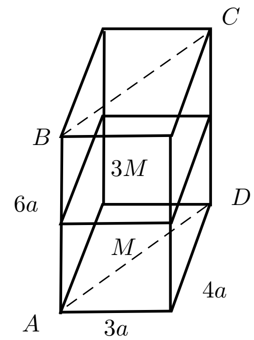
Compito di Meccanica Razionale

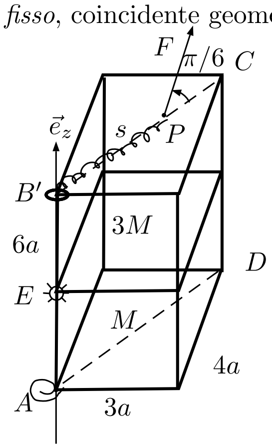
Trieste, 13 settembre 2021. (G. Tondo)

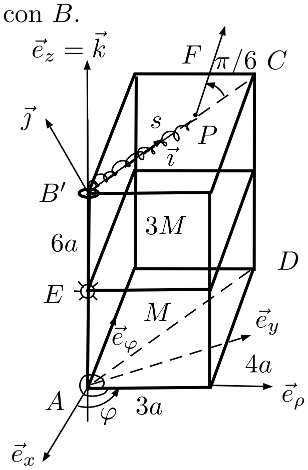
Si consideri un parallelepipedo retto, a base rettangolare composto da due blocchi di uguali dimensioni ma materiali diversi, di massa M e $3M$ come nella figura.

1) Si calcoli il baricentro G e il momento d'inerzia del parallelepipedo rispetto a una retta r passante per i vertici A e B.



Il parallelepipedo suddetto è vincolato a ruotare, come nella figura, attorno all'asse fisso verticale $(A, \vec{e}_z)$ passante per A e B, mediante una cerniera *sferica* fissata all'asse nel punto E, a distanza $3\,a$ dal vertice A, e da un *collare sottile* fissato all'asse fisso in B. Inoltre, un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sulla faccia superiore del parallelepipedo, lungo la diagonale BC. La sollecitazione attiva sul parallelepipedo è data: da una molla *angolare* posta in A e di costante elastica μ e dal peso proprio. La sollecitazione attiva sul punto materiale P è data: dal peso proprio, da una forza $F > 0$ appartenente al piano della faccia superiore del parallelepipedo e formante un angolo di $\pi/6$ con il vettore $C - B$ e da una molla di costante elastica λ, fissata nel punto B' *dell'asse fisso*, coincidente geometricamente con B.





STATICA

Determinare:

2) le configurazioni di equilibrio del modello costituito dal parallelepipedo e dal punto P;

3) la sollecitazione reattiva sul parallelepipedo in E, B e sul punto materiale P, all'equilibrio.

DINAMICA

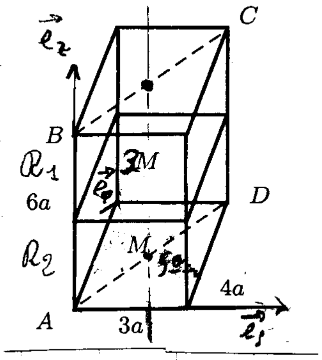
4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto per il modello;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e ricavare il moto del punto P relativo al parallelepipedo in corrispondenza delle condizioni iniziali
$s(0) = s_e, \quad \dot{s}(0) = v_0$;

6) la sollecitazione reattiva sul punto materiale P in dinamica.

Tema del 13/09/2021

Il rigido è costituito da 2 blocchi di densità diverse, quindi non è omogeneo. Considerata la terna solidale al rigido $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $(x_1, x_2, x_3 = z)$ le coordinate cartesiane dei punti del rigido rispetto a tale terna, si ha che la densità $\rho(P) = \rho(z)$, cioè dipende solo dalla coordinata lungo l'asse $\vec{k}$. Dunque, i piani passanti per l'asse del parallelepipedo parallelo a $(O, \vec{k})$ e paralleli alle sue facce, sono piani di simmetria materiale (ortogogonali) ortogonali tra loro. Quindi, il baricentro G appartiene a tali piani e quindi alla loro intersezione. Bisogna stabilire la sua quota. A tale scopo, utilizziamo la proprietà distributiva, sapendo che



$$(1.1) \quad G_2 - A = a\left(\frac{5}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{k}\right)$$

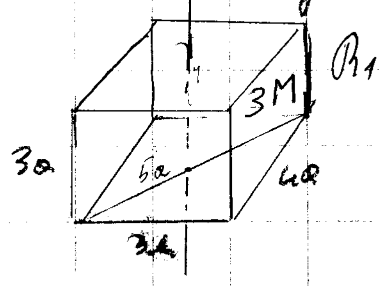
$$(1.2) \quad G_1 - A = a\left(\frac{5}{2}\vec{i} + \left(3 + \frac{3}{2}\right)\vec{k}\right)$$

Dunque,

$$(1.3) \quad G - A = \frac{M(G_2 - A) + 3M(G_1 - A)}{4M} = \frac{a\left(\frac{5}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{k}\right) + 3a\left(\frac{5}{2}\vec{i} + \frac{9}{2}\vec{k}\right)}{4M}$$

$$= \frac{5}{2} a\,\vec{i} + \frac{3}{2}\frac{(1+9)}{4} a\,\vec{k} = a\left(\frac{5}{2}\vec{i} + \frac{15}{4}\vec{k}\right)$$

Per calcolare il momento d'inerzia di R rispetto all'asse AB, divido il rigido nei 2 blocchi omogenei R_1, R_2, quindi



$$I_z^{(R)} = I_z^{(R_1)} + I_z^{(R_2)}$$

Calcolo, prima, il momento d'inerzia dei due blocchi rispetto all'asse $z' \parallel AB$ e passante per i due baricentri G_1, G_2.

$$R_1: \quad I_{z'}^{(R_1)} = \frac{1}{\cancel{12}_4}\cancel{3}M\left((3a)^2 + (4a)^2\right) = \frac{25}{4} M a^2$$

$$R_2: \quad I_{z'}^{(R_2)} = \frac{1}{3} I_{z'} = \frac{25}{12} M a^2$$

Quindi,

$$I_{z'} = \frac{25}{4} Ma^2 + \frac{25}{12} M a^2 = \frac{25}{4} Ma^2\left(1 + \frac{1}{3}\right) = \frac{25}{3} M a^2$$

dove abbiamo tenuto conto che $G \in G_1G_2$.
Possiamo applicare il Teo di Huygens-Steiner per calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse AB:

$$I_z = I_{zG}^{(R)} + 4M\, d^2(z, z') = \frac{25}{3} M a^2 + \left(\frac{5}{2}a\right)^2 4M$$

$$= M a^2 \left(\frac{25}{3} + 25\right) = \frac{100}{3} M a^2$$

Analisi cinematica

Il modello è costituito dall'unione di un rigido $\mathcal{R}$ e un punto materiale P. Il rigido è vincolato ad avere un asse fisso (rotore), mentre il punto P è vincolato a scorrere (senza attrito) sulla faccia superiore del rigido, lungo la diagonale BC. Gli spostamenti virtuali indipendenti sono 2:

(3.1) $\vec{\varepsilon} = \delta\varphi\, \vec{e}_z$ spostamento rotatorio di $\mathcal{R}$,

(3.2) $\delta\vec{x}_P = \delta s\, \vec{\imath}$ spostamento del punto P.

Quindi, il modello ha 2 g.l. e scegliamo come coordinate libere $q = (s, \varphi)$. Inoltre, utilizziamo 3 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fissa (3.3) $\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y$, $\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y$

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ solidale (3.4) $\vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi$

$\mathcal{B}'' = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ solidale

$$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{3}{5} \\ \sin\alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$$

(3.5) $\vec{\imath} = \cos\alpha\, \vec{e}_\rho + \sin\alpha\, \vec{e}_\varphi = \frac{3}{5}\vec{e}_\rho + \frac{4}{5}\vec{e}_\varphi$

$\vec{\jmath} = -\sin\alpha\, \vec{e}_\rho + \cos\alpha\, \vec{e}_\varphi = -\frac{4}{5}\vec{e}_\rho + \frac{3}{5}\vec{e}_\varphi$

(3.6) $\vec{e}_\rho = \frac{3}{5}\vec{\imath} - \frac{4}{5}\vec{\jmath}$, $\vec{e}_\varphi = \frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$

Statica

2. I vincoli sono non dissipativi, bilateri e olonomi. Quindi, possiamo usare le equazioni pure di equilibrio. Allora, dobbiamo calcolare le forze generalizzate (Q_s, Q_φ). A tale scopo, separiamo il contributo delle sollecitazioni conservative da quello "follower":

$$Q_s = Q_s^{(con)} + Q_s^{(foll)} = \frac{\partial(-V)}{\partial s} + Q_s^{(foll)}$$

$$Q_\varphi = Q_\varphi^{(con)} + Q_\varphi^{(foll)} = \frac{\partial(-V)}{\partial \varphi} + Q_\varphi^{(foll)}$$

$$V(s,\varphi) = \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 - 4M\vec{g}\cdot\vec{x}_G \cancel{- m\vec{g}\cdot\vec{x}_P}$$

$$\simeq \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2$$

$$Q_s^{(foll)} = \vec{F}_P^{(foll)}\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial s}, \quad Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}^{(foll)}\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi}$$

$$\vec{F}_P = \frac{F}{2}\left(\vec{\imath} + \sqrt{3}\,\vec{\jmath}\right)$$

$$\vec{x}_P = (P-B) + (B-A) = s\,\vec{\imath} + 6a\,\vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial s} = \vec{\imath} + \cancel{\frac{\partial\vec{\imath}}{\partial s}}, \quad \frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi} = s\frac{\partial\vec{\imath}}{\partial\varphi} = s\vec{\jmath}$$

Infatti dalla (3.5) si trova

$$\frac{\partial\vec{\imath}}{\partial\varphi} = \frac{3}{5}\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} + \frac{4}{5}\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = \frac{3}{5}\vec{e}_\varphi - \frac{4}{5}\vec{e}_\varphi = \vec{\jmath}$$

Dunque,

(5.1)
$$Q_s^{(foll)} = \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i}+\vec{j}\right)\cdot\vec{i} = \frac{F}{2}\sqrt{3}$$
$$Q_\varphi^{(foll)} = \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i}+\vec{j}\right)\cdot s\,\vec{j} = \frac{F}{2}s$$

Quindi

(5.2)
$$Q_s = -\lambda s + \frac{F}{2}\sqrt{3}$$
$$Q_\varphi = -\mu\varphi + F\frac{s}{2}$$

Le eq. pure di equilibrio sono

$$\begin{cases} -\lambda s + \frac{F}{2}\sqrt{3} = 0 & (5.3) \\ -\mu\varphi + F\frac{s}{2} = 0 & (5.4) \end{cases} \iff \begin{cases} s_e = \frac{F\sqrt{3}}{\lambda 2} \\ \varphi_e = \frac{F}{\mu}\frac{s_e}{2} = \frac{F\sqrt{3}}{\mu}\frac{F}{4\lambda} = \frac{F^2\sqrt{3}}{\lambda\mu\, 4} \end{cases}$$

Dunque, $\exists!$ configurazione di equilibrio data da

(5.5)
$$\underline{q}_e = (s_e, \varphi_e) = \left(\frac{F\sqrt{3}}{2\lambda}, \frac{F^2}{\lambda\mu}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

3. Sollecitazione reattiva in E e P all'equilibrio. 6

La cerniera sferica liscia in E e il collare sottile in B producono una sollecitazione reattiva equivalente a

$$(6.1) \quad \mathcal{L}^{(reatt)} = \{(E, \vec{\phi}), (B, \vec{\Psi})\} \quad \text{con } \vec{\Psi}_B \cdot \vec{e}_z = 0,$$

che calcoleremo grazie alle ECS

$$\begin{cases} \vec{R}^{(est,att)} + \vec{\phi}_E + \vec{\Psi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_E^{(est,att)} + (B-E) \times \vec{\Psi}_B = \vec{0} \end{cases}$$

Prima, risolviamo la II ECS rs. a $\vec{\Psi}_B$

$$\vec{\Psi}_B \times (B-E) = \vec{M}_E^{(est,att)}\Big|_{qe} \iff \vec{\Psi}_B = \frac{B-E}{|B-E|^2} \times \vec{M}_E^{(est,att)}\Big|_{qe} + \cancel{f \vec{e}_z} \quad (6.1)$$

dove $\frac{B-E}{|B-E|^2} = \frac{1}{\overline{BE}} \vec{e}_z = \frac{1}{3a} \vec{e}_z$

$$\vec{M}_E^{(est,att)} = -\mu \varphi \vec{e}_z + (G-E) \times 4M\vec{g} + (P-E) \times \vec{F}_P$$

$$(G-E) = (G-A) + (A-E) = \left(\frac{5}{2} a \vec{\imath} + \frac{15}{4} a \vec{k}\right) - 3a\vec{k} = \left(\frac{5}{2}\vec{\imath} + \frac{3}{4}\vec{k}\right) a$$

$$(G-E) \times 4M\vec{g} = \left(\frac{5}{2}\vec{\imath} + \frac{3}{4}\vec{k}\right) a \times (-4Mg\vec{k}) = 10\, Mga\, \vec{j}$$

$$(P-E) = (P-B) + (B-E) = s\vec{\imath} + 3a\vec{k}$$

$$(P-E)\times \vec F_P = \left(s\vec i + 3a\vec k\right)\times\left(\frac{F}{2}\left(\cancel{\sqrt{3}\vec i}+\vec j\right) - mg\vec k - \cancel{\lambda s_e \vec i}\right)$$

(7.1) $$= \frac{F}{2} s\vec k + mgs\vec j - \frac{3}{2} aF\vec i$$

$$= -\frac{3}{2} aF\vec i + mgs_e\vec j + \frac{F}{2} s_e\vec k$$

Quindi,

$$\vec M_E^{(ext,att)} = -\mu\varphi\vec k + 10Mag\vec j + \left(-\frac{3}{2}aF\vec i + mgs_e\vec j + \frac{F}{2}s_e\vec k\right) =$$

(7.2) $$= -\frac{3}{2}aF\vec i + \left(10Mag + mgs_e\right)\vec j + \left(\frac{F}{2}s_e - \mu\varphi\right)\vec k$$

Dunque,

$$\vec\Psi_B = \frac{1}{3a}\vec k\times\left(-\frac{3}{2}aF\vec i + \left(10Mag + mgs_e\right)\vec j + \cancel{\left(\frac{F}{2}s_e - \mu\varphi\right)\vec k}\right) \quad (5.4)$$

(7.3) $$= -\frac{F}{2}\vec j - \frac{1}{3\cancel{a}}\left(10M\cancel{a}g + mg\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F}{\lambda}\right)\vec i$$

$$= -g\left(\frac{10}{3}M + m\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{F}{\lambda}\right)\vec i - \frac{F}{2}\vec j$$

Dalle I ECS,

$$\vec\phi_E = -\vec R^{(ext,att)} - \vec\Psi_B$$

$$\vec R^{(ext,att)} = (4M+m)\vec g + \frac{F}{2}\left(\cancel{\sqrt{3}\vec i} + \vec j\right) - \cancel{\lambda s_e\vec i}$$

(7.4) $$\vec\Phi_E = (4M+m)g\vec k - \cancel{\frac{F}{2}\vec j} + g\left(\frac{10}{3}M + m\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{F}{\lambda}\right)\vec i + \cancel{\frac{F}{2}\vec j}$$

$$= (4M+m)g\vec k + g\left(\frac{10}{3}M + m\frac{\sqrt{3}}{6}\frac{F}{\lambda}\right)\vec i$$

Reazione nel punto P

L'equazione della statica del punto è

$$\vec{R}_P^{(att)} + \vec{\Psi}_P = \vec{0} \qquad \text{dove} \quad \vec{\Psi}_P \cdot \vec{i} = 0 \tag{7.5}$$

$$\vec{R}_P^{(att)} = -\lambda\,(P-B) + m\vec{g} + \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right)$$

$$= -\lambda\, s\,\vec{i} - mg\,\vec{k} + \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right) \tag{7.6}$$

Allora

$$\vec{\Psi}_P = \left(\lambda\, s_e - \frac{F}{2}\sqrt{3}\right)\vec{i} - \frac{F}{2}\,\vec{j} + mg\,\vec{k}\,\Big|_{q_e} \tag{7.7}$$

(5.3)

Dinamica

4) Scriviamo le eq. di Lagrange (EL).

$$K = K^{(R)} + K^{(P)}$$

$$K^{(R)} = \frac{1}{2}\,\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_E(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot\mathbb{I}_E(\vec{e}_z) =$$

(8.1) $$= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_z = \frac{1}{2}\,\frac{100}{3} M a^2 \dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m |\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{x}}_P = \frac{d}{dt}\left(s\vec{i} + 6a\vec{e}_z\right) = \dot{s}\,\vec{i} + s\,\dot{\vec{i}}.$$

Poiché,

(8.2) $$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\times\vec{i} = \dot{\varphi}\,\vec{k}\times\vec{i} = \dot{\varphi}\,\vec{j}$$

(8.3) $$\vec{v}_P = \dot{s}\,\vec{i} + s\dot{\varphi}\,\vec{j}\,, \quad |\vec{v}_P|^2 = \dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2$$

Quindi

$$K^{(P)} = \frac{1}{2} m\left(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{3} M a^2 \dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2} m\left(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2} m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{100}{3} M a^2 + m s^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2}\,[\dot{s}, \dot{\varphi}] \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{100}{3} M a^2 + m s^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{s} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix}$$

Allora,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \quad , \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{s}}\right) = m\ddot{s} \quad , \quad \frac{\partial K}{\partial s} = m s \dot{\varphi}^2$$

(9.1) EL_s:
$$m\ddot{s} - m s \dot{\varphi}^2 = -\lambda s + \frac{F}{2}\sqrt{3}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{100}{3} M a^2 + m s^2\right)\dot{\varphi}, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left(\frac{100}{3} M a^2 + m s^2\right)\ddot{\varphi} + 2 m s \dot{s} \dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

EL_φ:

(9.2)
$$\left(\frac{100}{3} M a^2 + m s^2\right)\ddot{\varphi} + 2 m s \dot{s} \dot{\varphi} = -\mu \varphi + \frac{F s}{2}$$

5) Linearizzazione della EL intorno a q_E

Posto $\underline{x} = \frac{q - q_e}{\varepsilon}$, le eq. linearizzate sono

$$(10.1) \quad A \ddot{\underline{x}} + B \dot{\underline{x}} + C \underline{x} = \underline{0}$$ dove

$$(10.2) \quad A = A(q_e) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{100}{3} Ma^2 + m s_e^2 \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\bigg|_{q_e} = 0$$

$$(10.3) \quad C_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\bigg|_{q_e} = -\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \frac{F}{2} & -\mu \end{bmatrix}$$

Quindi,

$$\begin{cases} m \ddot{x}_1 + \lambda x_1 = 0 & (10.4) \\ \left(\frac{100}{3} Ma^2 + m \frac{3F^2}{4\lambda^2}\right) \ddot{x}_2 - \frac{F}{2} x_1 + \mu x_2 = 0 & (10.5) \end{cases}$$

$$(10.6) \quad x_1(t) = c \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right)$$ integrale generale della (10.4)

$$(10.7) \quad s - s_e = c' \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right)$$ " " nella coord. s

$$\begin{cases} s(0) - s_e = c' \sin\beta & \Rightarrow \beta = 0 \\ \dot{s}(0) = +c' \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right) \sqrt{\frac{\lambda}{m}}\bigg|_{t=0} = c' \cancel{\cos\beta} \sqrt{\frac{\lambda}{m}} & \Rightarrow c' = v_0 \sqrt{\frac{m}{\lambda}} \end{cases}$$

$$s(t) = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{F}{\lambda} + \sqrt{\frac{m}{\lambda}}\, v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t\right)$$

6) Reazione vincolare sul punto P in dinamica

Utilizziamo la seconda legge della dinamica per il punto P.

$$\vec{R}_P^{(est)} + \vec{\varphi}_P' = m\,\vec{a}_P$$

$$\vec{R}_P^{(est)} \overset{(7.6)}{=} -\lambda s \vec{i} - mg\vec{k} + \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right)$$

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\,\vec{i} + s\dot{\varphi}\,\vec{j}\right) = \ddot{s}\,\vec{i} + \dot{s}\,\dot{\vec{i}} + \left(\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{j} + s\dot{\varphi}\,\dot{\vec{j}} =$$

$$= \ddot{s}\,\vec{i} + \dot{s}\dot{\varphi}\,\vec{j} + \left(\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{j} - s\dot{\varphi}^2\,\vec{i}$$

$$= \left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right)\vec{i} + \left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{j}$$

Allora

$$\varphi_P' = -\vec{R}_P^{(est)} + m\,\vec{a}_P$$

$$= +\lambda s\,\vec{i} + mg\,\vec{k} - \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right) +$$

$$+ m\left[\left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right)\vec{i} + \left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{j}\right]$$

$$= \cancel{\left[+\lambda s - \frac{F\sqrt{3}}{2} + m\left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right)\right]}\,\vec{i} + \quad (9.1)$$

$$+\left[-\frac{F}{2} + m\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{j} + mg\,\vec{k}$$

$$= \left[-\frac{F}{2} + m\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\right]\vec{j} + mg\,\vec{K}$$