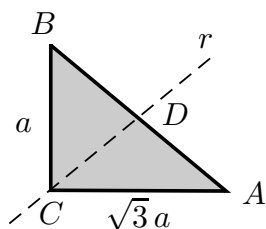


Compito di Meccanica Razionale (9 CFU)

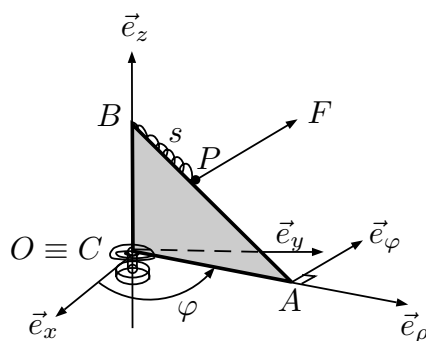
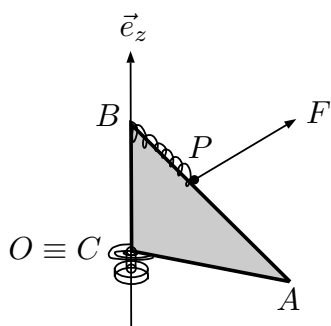
Trieste, 7 Gennaio 2020. (G. Tondo)

Si consideri la lamina *omogenea* della figura, a forma di triangolo rettangolo, di massa totale M e con i cateti di lunghezza $\overline{BC} = a$, $\overline{AC} = \sqrt{3}a$.

- 1) Si calcoli il baricentro G e il momento d'inerzia della lamina rispetto alla mediana r passante per il vertice C .



La lamina suddetta è vincolata a ruotare, come in figura, attorno all'asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ passante per C , mediante una cerniera cilindrica fissa in $O \equiv C$. Inoltre, sull'ipotenusa della lamina è vincolato a scorrere senza attrito un punto materiale P di massa m . Sulla lamina agiscono: il peso proprio ed una molla *angolare* di richiamo posta in C e di costante elastica c . Sul punto P agiscono: il peso proprio, la forza di richiamo di una molla fissata nel vertice B della lamina e di costante elastica $b > \frac{mg}{4a}$, una forza F sempre ortogonale al piano della lamina, come in figura.



STATICA

Detta s l'ascissa di P su AB misurata a partire da B e φ l'angolo tra il piano della lamina e il piano verticale fisso in cui la molla angolare è a riposo, individuato dagli assi $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$, determinare:

- 2) le configurazioni di equilibrio del modello $\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e)$;
- 3) le reazioni vincolari esterne sulla lamina in C , all'equilibrio.

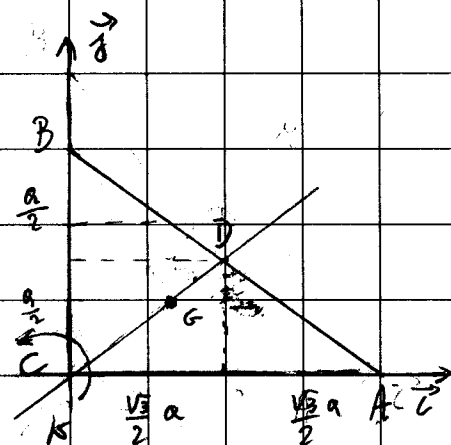
DINAMICA

- 4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;
- 5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio;
- 6) calcolare la reazione vincolare interna sul punto P , durante il moto.

Tema del 7/1/2020

I

1) Calcolo del baricentro G della lamina triangolare e del momento d'inerzia I_z .



Per il calcolo di G , ricordiamo che in una lamina omogenea, esso coincide con il baricentro geometrico e quindi divide le mediane (assi di simmetria oblique, congiunti al lato diviso in due dalla mediana) in due parti una doppia dell'altra

$$\overline{CG} = 2\overline{GD}$$

Allora, considerando la terna di vettori $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ avremo

$$D-C = \frac{a}{2} (\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$$

$$G-C = \frac{2}{3} (D-C) = \frac{a}{3} (\sqrt{3}\vec{i} + \vec{j})$$

Tema del 7/1/2020

II

Calcoleremo il momento d'inerzia I_z e I_y tramite la formula:

$$I_z = \text{vers}(D-C) \cdot I_C \cdot \text{vers}(D-C)$$

A tale scopo, calcoliamo la matrice d'inerzia

$$I_C = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & 0 \\ I_{12} & I_{22} & 0 \\ 0 & 0 & I_{11} + I_{22} \end{bmatrix}$$

rispetto alla terna di assi $(C; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

$$I_{11} = \int_R \rho(P) (x_2^2 + x_3^2) dS = \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} dx_1 \int_0^{x_2(x_1)} x_2^2 dx_2$$

dove $x_2(x_1)$ è l'equazione cartesiana della retta passante per i punti A e B, cioè

$$x_2(x_1) = -\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + a$$

Allora,

$$I_{11} = \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} dx_1 \left[\frac{x_2^3}{3} \right]_0^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + a} = \frac{2M}{3\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + a \right)^3 dx_1$$

$$(III.1) \quad \frac{2M}{3\sqrt{3}a^2} \left[\frac{1}{4} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + a \right)^4 \right]_0^{\sqrt{3}a} = -\frac{M}{6a^2} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + a \right)^4 - a^4 \right] = \frac{1}{6} M a^2$$

Analogamente,

$$I_{22} = \int_R p(p) (x_1^2 + x_2^2) dS = \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} x_1^2 dx_1 \int_0^{x_2(x_1)} dx_2 =$$

$$= \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} x_1^2 dx_1 \left[x_2 \right]_0^{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + a \right)} = \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + a \right) x_1^2 dx_1 =$$

$$(III.2) \quad = \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1^3 + a x_1^2 \right) dx_1 = \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \left[-\frac{x_1^4}{4\sqrt{3}} + \frac{a x_1^3}{3} \right]_0^{\sqrt{3}a} =$$

$$= \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \left(-\frac{(\sqrt{3}a)^4}{4\sqrt{3}} + \frac{a}{3} (\sqrt{3}a)^3 \right) = \frac{1}{2} M a^2$$

$$= \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \left(-\frac{9a^4}{4\sqrt{3}} + \frac{a}{3} 3\sqrt{3}a^3 \right) = \frac{2Ma^4}{\sqrt{3}a^2} \left(\frac{-3\sqrt{3}}{4} + \sqrt{3} \right) =$$

$$= \frac{2Ma^4}{\sqrt{3}a^2} \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{1}{2} M a^2$$

Tema del 7/1/2020

I.V

Calcolo del momento deviatore

$$\begin{aligned}
 I_{12} &= - \int_R p(P) x_1 x_2 dS = - \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} x_1 dx_1 \left(\int_0^{x_2(x_1)} x_2 dx_2 \right) = \\
 &= - \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} x_1 dx_1 \left[\frac{x_2^2}{2} \right]_0^{\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + a\right)} = - \frac{2M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} \frac{x_1}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + a\right)^2 dx_1 = \\
 &= - \frac{M}{\sqrt{3}a^2} \int_0^{\sqrt{3}a} x_1 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}x_1 + a\right)^2 dx_1 = - \frac{M}{a^2\sqrt{3}} \int_0^{\sqrt{3}a} \left(\frac{x_1^3}{3} - \frac{2ax_1^2}{\sqrt{3}} + a^2x_1\right) dx_1 = \\
 &= - \frac{M}{a^2\sqrt{3}} \left[\frac{x_1^4}{3 \cdot 4} - \frac{2a}{\sqrt{3}} \frac{x_1^3}{3} + \frac{a^2}{2} x_1^2 \right]_0^{\sqrt{3}a} = \\
 &= - \frac{M}{a^2\sqrt{3}} \left(\frac{3}{3 \cdot 4} a^4 - \frac{2a}{\sqrt{3}} \frac{3}{3} a^3 + \frac{a^2}{2} a^2 \right) = \\
 &= - \frac{Ma^2}{\sqrt{3}} \left(\frac{3}{4} - 2 + \frac{3}{2} \right) = - \frac{Ma^2}{\sqrt{3}} \frac{1}{4} = - \frac{M\sqrt{3}}{12} a^2
 \end{aligned}$$

Tema del 7/01/2020

V

Dunque,

$$(V.1) \quad I_C = M \begin{bmatrix} \frac{1}{8} a^2 & -\frac{\sqrt{3}}{12} a^2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} a^2 & \frac{1}{2} a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} a^2 \end{bmatrix}$$

$$\text{vers } (D-C) = \frac{Q}{2} \frac{(\sqrt{3}\vec{e} + \vec{j})}{\sqrt{\frac{Q^2}{4}}} = \frac{1}{2} (\sqrt{3}\vec{e} + \vec{j})$$

Quindi

$$I_2 = \frac{1}{2} [\sqrt{3}, 1, 0] M \begin{bmatrix} \frac{1}{8} a^2 & -\frac{\sqrt{3}}{12} a^2 & 0 \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} a^2 & \frac{1}{2} a^2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} a^2 \end{bmatrix} \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{M}{4} [\sqrt{3}, 1, 0] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{6} a^2 - \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \\ -\frac{\sqrt{3}}{12} a^2 - \frac{1}{2} a^2 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{M}{4} [\sqrt{3}, 1, 0] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{12} a^2 \\ \frac{1}{4} a^2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{M}{4} \left(\frac{a^2}{4} + \frac{3a^2}{12} \right) = \frac{M a^2}{8}$$

Cinematica

Il modello è formato da un rigido più un punto vincolato ad esso. Con il metodo dei congelamenti successivi, si determina che ha 2 g.l. Come coordinate libere, riprendiamo l'angolo φ di rotazione del telaio e l'arcina curvilinea s di P sul lato AB .

$$\varphi \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq s \leq 2a$$

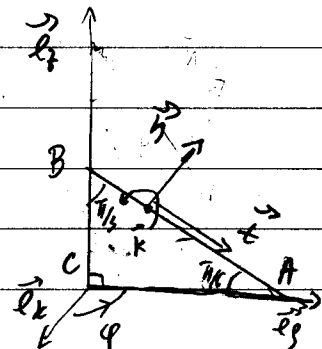
Utilizzeremo le seguenti basi di vettori $\vec{e}_i$

$(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: base "fissa"

$(\vec{e}_s, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: base "rotabile" alla lamina

$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$: base "rotabile" alla lamina

$(\vec{t}, \vec{n}, \vec{k})$: base "adattata" al vincolo del punto P



le trasformazioni sono

$$(3.1) \quad \begin{cases} \vec{e}_s = \cos \varphi \vec{e}_x + \sin \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin \varphi \vec{e}_x + \cos \varphi \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_x = \cos \varphi \vec{e}_s - \sin \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin \varphi \vec{e}_s + \cos \varphi \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(3.2) \quad \begin{cases} \vec{i} = \vec{e}_s \\ \vec{j} = \vec{e}_\varphi \\ \vec{k} = -\vec{e}_z \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_s = \vec{i} \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{k} \\ \vec{e}_z = \vec{j} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \vec{t} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{c} - \vec{j}) \\ \vec{h} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \sqrt{3}\vec{j}) \\ \vec{K} = \vec{K} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{c} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{t} + \vec{h}) \\ \vec{j} = \frac{1}{2}(-\vec{t} + \sqrt{3}\vec{h}) \\ \vec{K} = \vec{K} \end{cases}$$

Composons la transformation

$$\begin{cases} \vec{t} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e}_j - \vec{e}_2) \\ \vec{h} = \frac{1}{2}(-\vec{e}_j + \sqrt{3}\vec{e}_2) \\ \vec{K} = -\vec{e}_\varphi \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{e}_j = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{t} + \vec{h}) \\ \vec{e}_\varphi = -\vec{K} \\ \vec{e}_2 = \frac{1}{2}(-\vec{t} + \sqrt{3}\vec{h}) \end{cases}$$

$$B-O = a \vec{e}_2$$

$$G-O \equiv G-C = \frac{a}{3}(\sqrt{3}\vec{c} + \vec{j}) = \frac{a}{3}(\sqrt{3}\vec{e}_j + \vec{e}_2)$$

$$\begin{aligned} P-O &= (P-B) + (B-O) = \frac{1}{2}\vec{t} + a\vec{e}_2 = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{c} - \vec{j}) + a\vec{e}_2 \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_j + \left(a - \frac{1}{2}\right)\vec{e}_2 = P-C \end{aligned}$$

Duquel,

$$\frac{\partial \vec{x}_P}{\partial \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\partial \vec{e}_j}{\partial \varphi} = \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_\varphi, \quad \frac{\partial \vec{x}_P}{\partial r} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}\vec{e}_j - \vec{e}_2)$$

Statica

- 2) Per trovare gli equilibri, scriviamo le eq. pure di equilibrio. A questo scopo, calcoliamo le forze lagrangiane, tramite l'energia potenziale, per la rotazione attorno conservativa; tramite la definizione per il carico follower

$$\vec{F}_p = F \vec{e}_\varphi$$

$$\begin{aligned} V(x, \varphi) &= \frac{1}{2} c \varphi^2 - H \vec{g} \cdot (\vec{G} - \vec{O}) + \frac{1}{2} b s^2 - m \vec{g} \cdot (\vec{P} - \vec{O}) \\ &= \frac{1}{2} c \varphi^2 + \frac{1}{2} b s^2 + m g \vec{e}_2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_\varphi + \left(a - \frac{s}{2} \right) \vec{e}_2 \right) \\ &= \frac{1}{2} c \varphi^2 + \frac{1}{2} b s^2 + m g \left(a - \frac{s}{2} \right) \end{aligned}$$

$$Q_\varphi^{(con)} = - \frac{\partial V}{\partial \varphi} = -c \varphi$$

$$Q_s^{(con)} = - \frac{\partial V}{\partial s} = - \left(b s - \frac{m g}{2} \right)$$

$$Q_\varphi^{(fol)} = \vec{F}_p \cdot \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial \varphi} = F \vec{e}_\varphi \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_\varphi = \frac{F \sqrt{3}}{2}$$

$$Q_s^{(fol)} = \vec{F}_p \cdot \frac{\partial \vec{x}_p}{\partial s} = F \vec{e}_\varphi \cdot \frac{1}{2} (\sqrt{3} \vec{e}_\varphi - \vec{e}_2) = 0$$

Quindi

$$(6.1) \quad \begin{aligned} Q_\varphi &= Q_\varphi^{(con)} + Q_\varphi^{(for)} = -c\varphi + \frac{F \cdot 2\sqrt{3}}{2} \\ Q_s &= Q_s^{(con)} + Q_s^{(for)} = -bs + \frac{mg}{2} \end{aligned}$$

Dunque, le eq. pure di equilibrio sono

$$(6.2) \quad \begin{cases} -c\varphi + \frac{F \cdot 2\sqrt{3}}{2} = 0 \\ -bs + \frac{mg}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \varphi_e = \frac{F \cdot 2\sqrt{3}}{2c} = \frac{F \cdot mg \cdot \sqrt{3}}{2c \cdot 2b} = \frac{\sqrt{3} F mg}{4bc} \\ s_e = \frac{mg}{2b} < 2a \end{cases}$$

Pertanto, $\exists!$ una configurazione di equilibrio

$$\vec{q}_e = (s_e, \varphi_e) = \left(\frac{mg}{2b}, \frac{\sqrt{3} F mg}{4bc} \right)$$

3) Reazioni nella lamina in B e in C all'equilibrio

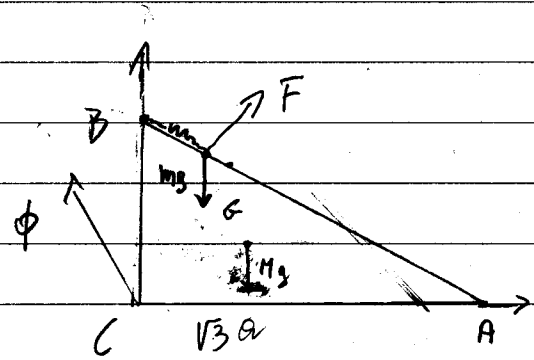
Poiché la cerniera cilindrica in C è liscia, essa esercita le reazioni vincolari

$$\mathcal{L}^{(red)} = \{ (C, \vec{\phi}), \vec{\mu} \},$$

con $\vec{\phi}_C$ generica e $\vec{\mu} \cdot \vec{e}_3 = 0$.

Per determinarle, usiamo le ECS in tutto il modello

$$\begin{cases} \vec{R}^{(ext, ext)} + \vec{\phi}_c = \vec{0} \\ \vec{M}_c^{(ext, ext)} + \vec{\mu} = \vec{0} \end{cases}$$



$$\vec{R}^{(ext, ext)} = -(M+m)g \vec{e}_2 + F \vec{e}_\phi,$$

$$\begin{aligned} \vec{M}_c^{(ext, ext)} &= (G-C) \times (-Mg \vec{e}_2) + (P-C) \times (-mg \vec{e}_2 + F \vec{e}_\phi) - c\phi \vec{e}_2 \\ &= \frac{a}{3} (\sqrt{3} \vec{e}_1 + \vec{e}_2) \times (-Mg \vec{e}_2) + \\ &\quad + \left(\frac{\sqrt{3}a}{2} + \left(a - \frac{a}{2}\right) \vec{e}_2 \right) \times (-mg \vec{e}_2 + F \vec{e}_\phi) - c\phi \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= -\frac{Mga\sqrt{3}}{3} \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + \frac{\sqrt{3}a}{2} (-mg \vec{e}_1 \times \vec{e}_2 + F \vec{e}_1 \times \vec{e}_\phi) + \\ &\quad + \left(a - \frac{a}{2}\right) F \vec{e}_2 \times \vec{e}_\phi - c\phi \vec{e}_2 \end{aligned}$$

$$= \left(\frac{Mga\sqrt{3}}{3} + \frac{mg\sqrt{3}a}{2} \right) \vec{e}_\phi + \left(\frac{F\sqrt{3} - c\phi}{2} \right) \vec{e}_2 - F \left(a - \frac{a}{2} \right) \vec{e}_1$$

Allora, dalla I ECS si ottiene

$$\vec{\phi}_c = -\vec{R}^{(ext, ext)} = (M+m)g \vec{e}_2 - F \vec{e}_\phi / g_c$$

mentre, dalle II ECS

$$\begin{aligned}
 \vec{\mu} &\equiv -M_c \xrightarrow{(a, \phi)} = - \left(M g \frac{a}{3} + m g \frac{1}{2} \right) \sqrt{3} \vec{e}_\phi / \vec{q}_e + \\
 &\quad - \left(\frac{F \sqrt{3}}{2} \frac{1}{2} - c \phi_e \right) \vec{e}_r + F \left(a - \frac{1}{2} \right) \vec{e}_\phi / \vec{q}_e \\
 &= - \left(M g \frac{a}{3} + \frac{(m g)^2}{4 b} \right) \sqrt{3} \vec{e}_\phi / \vec{q}_e + F \left(a - \frac{m g}{4 b} \right) \vec{e}_\phi / \vec{q}_e
 \end{aligned}$$

Dinamica

Scriviamo le eq. di Lagrange relative a $(\varphi, \dot{\varphi})$.
 A tale scopo, calcoliamo l'energia cinetica

$$K = K^{(tr)} + K^{(r)}$$

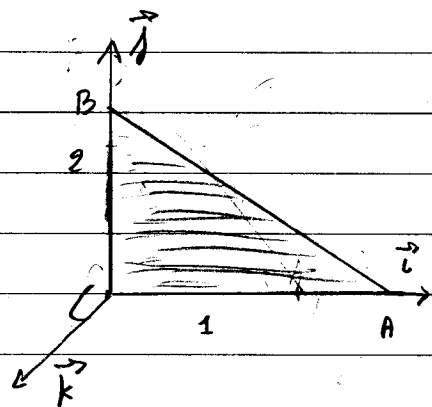
$$K^{(tr)} = \frac{1}{2} \vec{w} \cdot I_c(\vec{w}) = \frac{1}{2} \dot{\varphi} \vec{e}_z \cdot I_c(\dot{\varphi} \vec{e}_z) = \frac{1}{2} \dot{\varphi}^2 I_{cz};$$

dove

$$I_{cz} = \vec{e}_z \cdot I_c(\vec{e}_z)$$

$\bar{I}$ è il momento d'inerzia della lamina rispetto all'asse di rotazione BE .

$$I_{cz} = I_{zz} \stackrel{(III.4)}{=} \frac{1}{2} M a^2$$



Quindi,

$$K^{(tr)} = \frac{1}{2} \frac{M a^2}{2} \dot{\varphi}^2$$

$$K^{(p)} = \frac{1}{2} m |\vec{V}_p|^2$$

$$\vec{V}_p = \vec{v}_p^{(al)} + \vec{v}_p^{(tr)}$$

$$\vec{v}_p^{(al)} = \dot{\theta} \vec{t}$$

$$\begin{aligned} \vec{v}_p^{(tr)} &= \vec{\omega} \times \vec{r} = \dot{\varphi} \vec{e}_2 \times \left[\frac{1\sqrt{3}}{2} \vec{e}_1 + \left(a - \frac{1}{2} \right) \vec{e}_2 \right] = \\ &= \frac{1\sqrt{3}}{2} \dot{\varphi} \vec{e}_2 \times \vec{e}_1 = \frac{1\sqrt{3}}{2} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

Dunque

$$\vec{V}_p = \dot{\theta} \vec{t} + \frac{1\sqrt{3}}{2} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi = \frac{\dot{\theta}}{2} (\sqrt{3} \vec{e}_1 - \vec{e}_2) + \frac{1\sqrt{3}}{2} \dot{\varphi} \vec{e}_\varphi$$

$$|\vec{V}_p|^2 = \frac{1}{4} (\dot{\theta}^2 + 3\dot{\theta}^2 + 3\dot{\varphi}^2) = \dot{\theta}^2 + 3\frac{\dot{\varphi}^2}{4}$$

$$K^{(p)} = \frac{1}{2} m \left(\dot{\theta}^2 + 3\frac{\dot{\varphi}^2}{4} \right)$$

Allora,

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \left[\frac{M a^2}{2} \dot{\varphi}^2 + m \left(\dot{\theta}^2 + 3\frac{\dot{\varphi}^2}{4} \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[m \dot{\theta}^2 + \left(\frac{M a^2}{2} + \frac{m 3\dot{\varphi}^2}{4} \right) \dot{\varphi}^2 \right] \end{aligned}$$

Donc, la EL sera

$$EL_j: \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{j}} = m \dot{j}, \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{j}} \right) = m \ddot{j}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{m \frac{3}{2}}{4} \dot{\varphi}^2$$

$$(10.1) \quad m \left(\ddot{j} - \frac{3}{4} \dot{\varphi}^2 \right) \stackrel{(6.1)}{=} -b j + \frac{m g}{2}$$

$$EL_\varphi: \quad \frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{M a^2}{2} + 3m \frac{\frac{3}{2}}{4} \right) \dot{\varphi}, \quad \frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \left(\frac{M a^2}{2} + 3m \frac{\frac{3}{2}}{4} \right) \ddot{\varphi} + 3 \frac{m \frac{3}{2}}{2} \dot{j} \dot{\varphi}$$

$$(11.2) \quad \left(\frac{M a^2}{2} + 3m \frac{\frac{3}{2}}{4} \right) \ddot{\varphi} + 3 \frac{m \frac{3}{2}}{2} \dot{j} \dot{\varphi} \stackrel{(6.1)}{=} -c \varphi + \frac{F \frac{3}{2} \sqrt{3}}{2}$$

5) Linearizzazione intorno all'equilibrio

La sollecitazione non è conservativa, quindi si deve utilizzare la formula

$$A \ddot{\vec{x}} + B \dot{\vec{x}} + C \vec{x} = 0, \quad \vec{x} := \frac{\vec{q} - \vec{q}_e}{\varepsilon}$$

dove

$$A_{ij} = \frac{\partial^2 K}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j} \Big|_{\vec{q}_e}, \quad B_{ij} = - \frac{\partial \dot{Q}_i}{\partial \dot{q}_j} \Big|_{\vec{q}_e} = 0, \quad C_{ij} = - \frac{\partial Q_i}{\partial q_j} \Big|_{\vec{q}_e}$$

Quindi,

$$A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{3m^3 g^2}{4} + \frac{Mg^2}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{m^3 g^2}{16b^2} + \frac{Mg^2}{2} \end{bmatrix}$$

$$C = - \begin{bmatrix} -b & 0 \\ \frac{F\sqrt{3}}{2} & -c \end{bmatrix}$$

Dunque,

$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{3m^3 g^2}{16b^2} + \frac{Mg^2}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b & 0 \\ -\frac{F\sqrt{3}}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + b x_1 = 0 \\ \left(\frac{3m^3 g^2}{16b^2} + \frac{Mg^2}{2} \right) \ddot{x}_2 - \frac{F\sqrt{3}}{2} x_1 + c x_2 = 0 \end{cases}$$

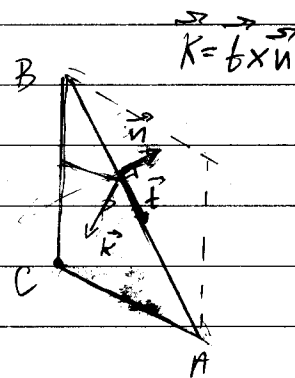
6) Problemi dinamiche nel pto P.

Dall'eq. di Newton in (m, P)

$$\vec{\phi}_1 = -\vec{F}_p + m\vec{a}_p$$

$$\vec{F}_p = -mg\vec{e}_z - b\vec{s}\vec{t} + F\vec{e}_\varphi$$

$$\downarrow -mg\frac{1}{2}\left(-\vec{t} + \vec{u}\sqrt{3}\right) - b\vec{s}\vec{t} - F\vec{k} = \left(\frac{mg}{2} - b_1\right)\frac{\vec{t} - \sqrt{3}g\vec{u}}{2} - F\vec{k}$$



$$\vec{a}_p = \vec{a}_p^{(rel)} + \vec{a}_p^{(tr)} + \vec{a}_p^{(cor)}$$

$$\vec{a}_p^{(rel)} = \ddot{s}\vec{t}$$

$$\vec{a}_p^{(tr)} = \vec{a}_c + \vec{\omega} \times (P-C) - |\vec{\omega}|^2 (P-C)_\perp$$

$$\downarrow \ddot{\varphi} \vec{e}_z \times (s\vec{t} + \vec{a}\vec{e}_z) - \dot{\varphi}^2 \frac{\sqrt{3}l}{2}$$

$$= s\ddot{\varphi} \vec{e}_z \times \vec{t} - \dot{\varphi}^2 \frac{\sqrt{3}}{4} (\vec{t}\sqrt{3} + \vec{n})$$

$$= s\dot{\varphi} \frac{1}{2} (-\vec{t} + \vec{n}\sqrt{3}) \times \vec{t} - \frac{\sqrt{3}\dot{\varphi}^2}{4} (\vec{t}\sqrt{3} + \vec{n})$$

$$= -\frac{\sqrt{3}\dot{\varphi}^2}{4} (\vec{t}\sqrt{3} + \vec{n}) - \frac{2\dot{\varphi}^2\sqrt{3}}{2} \vec{k}$$

$$\vec{a}_p^{(cor)} = 2\vec{\omega} \times \vec{v}_p^{(rel)} = 2\dot{\varphi} \vec{e}_z \times \dot{s}\vec{t} = 2\dot{s}\dot{\varphi} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{k}\right)$$

Donque

$$\vec{a}_p = \left(\ddot{s} - \frac{\sqrt{3}\dot{\varphi}^2}{4}\right)\vec{t} - \sqrt{3}\frac{2\dot{\varphi}^2}{4}\vec{n} - \frac{\sqrt{3}}{2}(s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi})\vec{k}$$

Also,

$$\vec{\phi}_P = \overset{(11.1)}{\left(-\frac{mg}{2} + \frac{1}{2}\right)} \vec{E} + \frac{\sqrt{3}mg}{2} \vec{u} + F \vec{K} +$$

$$+ m \left(\ddot{\varphi} - \frac{\sqrt{3}}{4} \dot{\varphi}^2 \right) \vec{E} - \frac{\sqrt{3}m}{4} \dot{\varphi}^2 \vec{u} - \frac{m\sqrt{3}}{2} (2\dot{\varphi} + 2\dot{\varphi}) \vec{K}$$

$$\overset{(11.1)}{=} m\sqrt{3} \left(\frac{g}{2} - \frac{1}{4} \dot{\varphi}^2 \right) \vec{u} + \left(F - m\sqrt{3} \left(\frac{1}{2} \dot{\varphi} + \dot{\varphi} \right) \right) \vec{K}$$