec{e}_2)}{\vec{\Psi}_C \cdot \vec{e}_2} \right| \leq \lambda$$

Dunque, dobbiamo risolvere il sistema delle ECS

$$(4.3) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(ext, ext)} + \vec{\Phi}_A + \vec{\Psi}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(ext, ext)} + (C-A) \times \vec{\Psi}_C = \vec{0} \end{cases}$$

insieme con la (4.2), tenendo conto delle (4.1).

Come tema di riferimento, conviene usare la terna stereonormale $(\vec{k}, \vec{n}, \vec{e}_2)$ invece che quella fissa.

Su tale terna, denotiamo con

$$(4.4) \quad \vec{\Phi}_A = \phi_k \vec{k} + \phi_n \vec{n} + \phi_2 \vec{e}_2$$

$$(4.5) \quad \vec{\Psi}_C = \psi_k \vec{k} + \psi_n \vec{n} + \psi_2 \vec{e}_2$$

le soluzioni della II ECS (4.3) sono

$$(5.1) \quad \vec{\psi}_c = \frac{C-A}{|C-A|^2} \times M_A^{(ext, stat)} + \frac{f}{|C-A|^2} (C-A)$$

dove f è un parametro reale da determinare.
Per trovare f , dobbiamo utilizzare la (4.2).
Intanto, calcoliamo

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \vec{M}_A^{(ext, stat)} &= (C-A) \times (\vec{F} + m\vec{g}) - b\varphi \vec{e}_z = \\ &= F d \vec{e}_z + m g d \vec{u} - b\varphi \vec{e}_z = \\ &= (F d - b\varphi) \vec{e}_z + m g d \vec{u} \end{aligned}$$

e osserviamo che

$$(5.3) \quad \vec{M}_A^{(ext, stat)} \Big|_{\vec{\varphi}=\vec{0}} = m g d \vec{u}$$

Allora

$$(5.4) \quad \begin{aligned} \vec{\psi}_{c/\vec{\varphi}} &= \frac{d\vec{k} - R\vec{e}_z}{d^2 + R^2} \times m g d \vec{u} + \frac{f}{d^2 + R^2} (d\vec{k} - R\vec{e}_z) \\ &= \frac{1}{d^2 + R^2} \left(m g d^2 \vec{k} \times \vec{u} - m g d R \vec{e}_z \times \vec{u} + f d \vec{k} - f R \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{1}{d^2 + R^2} \left(m g d^2 \vec{e}_z + m g d R \vec{k} + f d \vec{k} - f R \vec{e}_z \right) \\ &= \frac{1}{d^2 + R^2} \left[(m g R + f) d \vec{k} + (m g d^2 - f R) \vec{e}_z \right] \end{aligned}$$

Imponiamo la condizione di equilibrio limite (4.2) per la reazione vincolare ψ_c

$$(6.1) \quad \frac{|\psi_k|}{|\psi_z|} = \lambda \Leftrightarrow \frac{|\psi_k|}{\psi_z} = \lambda$$

poiché ψ_z può essere solo positiva, essendo il vincolo d'appoggio unilatero. Allora, esaminiamo 2 casi.

$$a) \psi_k > 0 \Rightarrow \psi_k = \lambda \psi_z \Leftrightarrow \frac{(mgR + f)d}{d^2 + R^2} = \lambda \frac{(mgd^2 - fR)}{d^2 + R^2}$$

Risolviemo tale equazione rispetto al parametro f e troviamo

$$(6.2) \quad f = mgd \frac{\lambda d - R}{\lambda R + d}$$

Sostituendo nella (5.4) troviamo

$$(6.3) \quad \psi_k = \frac{d}{d^2 + R^2} \left(mgR + mgd \frac{\lambda d - R}{\lambda R + d} \right) = \frac{mgd}{d^2 + R^2} \left(\frac{\lambda R^2 + dR + \lambda d^2 - dR}{\lambda R + d} \right)$$

$$= \lambda \frac{mgd}{\lambda R + d} = \frac{\lambda mg}{\frac{\lambda R}{d} + 1}$$

$$(6.4) \quad \psi_z = \frac{1}{d + R^2} \left(mgd^2 - mgdR \frac{\lambda d - R}{\lambda R + d} \right) =$$

$$= \frac{mgd}{d + R^2} \left(\frac{d - R \frac{\lambda d - R}{\lambda R + d}}{1} \right) = \frac{mgd}{d^2 + R^2} \frac{\lambda R d + d^2 - \lambda R d + R^2}{\lambda R + d} =$$

$$= \frac{mgd}{\lambda R + d} = \frac{mg}{\frac{\lambda R}{d} + 1} > 0 \quad \text{sempre. Dunque}$$

$$(6.5) \quad \vec{\psi}_c = \frac{mg}{1 + \frac{\lambda R}{d}} \left(\lambda \vec{k} + \vec{e}_z \right)$$

$$b) \psi_k < 0 \Rightarrow -\psi_k = \lambda \psi_z \Leftrightarrow -\frac{(mgR + f)d}{d^2 + R^2} = \lambda \frac{(mgd^2 - fR)}{d^2 + R^2}$$

Risolviemo tale equazione rispetto ad f e troviamo

$$(7.1) f = mgd \frac{\lambda d + R}{\lambda R - d}$$

Sostituendo nella (5.6) troviamo

$$(7.2) \psi_k = \frac{d}{d^2 + R^2} \left(mgR + mgd \frac{\lambda d + R}{\lambda R - d} \right) = \frac{mgd}{d^2 + R^2} \left(R + d \frac{\lambda d + R}{\lambda R - d} \right) =$$

$$= \frac{mgd}{d^2 + R^2} \left(\frac{\lambda R^2 - dR + \lambda d^2 - Rd}{\lambda R - d} \right) = \lambda \frac{mgd}{\lambda R - d} = \lambda \frac{mg}{\lambda R - 1 \over d}$$

$$(7.3) \psi_z = \frac{1}{d^2 + R^2} \left(mgd^2 - mgdR \frac{\lambda d + R}{\lambda R - d} \right) = \frac{mgd}{d^2 + R^2} \left(d - R \frac{\lambda d + R}{\lambda R - d} \right) =$$

$$= \frac{mgd}{d^2 + R^2} \frac{\lambda Rd - d^2 - \lambda Rd - R^2}{\lambda R - d} = -\frac{mgd}{\lambda R - d} = \frac{mg}{1 - \lambda R \over d}$$

Poichè ψ_z deve essere positiva, la (7.3) ha senso se

$$1 - \lambda \frac{R}{d} > 0 \Leftrightarrow \lambda < \frac{d}{R}$$

Donque, sotto questa ipotesi

$$\vec{\psi}_c = \frac{mg}{1 - \lambda \frac{R}{d}} \left(-\lambda \vec{k} + \vec{e}_z \right)$$

Determiniamo lo $\vec{\phi}_n$ delle I ECS (4.3).

$$\vec{\phi}_n = -\vec{R}^{(ext, ext)} - \vec{\psi}_c = -F\vec{n} + mg\vec{e}_z - \vec{\psi}_c$$

Allora,

$$\forall \lambda > 0 \quad \vec{\phi}_n = -F\vec{n} + mg\vec{e}_z - \frac{mg}{1 + \lambda \frac{R}{d}} (\lambda \vec{k} + \vec{e}_z) =$$

$$= -\frac{\lambda mg}{1 + \lambda \frac{R}{d}} \vec{k} - F\vec{n} + mg \left(1 - \frac{1}{1 + \lambda \frac{R}{d}} \right) \vec{e}_z$$

$$= -\frac{\lambda mg}{1 + \lambda \frac{R}{d}} \vec{k} - F\vec{n} + \lambda mg \frac{R}{d} \frac{1}{1 + \lambda \frac{R}{d}} \vec{e}_z$$

$$\vec{\psi}_c = \frac{mg}{1 + \lambda \frac{R}{d}} (\lambda \vec{k} + \vec{e}_z)$$

se $\lambda < \frac{d}{R}$ $\exists$ anche l'altra soluzione

$$\vec{\phi}_n = -F\vec{n} + mg\vec{e}_z - \frac{mg}{1 - \lambda \frac{R}{d}} (-\lambda \vec{k} + \vec{e}_z)$$

$$= +\frac{\lambda mg}{1 - \lambda \frac{R}{d}} \vec{k} - F\vec{n} + mg \left(1 - \frac{1}{1 - \lambda \frac{R}{d}} \right) \vec{e}_z$$

$$= \frac{\lambda mg}{1 - \lambda \frac{R}{d}} \vec{k} - F\vec{n} - \lambda mg \frac{R}{d} \frac{1}{1 - \lambda \frac{R}{d}} \vec{e}_z$$

$$\vec{\psi}_c = \frac{mg}{1 - \lambda \frac{R}{d}} (-\lambda \vec{k} + \vec{e}_z)$$

dinamica

- 5) Poiché i vincoli sono non dissipativi, nella configurazione di confine possiamo utilizzare la E.L. relativa a φ . A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del rigido come

$$(9.1) \quad K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_C(\vec{\omega}) \quad C \in \text{AIR}$$

Cometerna di riferimento per calcolare la matrice d'inerzia $\mathbb{I}_C$, possiamo scegliere la terma $(C, \vec{n}, \vec{e}_2, \vec{k})$. Essa non è una terma solidale a R , come invece $(C, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Tuttavia è una terma principale d'inerzia poiché $(C, \vec{k})$ e $(C, \vec{e}_2)$ sono assi di simmetria materiale per R .

Inoltre, i momenti d'inerzia rispetto agli assi di tale terma sono indipendenti del tempo per ragioni di simmetria materiale. In fatti, utilizzando il Tes. di Huygens-Steiner si trova

$$\vec{n} \cdot \mathbb{I}_C(\vec{n}) = I + m R^2 = \frac{5}{4} m R^2$$

$$(9.2) \quad \vec{e}_2 \cdot \mathbb{I}_C(\vec{e}_2) = \bar{I} = \frac{1}{4} m R^2$$

$$\vec{k} \cdot \mathbb{I}_C(\vec{k}) = 2I + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

Allora

$$(9.3) \quad K = \frac{1}{2} \left[0, \dot{\varphi}, -\frac{d\dot{\varphi}}{R} \right] m R^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \dot{\varphi} \\ -\frac{d\dot{\varphi}}{R} \end{bmatrix} = \frac{m R^2}{2} \left[0, \dot{\varphi}, -\frac{d\dot{\varphi}}{R} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{4} \dot{\varphi} \\ -\frac{3}{2} \frac{d\dot{\varphi}}{R} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \left(\frac{1}{4} \dot{\varphi}^2 + \frac{3}{2} \frac{d^2}{R^2} \dot{\varphi}^2 \right) = \frac{1}{2} m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{3}{2} d^2 \right) \dot{\varphi}^2$$

Allora

$$(10.1) \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{3}{2} d^2 \right) \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{3}{2} d^2 \right) \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

L'eq. di Lagrange è

$$(10.2) \quad m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{3}{2} d^2 \right) \ddot{\varphi} = -b\varphi + Fd$$

Il problema di Cauchy associato è

$$(10.3) \quad \begin{cases} m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{3}{2} d^2 \right) \ddot{\varphi} + b\varphi = Fd \\ \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale è dato da

$$(10.4) \quad \varphi(t) = A \cos \left(\sqrt{\frac{b}{a}} t + \varphi_0 \right) + \frac{Fd}{b} \quad a := m \left(\frac{R^2}{4} + \frac{3}{2} d^2 \right)$$

Imponendo le condizioni iniziali si determinano le costanti A e φ_0 . In fatti:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &: \begin{cases} A \cos \varphi_0 + \frac{Fd}{b} = 0 \\ -A \sqrt{\frac{b}{a}} \sin \varphi_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{Fd}{b} \\ \varphi_0 = 0 \end{cases} \\ \dot{\varphi}(0) &: \end{aligned}$$

Quindi, l'unica soluzione di (8.3) è

$$(10.5) \quad \varphi(t) = \frac{Fd}{b} \left(1 - \cos \sqrt{\frac{b}{a}} t \right)$$

6) Il modello è una macchina semplice soggetta a vincoli olonami, fissi e non dissipativi e sollecitazione conservativa. Quindi l'energia meccanica si conserva. E' da vedere

$$\begin{aligned}
 (11.1) \quad E = K + V &= \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} b \varphi^2 - F d \varphi = \\
 &= \frac{1}{2} a \dot{\varphi}^2(0) + \frac{1}{2} b \varphi^2(0) - F d \varphi(0) \stackrel{(8.3)}{=} 0
 \end{aligned}$$