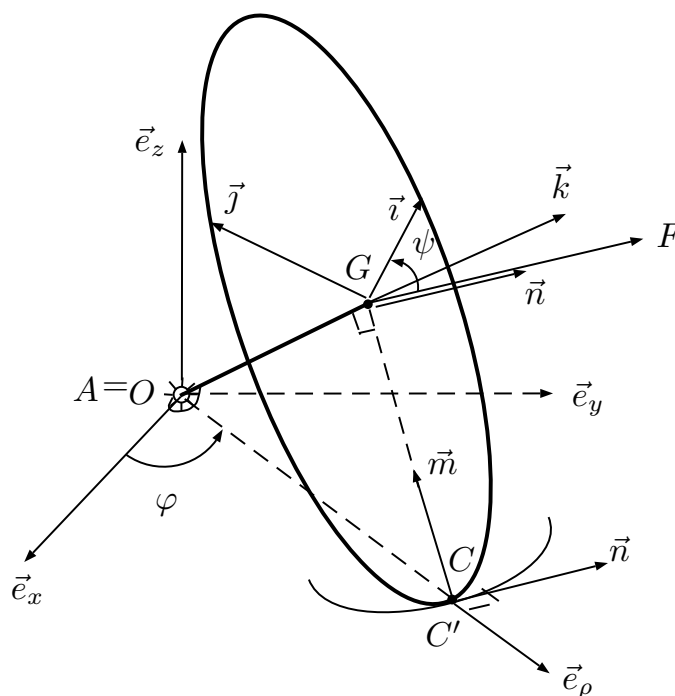


Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 3 febbraio 2020

(G. Tondo)



Un rigido è formato da un **disco** omogeneo, di massa m e raggio R , saldato nel suo centro G ad un'asta AG di massa trascurabile e lunghezza d , il cui estremo A è vincolato ad un punto fisso O mediante una cerniera sferica. L'asta AG è ortogonale al piano del disco, il quale rotola senza strisciare sul piano orizzontale scabro passante per O . Sul rigido agisce una forza $F > 0$ applicata in G e parallela a $\vec{n}$ e una molla angolare fissata in O che esercita un momento di richiamo $\vec{M}^{(molla)} = -b\varphi \vec{m}$, con $b > 0$. Si suppone che tutti i vincoli siano non dissipativi. Scelta come coordinata libera l'angolo φ della figura, si chiede di:

CINEMATICA.

- 1) Classificare il moto, il campo di velocità del rigido e determinarne l'asse d'istantanea rotazione.

STATICA.

- 2) Verificare se la sollecitazione della molla è conservativa, poi individuare le configurazioni di equilibrio del modello e la loro stabilità;
- 3) all'equilibrio, determinare la reazione vincolare esterna sul disco nel punto C , supponendo che la sua componente lungo $\vec{e}_\rho$ sia nulla e trascurando l'attrito di rotolamento;
- 4) all'equilibrio, determinare la reazione vincolare esterna sull'asta nel punto A , nell'ipotesi del punto 3).

DINAMICA.

- 5) Trovare il moto del rigido $\varphi(t)$ con le condizioni iniziali $\varphi(0) = 0$, $\dot{\varphi}(0) = 0$;
- 6) dire se l'energia meccanica è un integrale primo di moto e, in caso affermativo, calcolarne il valore per il moto ricavato al punto 4);

Tema del 3/02/2020

Il modello è un rigido R con 1 g.l., come si può verificare con il metodo dei congelamenti meccanici. Infatti, se si congela la rotazione dell'asta AG intorno all'asse $\vec{e}_z$, poiché il disco non può scorrere sul piano scabro, il rigido è del tutto congelato. Dunque, ammette una sola coordinata libera, che scegliamo come

$$(1.1) \quad 0 \leq \varphi < 2\pi$$

Dunque, l'angolo di rotazione ψ del disco intorno al proprio asse, K , deve poter esprimersi in funzione di φ . Per trovare tale equazione di vincolo, ricordiamo che, per ipotesi, il rigido rotola senza strisciare sul piano $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$. Tale vincolo di mobilità si esprime tramite l'espressione

$$(1.2) \quad \vec{v}_C = 0 \quad C \in R$$

Dalle formule di Poisson, segue che

$$(1.3) \quad \vec{v}_C = \vec{v}_A + \vec{\omega} \times (C-A) = \vec{\omega} \times (C-A)$$

poiché A è un punto fisso, la velocità angolare $\vec{\omega}$ del rigido vincolato con il solo appoggio sul piano, vale

$$(1.4) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\psi} \vec{K}$$

del Teo di Frenet. Poiché, $C-A = \sqrt{d^2 + R^2} \vec{e}_\rho =: a \vec{e}_\rho$

$$(1.5) \quad \vec{v}_C = (\dot{\varphi} \vec{e}_z + \dot{\psi} \vec{K}) \times a \vec{e}_\rho = a \left(\dot{\varphi} \vec{n} + \dot{\psi} \frac{R}{a} \vec{n} \right)$$

Nel seguito, utilizzeremo le seguenti basi ortonormali

$$B = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$$

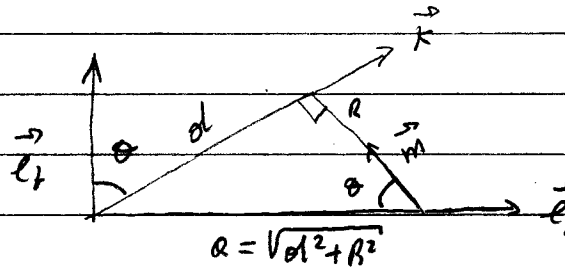
$$B' = (\vec{e}_\varphi, \vec{e}_\rho, \vec{e}_z)$$

$$B'' = (\vec{n}, \vec{m}, \vec{k})$$

$$B''' = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$$

$$\begin{cases} \vec{e}_\varphi = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\rho = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{n} = \vec{e}_\varphi \\ \vec{m} = -\frac{R}{a} \vec{e}_\varphi + \frac{d}{a} \vec{e}_z \\ \vec{k} = \frac{d}{a} \vec{e}_\varphi + \frac{R}{a} \vec{e}_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{e}_\varphi = \vec{n} \\ \vec{e}_\varphi = -\frac{R}{a} \vec{m} + \frac{d}{a} \vec{k} \\ \vec{e}_z = \frac{d}{a} \vec{m} + \frac{R}{a} \vec{k} \end{cases}$$



$$\cos \theta = \frac{R}{a}$$

$$\sin \theta = \frac{d}{a}$$

Allora, dal vincolo (1.2), segue che

$$(2.1) \quad \dot{\varphi} + \dot{\psi} \frac{R}{\sqrt{d^2 + R^2}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\dot{\psi} = -\dot{\varphi} \sqrt{1 + \frac{d^2}{R^2}}}$$

In questo caso, il vincolo di mobilità (2.1) è integrabile, cioè equivale al vincolo olonomo

$$(2.2) \quad \psi = -\varphi \sqrt{1 + \frac{d^2}{R^2}} + \varphi_0$$

Scegliamo la costante $\varphi_0 = 0$, in modo che $\varphi = 0$ corrisponda a $\psi = 0$, cioè $\vec{e}_{\varphi=0} = \vec{e}_y$. Dunque, l'eq. di vincolo fra i due angoli φ e ψ risulta

$$(2.3) \quad \psi = -\sqrt{1 + \frac{d^2}{R^2}} \varphi = -\frac{a}{R} \varphi$$

Inoltre, sostituendo la (2.1) nella (1.4), si trova l'espressione di $\vec{\omega}$ per il rigido in puro rotolamento nel piano

$$(2.4) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \vec{e}_z - \sqrt{1 + \frac{d^2}{R^2}} \dot{\varphi} \vec{k} = \dot{\varphi} \left(\vec{e}_z - \frac{a}{R} \vec{k} \right)$$

Possiamo ora rispondere alla domanda 1).

Poiché durante il moto si conserva l'angolo fra l'asse fino $(O, \vec{e}_z)$ e l'asse $(A, \vec{k})$ che è solidale a R , il moto del rigido è un caso particolare ($h=1$) di moto di precessione. Inoltre, poiché A è un punto fisso, l'invariante scalare statico $\vec{v}_A \cdot \vec{\omega} = 0$, quindi il campo è rotatorio. Dunque, l'asse di Mohr degenera nell'AIR che necessariamente passa per A ma anche per C , dato che $\vec{v}_C = 0$. Quindi, l'AIR è l'unica retta passante per A e C . Dunque, $\vec{\omega} \parallel (A-C)$ ed è diretta come $\text{vers}(A-C)$. Infatti,

$$(2.5) \quad \vec{\omega} = \dot{\varphi} \left(\vec{e}_z - \frac{a}{R} \vec{k} \right) = \dot{\varphi} \left(\vec{e}_z - \frac{a}{R} \left(\frac{d}{a} \vec{e}_1 + \frac{b}{a} \vec{e}_2 \right) \right) = -\frac{d}{R} \dot{\varphi} \vec{e}_1$$

Stolica

2) Per verificare se la sollecitazione della molla angolare è conservativa, calcoliamone la forza generalizzata, utilizzando il lavoro virtuale.

$$\begin{aligned}
 LV^{(molla)} &= \vec{M}^{(molla)} \cdot \vec{\varepsilon} = - \vec{\varepsilon} = \vec{\omega} \delta \varphi = - \frac{d}{R} \delta \varphi \vec{e}_\varphi \\
 &= -b\varphi \vec{m} \cdot \left(-\frac{d}{R} \vec{e}_\varphi \right) \delta \varphi \delta \varphi \left(\frac{b d \varphi \vec{m} \cdot \vec{e}_\varphi}{R} \right) = \frac{b d \varphi}{R} \left(-\frac{R}{a} \right) \delta \varphi = \\
 &= - \frac{b d}{a} \varphi \delta \varphi
 \end{aligned}$$

Dunque,

$$Q^{(molla)} = - \frac{b d}{a} \varphi \Leftrightarrow V^{(molla)} = - \int - \frac{b d}{a} \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{b d}{a} \varphi^2$$

Analogamente per la forza $\vec{F}_G = F \vec{n}$

$$\begin{aligned}
 LV^{(roll)} &= \vec{F}_G \cdot \delta \vec{r}_A + (G-A) \times \vec{F}_G \cdot \vec{\varepsilon} = (d \vec{k} \times F \vec{n}) \cdot \left(-\frac{d}{R} \delta \varphi \vec{e}_\varphi \right) \\
 &= F d \vec{m} \cdot \left(-\frac{d}{R} \delta \varphi \vec{e}_\varphi \right) = - \frac{F d^2}{R} \delta \varphi \left(-\frac{R}{a} \right) = F \frac{d^2}{a} \delta \varphi
 \end{aligned}$$

Quindi,

$$Q^{(roll)} = F \frac{d^2}{a}$$

$$V^{(roll)} = - \int F \frac{d^2}{a} d\varphi = - F \frac{d^2}{a} \varphi$$

Dunque

$$V^{(tot)} = \frac{1}{2} b \frac{d}{a} \varphi^2 + m g R - F \frac{d^2}{a} \varphi$$

$$Q^{(tot)} = - b \frac{d}{a} \varphi + F \frac{d^2}{a}$$

Quindi, l'equazione pura di equilibrio è

$$(4.1) \quad -b \frac{d\varphi}{dt} + F \frac{d\ell^2}{dt} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_e = \frac{F d}{b}$$

ed $\exists!$ la configurazione di equilibrio (4.1).

3) Scriviamo le ECS, tenendo conto che i vincoli in A e in C esercitano l'insieme delle reazioni vincolari

$$\mathcal{L} = \{ (A, \vec{\Phi}), (C, \vec{\Psi}) \}$$

con $\vec{\Psi}_C$ che, per ipotesi, soddisfa la condizione

$$(4.2) \quad \vec{\Psi}_C \cdot \vec{e}_s = 0$$

Dunque, dobbiamo risolvere il sistema delle ECS

$$(4.3) \quad \begin{cases} \vec{R}^{(ext, ext)} + \vec{\Phi}_A + \vec{\Psi}_C = \vec{0} \\ \vec{M}_A^{(ext, ext)} + (C-A) \times \vec{\Psi}_C = \vec{0} \end{cases}$$

insieme con la (4.2), tenendo conto delle (4.1).

Come base di riferimento, conviene usare la base

$B' = (\vec{e}_s, \vec{n}, \vec{e}_2)$ invece di quella fissa.

Su tale base, denotiamo con

$$(4.4) \quad \vec{\Phi}_A = \phi_s \vec{e}_s + \phi_n \vec{n} + \phi_2 \vec{e}_2$$

$$(4.5) \quad \vec{\Psi}_C \stackrel{(4.2)}{=} \cancel{\psi_s} \vec{e}_s + \psi_n \vec{n} + \psi_2 \vec{e}_2$$

le soluzioni della II ECS (4.3) sono

$$(5.1) \quad \vec{\psi}_c = \frac{C-A}{|C-A|^2} \times M_A^{(ext, int)} + \frac{f}{|C-A|^2} (C-A)$$

dove f , in questo caso è nullo per l'ipotesi (4.2).

Intanto, calcoliamo

$$(5.2) \quad \begin{aligned} \vec{M}_A^{(ext, int)} &= (C-A) \times (\vec{F} + m\vec{g}) - b\varphi \vec{m} = d\vec{k} \times (\vec{F}\vec{n} - mg\vec{e}_z) - b\varphi \vec{m} = \\ &= Fd\vec{m} + mgd\frac{d\vec{n}}{a} - b\varphi \vec{m} \\ &= (Fd - b\varphi)\vec{m} + mg\frac{d^2}{a}\vec{n} \end{aligned}$$

e osserviamo che

$$(5.3) \quad \vec{M}_A^{(ext, int)} \Big|_{\vec{g}=\vec{0}} = mg\frac{d^2}{a}\vec{n}$$

Allora

$$(5.4) \quad \vec{\psi}_{c|_{\vec{g}=\vec{0}}} = \frac{\vec{e}_z}{a} \times mg\frac{d^2}{a}\vec{n} = \frac{mgd^2}{a^2} \vec{e}_z \times \vec{n} = mg\frac{d^2}{a^2} \vec{e}_z$$

Dalla I ECS ricaviamo $\vec{\phi}_A$

$$\begin{aligned} \vec{\phi}_A &= -\vec{R}^{(ext, int)} - \vec{\psi}_c = -(\vec{F}\vec{n} - mg\vec{e}_z) - mg\frac{d^2}{a^2} \vec{e}_z = \\ &= -F\vec{n} + mg\left(1 - \frac{d^2}{a^2 + R^2}\right) \vec{e}_z \end{aligned}$$

Dinamica

dinamica

- 5) Poiché i vincoli sono non dissipativi, nella configurazione di confine possiamo utilizzare la EL relativa a φ . A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica del rigido come

$$(9.1) \quad K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \mathbb{I}_C(\vec{\omega}) \quad C \in \text{AIR}$$

Cometerna di riferimento per calcolare la matrice d'inerzia $\mathbb{I}_C$, possiamo scegliere la terma $(C; \vec{n}, m, \vec{K})$. Essa non è una terma solidale a R , come invece $(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{K})$. Tuttavia è una terma principale d'inerzia poiché $(C, \vec{K})$ e $(C, \vec{m})$ sono assi di simmetria materiale per R .

Inoltre, i momenti d'inerzia rispetto agli assi di tale terma sono indipendenti del tempo per ragioni di simmetria materiale. In fatti, utilizzando il Teo. di Huygens-Steiner si trova

$$\vec{n} \cdot \mathbb{I}_C(\vec{n}) = I + m R^2 = \frac{5}{4} m R^2$$

$$(9.2) \quad \vec{m} \cdot \mathbb{I}_C(\vec{m}) = \bar{I} = \frac{1}{4} m R^2$$

$$\vec{K} \cdot \mathbb{I}_C(\vec{K}) = 2I + m R^2 = \frac{3}{2} m R^2$$

$$\vec{\omega} = -\frac{d}{R} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = -\frac{d}{R} \dot{\varphi} \frac{1}{a} (-R \vec{m} + d \vec{K}) = \frac{d}{a} \dot{\varphi} \left(+\vec{m} - \frac{d}{R} \vec{K} \right)$$

$$(9.3) \quad K = \frac{1}{2} \frac{d \dot{\varphi}}{a} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{d}{R} \end{bmatrix} m R^2 \begin{bmatrix} \frac{5}{4} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \frac{d \dot{\varphi}}{a} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{d}{R} \end{bmatrix} = \frac{m R^2}{2} \frac{d^2}{a^2} \dot{\varphi}^2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{d}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -\frac{d}{R} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \frac{d^2}{a^2} \dot{\varphi}^2 \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{d^2}{R^2} \right)$$

Allora

LE

$$(10.1) \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = m \frac{R^2}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{d^2}{R^2} \right) \dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m \frac{R^2}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{d^2}{R^2} \right) \ddot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

L'eq. di Lagrange è

$$(10.2) \quad m \frac{R^2}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{d^2}{R^2} \right) \ddot{\varphi} = -b \frac{d\varphi}{a} + F \frac{d^2}{a}$$

Il problema di Cauchy associato è

$$(10.3) \quad \begin{cases} m \frac{R^2}{a^2} \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{d^2}{R^2} \right) \ddot{\varphi} + b \frac{d\varphi}{a} = F \frac{d^2}{a} \\ \varphi(0) = 0 \\ \dot{\varphi}(0) = 0 \end{cases}$$

L'integrale generale è dato da

$$(10.4) \quad \varphi(t) = A \cos(\gamma t + \varphi_0) + \frac{F d}{b} \quad \gamma := \sqrt{\frac{b^2 a}{m R^2 \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{d^2}{R^2} \right)}}$$

Imponendo le condizioni iniziali si determinano le costanti A e φ_0 . In fatti:

$$\begin{aligned} \varphi(0) &: \begin{cases} A \cos \varphi_0 + \frac{F d}{b} = 0 \\ -A \gamma \sin \varphi_0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = -\frac{F d}{b} \\ \varphi_0 = 0 \end{cases} \\ \dot{\varphi}(0) &: \end{aligned}$$

Quindi, l'unica soluzione di (8.3) è

$$(10.5) \quad \varphi(t) = \frac{F d}{b} (1 - \cos \gamma t)$$

6) Il modello è una macchina semplice soggetta a vincoli olonami, fissi e non dissipativi e sollecitazione conservativa. Quindi l'energia meccanica si conserva. Ene vale

$$(11.1) \quad E = K + V = \frac{1}{2} m R^2 \frac{d^2}{a^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{d^2}{R^2} \right) \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \frac{b d}{a} \dot{\varphi}^2 - \frac{F d^2}{a} \varphi =$$

$$= \frac{1}{2} m R^2 \frac{d^2}{a^2} \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2} \frac{d^2}{R^2} \right) \dot{\varphi}^2(0) + \frac{1}{2} \frac{b d}{a} \dot{\varphi}^2(0) - \frac{F d^2}{a} \varphi(0) = 0$$