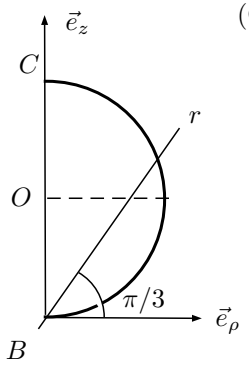
Compito di Meccanica Razionale

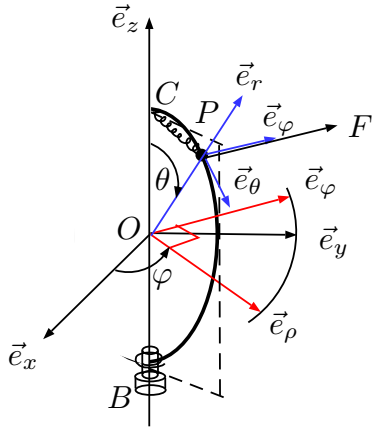
Trieste, 28 giugno 2019

(G. Tondo)



É dato un semianello rigido e omogeneo, di massa $3m$ e raggio R.

1) Determinarne il momento d'inerzia rispetto all'asse r passante per il punto B e inclinato di $\frac{\pi}{3}$ rispetto all'asse $(B, \vec{e}_\rho)$.



Il semianello è vincolato ad un asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ mediante una cerniera cilindrica liscia fissata in B. Sul semianello, è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P, di massa m, collegato a una molla, di costante elastica c, che ha l'altro estremo fissato nell'estremo C del semianello. Inoltre, su P agisce una forza $F\vec{e}_\varphi$. Sul semianello agisce una molla angolare di richiamo fissata in B e di costante elastica b. Scelte come coordinate libere gli angoli φ e θ di figura, si chiede di:

STATICA.

2) determinare le configurazioni di equilibrio del modello in funzione del parametro $\lambda = \frac{mg}{cR}$;

3) determinare l'insieme delle reazioni vincolari esterne sul semianello nel punto B, all'equilibrio;

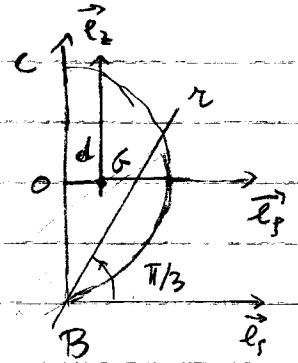
DINAMICA.

4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e trovare l'integrale generale intorno a una sola configurazione di equilibrio;

6) calcolare le reazioni vincolari del semianello sul punto materiale P durante il moto.

Tema del 28/6/2019



(1.1) $\vec{x}_G = (G-O) = d\,\vec{e}_3$

dove, per il I teo di Guldino

(1.2) $d = \frac{2}{\pi} R$

1) Il momento d'inerzia del disco rispetto all'asse $(O, \vec{e}_3)$ si può calcolare come

(1.3) $I_z = \vec{u} \cdot I_B(\vec{u})$ $\quad \vec{u}$: versore di z

Dunque, ci serve la matrice d'inerzia rispetto al punto B. Per calcolarla, usiamo il teo di H-S. Fissata la base $\mathcal{B}'' = (\vec{e}_3, \vec{e}_2, -\vec{e}_1)$, osserviamo che $(G, \mathcal{B}'')$ è una TPI(G). Allora

(1.4) $$[I_G]^{\mathcal{B}''} = \begin{bmatrix} I_{11} & 0 & 0 \\ 0 & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11}+I_{22} \end{bmatrix}$$

$$I_{11} = \frac{1}{2}(3m)R^2 = \frac{3}{2}mR^2$$

$$I_{22} = \frac{1}{2}(3m)R^2 = 3md^2$$

Dunque,

$$[I_B]^{\mathcal{B}''} = [I_G]^{\mathcal{B}''} + 3m \begin{bmatrix} R^2 & -dR & 0 \\ -dR & d^2 & 0 \\ 0 & 0 & d^2+R^2 \end{bmatrix}$$

(1.5) $$= \left[\begin{array}{c|c|c} I_{11}+3mR^2 & -3mdR & 0 \\ \hline -3mdR & I_{22}+3md^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & I_{11}+I_{22}+3m(d^2+R^2) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c|c} \frac{9}{2}mR^2 & -\frac{6}{\pi}mR^2 & 0 \\ \hline -\frac{6}{\pi}mR^2 & \frac{3}{2}mR^2 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 6mR^2 \end{array}\right]$$

Allora, poiché il versore di r è $\vec{u} = \frac{1}{2}\left(\vec{e}_y + \sqrt{3}\vec{e}_z\right)$, risulta

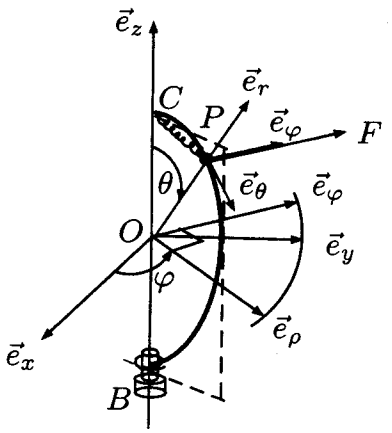
$$I_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1, \sqrt{3}, 0\end{bmatrix} mR^2 \begin{bmatrix} \frac{9}{2} & -\frac{6}{11} & 0 \\ -\frac{6}{11} & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \frac{1}{2}\begin{bmatrix}1 \\ \sqrt{3} \\ 0\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} mR^2 \begin{bmatrix}1, \sqrt{3}, 0\end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{9}{2} - \frac{6\sqrt{3}}{11} \\ -\frac{6}{11} + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4} mR^2 \left(\frac{9}{2} - \frac{6\sqrt{3}}{11} - \frac{6\sqrt{3}}{11} + \frac{9}{2} \right)$$

$$(1.6) = \frac{1}{4} mR^2 2 \left(\frac{9}{2} - \frac{6\sqrt{3}}{11} \right) = 3 mR^2 \left(\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{11} \right)$$

Il modello è formato da un rigido, il semianello con asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$, e il punto materiale P vincolato al semianello. Con il metodo dei coefficienti ricorrenti si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi può essere descritto dalle coordinate lagrangiane della figura



$$\varphi \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Consideriamo le 3 basi:

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: "intermedia" (solidale all'anello)

$(\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$: solidale al punto P

$$(2.1)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.2)\begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(2.3)\begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z \end{cases} \qquad (2.4)\begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_r \end{cases}$$

Quindi,

$$P - O = R\,\vec{e}_r = R\left(\sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z\right)$$

$$P-B=(P-O)+(O-B)=R\vec{e}_r+R\vec{e}_z=R\left(\vec{e}_r+\vec{e}_z\right)=R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho+(\cos\theta+1)\vec{e}_z\right)$$

$$P-C=(P-O)+(O-C)=R\left(\vec{e}_r-\vec{e}_z\right)=R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho+(\cos\theta-1)\vec{e}_z\right)$$

$$|P-C|^2=R^2\left[\sin^2\theta+(\cos\theta-1)^2\right]=2R^2(1-\cos\theta)$$

$$\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi}=R\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\varphi}=R\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho+\cos\theta\,\vec{e}_z\right)=R\left(\sin\theta\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}\right)=R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\theta}=R\frac{\partial\vec{e}_r}{\partial\theta}=R\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\vec{e}_\rho+\cos\theta\,\vec{e}_z\right)=R\left(\cos\theta\vec{e}_\rho-\sin\theta\vec{e}_z\right)=R\,\vec{e}_\theta$$

La sollecitazione dovuta al peso e alle molle è conservativa, quindi ammette energia potenziale

$$V(\varphi,\theta)=-3m\vec{g}\cdot\vec{x}_G-m\vec{g}\cdot\vec{x}_P+\frac{1}{2}b\varphi^2+\frac{1}{2}c\,\overline{PC}^2$$

$$=3mg\vec{e}_z\cdot\vec{e}_z+mg\vec{e}_z\cdot R\left(\sin\theta\vec{e}_\rho+\cos\theta\vec{e}_z\right)+\frac{1}{2}b\varphi^2+\frac{1}{2}cR^2(1-\cos\theta)$$

$$\cong(mgR-cR^2)\cos\theta+\frac{1}{2}b\varphi^2$$

Calcoliamo le componenti lagrangiane della forza $\vec{F}$ in P.

$$Q_\varphi^{(nc)}=\vec{F}_P\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi}=F\vec{e}_\varphi\cdot R\sin\theta\,\vec{e}_\varphi=FR\sin\theta$$

$$Q_\theta^{(nc)}=F\vec{e}_\varphi\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\theta}=F\vec{e}_\varphi\cdot R\,\vec{e}_\theta=0$$

Dunque

$$\frac{\partial Q_\varphi^{(nc)}}{\partial\theta}\neq\frac{\partial Q_\theta^{(nc)}}{\partial\varphi}\Rightarrow\text{sollecitazione non conservativa}$$

Inoltre

$$Q_\varphi^{(con)}=-\frac{\partial(-V)}{\partial\varphi}=-b\varphi$$

$$Q_\theta^{(con)}=\frac{\partial(-V)}{\partial\theta}=R(mg-cR)\sin\theta$$

Allora

(4.1) $Q_\varphi = -b\varphi + FR\sin\theta$

(4.2) $Q_\theta = R(mg - cR)\sin\theta$

e le equazioni pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -b\varphi + FR\sin\theta = 0 \\ (mg - cR)\sin\theta = 0 \end{cases}$$

La II eq. pura di equilibrio ha soluzioni, posto $\lambda = \frac{mg}{cR}$

$\theta = 0$, $\theta = \bar{\pi}$ $\forall \lambda$, $\forall \theta$ se $\lambda = 1$

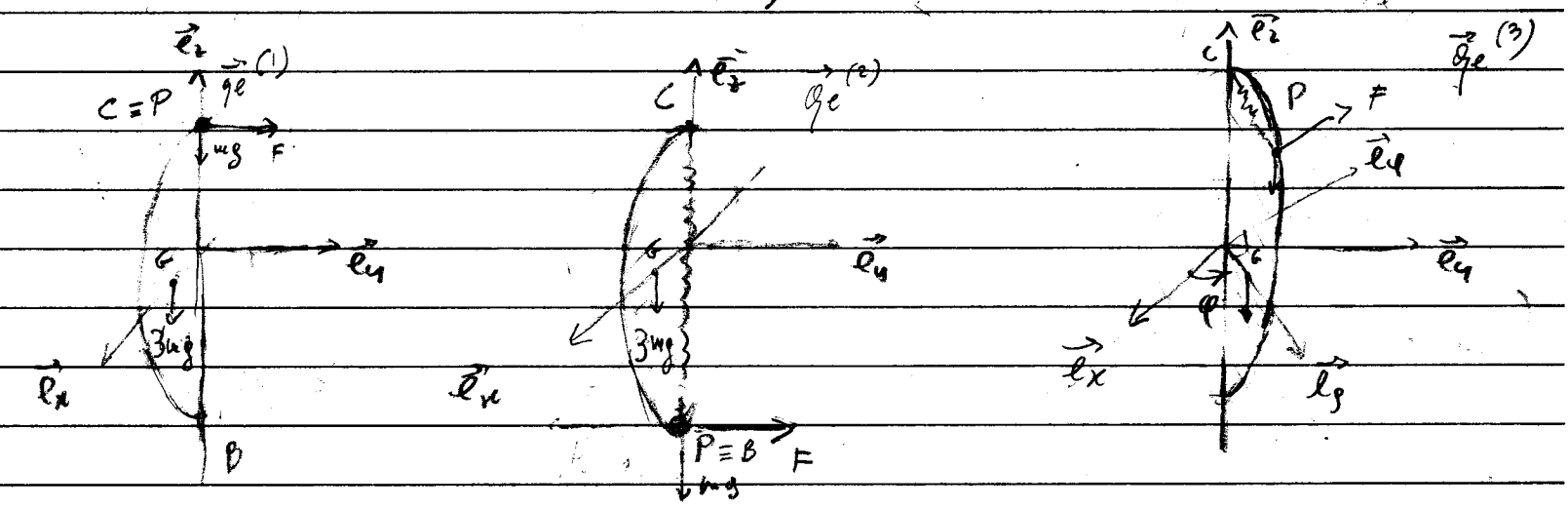
Sostituendo nella I eq. pura di equilibrio si trova

$$\varphi_e = \frac{FR}{b}\sin\theta_e$$

Dunque, le configurazioni di equilibrio $\vec{q}_e = (\varphi_e, \theta_e)$ sono

$\forall \lambda \quad \vec{q}_e^{(1)} = (0, 0)$, $\vec{q}_e^{(2)} = (0, \bar{\pi})$

se $\lambda = 1 \quad \vec{q}_e^{(3)} = \left(\frac{FR}{b}\sin\theta_e, \theta_e\right) \quad \forall \theta_e \in]0, \bar{\pi}[$



2) Reazioni esterne nel semidisco in C e B all'equilibrio.

Sappiamo, poiché i vincoli sono non olinomiali e bilateri, che la cerniera cilindrica in B esercita l'insieme delle reazioni reattivo

$$\mathcal{L}^{(B)} = \{ (B, \vec{\phi}), \vec{\mu} \} \quad \vec{\mu} \cdot \vec{e}_b = 0$$

Quindi, abbiamo 5 incognite scalari. Scriviamo le ECS su tutto il modello

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,est)} + \vec{\phi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_B^{(est,est)} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$

La II ECS equivale a

$$\vec{\mu} = -\vec{M}_B^{(est,est)}$$

dove

$$\vec{M}_B^{(est,est)} = (G-B) \times (-3mg\vec{e}_z) + (P-B) \times \left(\vec{F}^{(est)} - mg\vec{e}_z \right) - b\varphi \vec{e}_z =$$

$$= \left(d\vec{e}_\rho + R\vec{e}_z \right) \times (-3mg\vec{e}_z) + R\left(\vec{e}_z + \vec{e}_z \right) \times \left(F\vec{e}_\varphi - mg\vec{e}_z \right) - b\varphi \vec{e}_z =$$

$$= 3mgd\vec{e}_\varphi + R\left(\sin\theta \vec{e}_\rho + (1+\cos\theta)\vec{e}_z \right) \times \left[F\vec{e}_\varphi - mg\vec{e}_z \right] - b\varphi \vec{e}_z =$$

$$= 3mgd\vec{e}_\varphi + FR\sin\theta \, \vec{e}_\rho \times \vec{e}_\varphi - mgR\sin\theta \, \vec{e}_\rho \times \vec{e}_z + FR(1+\cos\theta)\vec{e}_z \times \vec{e}_\varphi + -b\varphi \vec{e}_z$$

Dunque,

$$M_B^{(ext,att)} = \underline{\qquad\qquad} - 3mgd\,\vec{e}_\varphi + FR\sin\theta\,\vec{e}_z + 4mgR\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$- FR(1+\cos\theta)\,\vec{e}_\rho - b\varphi\,\vec{e}_z$$

(6.1)
$$= -FR(1+\cos\theta)\,\vec{e}_\rho + mgR\left(\frac{6}{\pi} + \sin\theta\right)\vec{e}_\varphi +$$

$$+\left(FR\sin\theta - b\varphi\right)\vec{e}_z$$

Allora,

$$\vec{\mu} = FR(1+\cos\theta)\,\vec{e}_\rho - mgR\left(\frac{6}{\pi} + \sin\theta\right)\vec{e}_\varphi - \left(FR\sin\theta - b\varphi\right)\vec{e}_z$$

$$\vec{\mu}_{|\vec{q}_e} = FR(1+\cos\theta_e)\,\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e} - mgR\left(\frac{6}{\pi} + \sin\theta_e\right)\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e} - \left(FR\sin\theta_e - b\varphi_e\right)\vec{e}_z$$

Quindi,

$$\vec{\mu}_{|\vec{q}_e(1)} = 2FR\,\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e(1)} - mgR\frac{6}{\pi}\,\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e(1)} = 2FR\vec{e}_x - mgR\frac{6}{\pi}\,\vec{e}_y$$

$$\vec{\mu}_{|\vec{q}_e(2)} = -mgR\frac{6}{\pi}\,\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e(2)} = -mgR\frac{6}{\pi}\,\vec{e}_y$$

$$\vec{\mu}_{|\vec{q}_e(3)} = +FR(1+\cos\theta_e)\,\vec{e}_{\rho|\vec{q}_e(3)} - mgR\left(\frac{6}{\pi} + \sin\theta_e\right)\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e(3)}$$

Dalle I ECS troviamo la $\vec{\phi}_B$:

$$\vec{\phi}_B = -\vec{R}^{(ext,eq)}$$

$$\vec{R}^{(ext,eq)} = 3m\vec{g} + \vec{F}^{(peso)} + m\vec{g} = 4m\vec{g} + F\vec{e}_\varphi$$

$$= -4mg\vec{e}_z + F\vec{e}_\varphi$$

Quindi

$$\vec{\phi}_B = -F\vec{e}_\varphi + 4mg\,e_z$$

Dunque,

$$\vec{\phi}_{B|\vec{q}_e^{(1)}} = -F\,\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(1)}} + 4mg\vec{e}_z = -F\vec{e}_y + 4mg\vec{e}_z$$

$$\vec{\phi}_{B|\vec{q}_e^{(2)}} = -F\,\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(2)}} + 4mg\vec{e}_z = -F\vec{e}_y + 4mg\vec{e}_z$$

$$\vec{\phi}_{B|\vec{q}_e^{(3)}} = -F\,\vec{e}_{\varphi|\vec{q}_e^{(3)}} + 4mg\vec{e}_z$$

4) Scriviamo le eq. di Lagrange non conservative. A tale scopo calcoliamo

$$K = K^{(a)} + K^{(r)} \qquad \vec{\omega} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z$$

$$K^{(a)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot I_O(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \cdot I_O(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z \cdot I_O(\vec{e}_z)$$
$$= \frac{1}{2}\,\dot{\varphi}^2 I_{Oz}$$

dove

$$I_{Oz} = \frac{1}{2}\left(3mR^2\right) \qquad \text{(momento d'inerzia del semianello rs. al suo diametro)}$$

$$K^{(r)} = \frac{1}{2}\,m\,|\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \vec{v}_P^{(rel)} + \vec{v}_P^{(tr)} = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \vec{\omega}\times(P-O) = R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\vec{e}_r$$
$$= R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + R\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$
$$= R\left(\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi\right)$$

$$|\vec{v}_P|^2 = R^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$

Quindi

$$K = \frac{3}{4}\,mR^2\dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2}\,mR^2\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)$$
$$= \frac{1}{2}\,mR^2\left[\left(\frac{3}{2} + \sin^2\theta\right)\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right]$$
$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}\dot{\varphi} & \dot{\theta}\end{bmatrix} mR^2 \begin{bmatrix}\left(\frac{3}{2}+\sin^2\theta\right) & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\varphi} \\ \dot{\theta}\end{bmatrix}$$

EL_φ : $\dfrac{\partial K}{\partial \dot\varphi} = mR^2\left(\dfrac{3}{2}+\sin^2\theta\right)\dot\varphi$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot\varphi}\right) = mR^2\left[\left(\dfrac{3}{2}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right]$

$\dfrac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$

$mR^2\left[\left(\dfrac{3}{2}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\;\dot\theta\dot\varphi\right] \overset{(4.1)}{=} -b\varphi + FR\sin\theta$

EL_θ : $\dfrac{\partial K}{\partial \dot\theta} = mR^2\dot\theta$, $\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial K}{\partial \dot\theta}\right) = mR^2\ddot\theta$

$\dfrac{\partial K}{\partial \theta} = \dfrac{mR^2}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2$

$mR^2\left(\ddot\theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2\right) \overset{(4.2)}{=} R\left(mg - cR\right)\sin\theta$

Donc, les 2 EL sont

(9.1)
$$\begin{cases} EL_\varphi & mR^2\left[\left(\dfrac{3}{2}+\sin^2\theta\right)\ddot\varphi + \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi\right] = -b\varphi + FR\sin\theta \\ EL_\theta & mR^2\left(\ddot\theta - \dfrac{1}{2}\sin 2\theta\,\dot\varphi^2\right) = R\left(mg - cR\right)\sin\theta \end{cases}$$

5) Linearizzazione delle EL in torno agli equilibri

Poiché la sollecitazione è non conservativa, dobbiamo usare la formula

(10.1) $A\ddot{\vec{x}} + B\dot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0$, dove $\vec{x} = \frac{\vec{q}(t) - \vec{q}_e}{\varepsilon}$

$$A = A(\vec{q}_e) = mR^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j} = 0$$

$$C_{ij} = -\frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Rightarrow \qquad C = \begin{bmatrix} \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\varphi}{\partial \theta} \\ \frac{\partial Q_\theta}{\partial \varphi} & \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} \end{bmatrix}_{|\vec{q}_e} = \begin{bmatrix} -b & FR\cos\theta_e \\ 0 & R(mg - cR)\cos\theta_e \end{bmatrix}$$

Allora, la (10.1) si scrive

$$mR^2 \begin{bmatrix} \frac{3}{2} + \sin^2\theta_e & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & -FR\cos\theta_e \\ 0 & -R(mg - cR)\cos\theta_e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

cioè,

$$\begin{cases} mR^2\left(\frac{3}{2} + \sin^2\theta_e\right)\ddot{x}_1 + b\,x_1 - FR\cos\theta_e\, x_2 = 0 \\ mR^2\ddot{x}_2 - R(mg - cR)\cos\theta_e\, x_2 = 0 \end{cases}$$

Dunque,

$\vec{q}_e^{(1)} = (0, 0)$ (11.1)

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m R^2 \ddot{x}_1 + b x_1 - FR x_2 = 0 \\ m R \ddot{x}_2 - (mg - CR) x_2 = 0 \end{cases}$$

$\vec{q}_e^{(2)} = (0, \pi)$ (11.2)

$$\begin{cases} \frac{3}{2} m R^2 \ddot{x}_1 + b x_1 + FR x_2 = 0 \\ m R \ddot{x}_2 + (mg - CR) x_2 = 0 \end{cases}$$

$|x_1| = 1$ $\vec{q}_e^{(3)} = \left(\frac{FR}{b} \sin\theta_e, \theta_e\right)$ (11.3)

$$\begin{cases} mR^2 \left(\frac{3}{2} + \sin^2\theta_e\right) \ddot{x}_1 + b x_1 - FR \cos\theta_e x_2 = 0 \\ m R \ddot{x}_2 = 0 \end{cases}$$

Calcoliamo l'integrale generale del sistema (11.3).
La II eq (11.3) fornisce

$$x_2(t) = c_1 t + c_2 \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Consideriamo l'omogenea associata alla I eq. (11.3)

$$m R^2 \left(\frac{3}{2} + \sin^2\theta_e\right) \ddot{x}_1 + b\, x_1 = 0$$

Il suo integrale generale è

$$\overline{x}_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{m R^2\left(\frac{3}{2}+\sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1\right)$$

Cerchiamo una soluzione particolare della (11.3) del tipo

$$x_1^{(p)} = c_3 t + c_4$$

Sostituendo nella (11.3) troviamo

$$b(c_3 t + c_4) = F R \cos\theta_e (c_1 t + c_2)$$

Dunque, le costanti soddisfano il sistema

$$\begin{cases} b c_3 = F R \cos\theta_e\, c_1 \\ b c_4 = F R \cos\theta_e\, c_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c_3 = \dfrac{F R \cos\theta_e}{b}\, c_1 \\ c_4 = \dfrac{F R \cos\theta_e}{b}\, c_2 \end{cases}$$

Dunque,

$$x_1^{(p)} = \frac{F R \cos\theta_e}{b}(c_1 t + c_2) = \frac{F R \cos\theta_e}{b}\, x_2$$

e

$$x_1(t) = a_1 \cos\left(\sqrt{\frac{b}{m R^2\left(\frac{3}{2}+\sin^2\theta_e\right)}}\, t + \alpha_1\right) + \frac{F R \cos\theta_e}{b}(c_1 t + c_2)$$

6) Ricaviamo la reazione in dinamica del semianello nel punto P. A tale scopo, scriviamo l'equazione dinamica per P

$$\vec{F}_p^{(el)} + \vec{F}_p^{(vol)} + m\vec{g} + \vec{\psi}'_p = m\vec{a}_p$$

Risolvendo rispetto a $\vec{\psi}'_p$, si trova

$$\vec{\psi}'_p = -\left(\vec{F}_p^{(el)} + \vec{F}_p^{(vol)} - m\vec{g}\right) + m\vec{a}_p$$

Tenendo conto della (7.2) otteniamo,

$$\vec{\psi}'_p = \left[(mg - CR)\cos\theta + CR\right]\vec{e}_z - (mg - CR)\sin\theta\,\vec{e}_\theta - F\vec{e}_\varphi + m\vec{a}_p$$

Dalla (14.5) ricaviamo l'espressione di $\vec{a}_p$ nella terna $(\vec{e}_z, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_\theta)$ tramite le (1.4).

$$\vec{a}_p = R\left[\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right]\left(\cos\theta\,\vec{e}_\theta + \sin\theta\,\vec{e}_z\right) +$$

$$+ R\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi - R\left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\left(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)$$

$$= R\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_\theta + R\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi -$$

$$- R\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\vec{e}_z$$

che coincide con l'espressione di $\vec{a}_p$ in coordinate sferiche se $\dot{R} = 0$. (vedi Appunti)

Calcolo $\vec{a}_P$ considerando il moto di P relativo alla terna mobile $(O, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$.

$$\vec{a}_P = \vec{a}_P^{(rel)} + \vec{a}_P^{(tr)} + \vec{a}_P^{(Cor)} \tag{16.1}$$

$$\vec{a}_P^{(rel)} = R\ddot{\theta}\,\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r = R\left[\ddot{\theta}\left(\cos\theta\,\vec{e}_\varphi - \sin\theta\,\vec{e}_z\right) - \dot{\theta}^2\left(\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \cos\theta\,\vec{e}_r\right)\right] \tag{16.2}$$

$$\vec{a}_P^{(tr)} = \vec{\omega}\times(P-O) + \vec{\omega}\times\left(\vec{\omega}\times(P-O)\right) \tag{16.3}$$

$$= \ddot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\vec{e}_r + \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times \left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\vec{e}_r\right)$$

$$= R\ddot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + R\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z \times \sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$= R\sin\theta\,\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi - R\dot{\varphi}^2\sin\theta\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a}_P^{(Cor)} = 2\vec{\omega}\times\vec{v}_P^{(rel)} = 2\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \times R\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta = 2R\dot{\varphi}\dot{\theta}\cos\theta\,\vec{e}_\varphi \tag{16.4}$$

$$\vec{a}_P = R\Big[\left(\cos\theta\,\ddot{\theta} - \sin\theta\left(\dot{\theta}^2 + \dot{\varphi}^2\right)\right)\vec{e}_\theta + \left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\dot{\theta}\right)\vec{e}_\varphi$$
$$- \left(\sin\theta\,\ddot{\theta} + \cos\theta\,\dot{\theta}^2\right)\vec{e}_z\Big] \tag{16.5}$$

Dunque,

$$\vec{\Psi}'_P = \left[-(mg-cR)\sin\theta + mR\left(\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_\theta +$$

$$+\left[F + mR\left(\sin\theta\,\ddot{\varphi} + 2\cos\theta\,\dot{\varphi}\,\dot{\theta}\right)\right]\vec{e}_\varphi +$$

$$\left[+(mg-cR)\cos\theta + cR - mR\left(\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta\,\dot{\varphi}^2\right)\right]\vec{e}_z$$

N.B. Si osservi che, come previsto, $\vec{\Psi}'_P \cdot \vec{e}_\theta = 0$. Infatti $\Psi'_P \cdot \vec{e}_\theta$ coincide con la EL_θ (9.1). Ciò spiega il significato fisico della EL_θ: è la proiezione lungo il versore $\vec{e}_\theta$ dell'equazione della dinamica del punto P.
Analogamente, si può verificare che la EL_φ è la proiezione della II ECD, applicata a tutto il modello, lungo il versore $\vec{e}_z$.