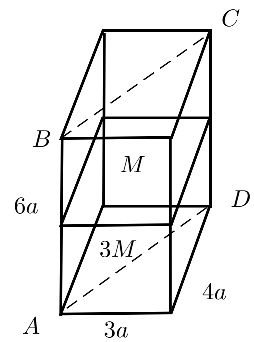
Compito di Meccanica Razionale

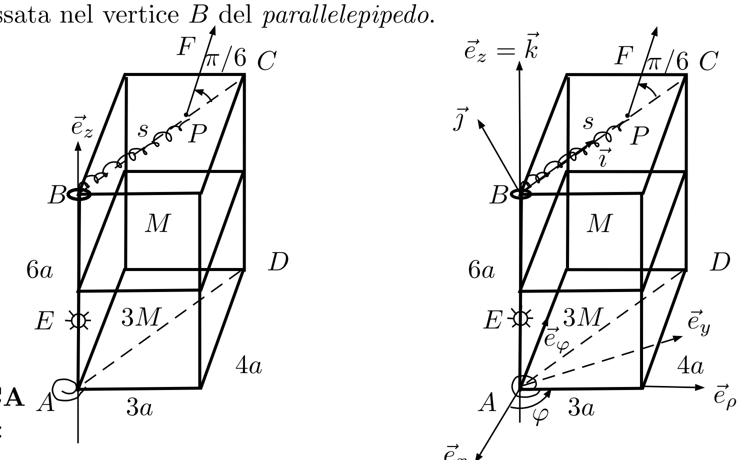
Trieste, 21 giugno 2021. (G. Tondo)

Si consideri un parallelepipedo retto, a base rettangolare composto da due blocchi di uguali dimensioni ma materiali diversi, di massa M e $3M$ come nella figura.

1) Si calcoli il baricentro G e il momento d'inerzia del parallelepipedo rispetto a una retta r passante per i vertici A e B.



Il parallelepipedo suddetto è vincolato a ruotare, come nella figura, attorno all'asse fisso verticale $(A, \vec{e}_z)$ passante per A e B, mediante una cerniera *sferica* fissata all'asse nel punto E, a distanza $(9/4)a$ dal vertice A, e da un *collare sottile* fissato all'asse fisso in B. Inoltre, un punto materiale P di massa m è vincolato a scorrere senza attrito sulla faccia superiore del parallelepipedo, lungo la diagonale BC. La sollecitazione attiva sul parallelepipedo è data: da una molla *angolare* posta in A e di costante elastica μ e dal peso proprio. La sollecitazione attiva sul punto materiale P è data: dal peso proprio, da una forza $F > 0$ appartenente al piano della faccia superiore del parallelepipedo e formante un angolo di $\pi/6$ con il vettore $C - B$ e da una molla di costante elastica λ, fissata nel vertice B del *parallelepipedo*.



STATICA

Determinare:

2) le configurazioni di equilibrio del modello costituito dal parallelepipedo e dal punto P;

3) la sollecitazione reattiva sul parallelepipedo in E, B e sul punto materiale P, all'equilibrio.

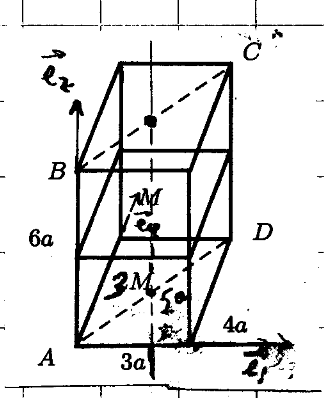
DINAMICA

4) Scrivere un sistema di equazioni differenziali pure di moto per il modello;

5) linearizzare le equazioni di moto intorno alle configurazioni di equilibrio e ricavare il moto del punto P relativo al parallelepipedo in corrispondenza delle condizioni iniziali
$s(0) = s_e, \quad \dot{s}(0) = v_0$;

6) dire se r è un API(E) e calcolare il momento risultante delle reazioni vincolari *dinamiche* su tutto il modello, rispetto a tale polo.

Tema del 21/06/2021



Il rigido è costituito da 2 blocchi di densità diverse, quindi non è omogeneo. Considerata la terna solidale al rigido $(A; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ e $(x_1, x_2, x_3 = z)$ le coordinate cartesiane dei punti del rigido rispetto a tale terna, si ha che la densità $\rho(P) = \rho(z)$, cioè dipende solo dalla coordinata lungo l'asse $\vec{k}$. Dunque, i piani passanti per l'asse del parallelepipedo parallelo a $(O, \vec{k})$ e paralleli alle sue facce, sono piani di simmetria materiale ~~(ortogogonali)~~ ortogonali tra loro. Quindi, il baricentro G appartiene a tali piani e quindi alla loro intersezione. Bisogna stabilire la sua quota. A tale scopo, utilizziamo la proprietà distributiva, sapendo che

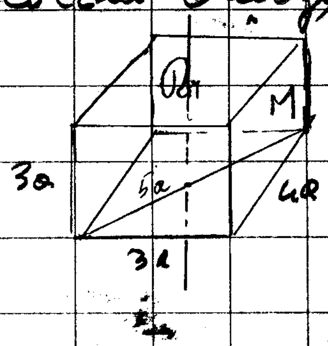
(1.1) $$G_2 - A = a\left(\frac{5}{2}\vec{i} + \frac{3}{2}\vec{k}\right)$$

(1.2) $$G_1 - A = a\left(\frac{5}{2}\vec{i} + \left(3+\frac{3}{2}\right)\vec{k}\right)$$

Dunque,

(1.3) $$G - A = \frac{3\cancel{M}(G_2-A) + \cancel{M}(G_1-A)}{4\cancel{M}} = \frac{3a\left(\frac{5}{2}\vec{i}+\frac{3}{2}\vec{k}\right)+a\left(\frac{5}{2}\vec{i}+\frac{9}{2}\vec{k}\right)}{4} = \frac{5}{2}a\,\vec{i} + \frac{9}{4}a\,\vec{j}$$

Per calcolare il momento di inerzia di R rispetto all'asse AB, divido il rigido nei 2 blocchi omogenei R_1, R_2, quindi



$$I_z^{(R)} = I_z^{(R_1)} + I_z^{(R_2)}$$

Calcolo, prima, il momento d'inerzia dei due blocchi rispetto all'asse $z' \parallel AB$ e passante per i due baricentri G_1, G_2.

$$R_1: \quad I_{z'}^{(R_1)} = \frac{1}{12} M\left((3a)^2 + (4a)^2\right) = \frac{25}{12} M a^2$$

$$R_2: \quad I_{z'}^{(R_2)} = 3\, I_{z'} = \frac{25}{4} M a^2$$

Quindi,

$$I_{z'} = 4\, I_{z'}^{(R_1)} = \frac{25}{3} M a^2$$

dove abbiamo tenuto conto che $G \in G_1G_2$.
Possiamo applicare il Teo di Huygens-Steiner per calcolare il momento d'inerzia rispetto all'asse AB:

$$I_z = I_{zG}^{(R)} + 4M\, d^2(z, z') = \frac{25}{3} M a^2 + \left(\frac{5}{2} a\right)^2 4M$$

$$= M a^2 \left(\frac{25}{3} + \cancel{4}\frac{25}{\cancel{4}}\right) = \frac{100}{3} M a^2$$

Analisi cinematica

Il modello è costituito dall'unione di un rigido $\mathcal{R}$ e un punto materiale P. Il rigido è vincolato ad avere un asse fisso (rotore), mentre il punto P è vincolato a scorrere senza attrito sulla faccia superiore del rigido, lungo la diagonale BC. Gli spostamenti virtuali indipendenti sono 2:

(3.1) $\vec{\varepsilon} = \delta\varphi\, \vec{e}_z$ spostamento rotatorio di $\mathcal{R}$,

(3.2) $\delta \vec{x}_P = \delta s\, \vec{\imath}$ spostamento del punto P.

Quindi, il modello ha 2 g.l. e scegliamo come coordinate libere $q=(s,\varphi)$. Inoltre, utilizzeremo 3 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fissa

(3.3)
$$\vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y$$
$$\vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y$$

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ solidale

(3.4)
$$\vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi$$
$$\vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

$\mathcal{B}'' = (\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ solidale

$\begin{cases} \cos\alpha = \frac{3}{5} \\ \sin\alpha = \frac{4}{5} \end{cases}$

(3.5)
$$\vec{\imath} = \cos\alpha\, \vec{e}_\rho + \sin\alpha\, \vec{e}_\varphi = \frac{3}{5}\vec{e}_\rho + \frac{4}{5}\vec{e}_\varphi$$
$$\vec{\jmath} = -\sin\alpha\, \vec{e}_\rho + \cos\alpha\, \vec{e}_\varphi = -\frac{4}{5}\vec{e}_\rho + \frac{3}{5}\vec{e}_\varphi$$

(3.6)
$$\vec{e}_\rho = \frac{3}{5}\vec{\imath} - \frac{4}{5}\vec{\jmath}$$
$$\vec{e}_\varphi = \frac{4}{5}\vec{\imath} + \frac{3}{5}\vec{\jmath}$$

Statica

2. I vincoli sono non dissipativi, bilateri e olonomi. [4]
Quindi, possiamo usare le equazioni pure di equilibrio. Allora, dobbiamo calcolare le forze generalizzate (Q_s, Q_φ). A tale scopo, separiamo il contributo delle sollecitazioni conservative da quello "follower":

$$Q_s = Q_s^{(con)} + Q_s^{(foll)} = \frac{\partial(-V)}{\partial s} + Q_s^{(foll)}$$

$$Q_\varphi = Q_\varphi^{(con)} + Q_\varphi^{(foll)} = \frac{\partial(-V)}{\partial \varphi} + Q_\varphi^{(foll)}$$

$$V(s,\varphi) = \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2 - 4M\vec{g}\cdot\vec{x}_G - \cancel{m\vec{g}\cdot\vec{x}_P}$$

$$= \frac{1}{2}\mu\varphi^2 + \frac{1}{2}\lambda s^2$$

$$Q_s^{(foll)} = \vec{F}_P^{(foll)}\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial s}, \quad Q_\varphi^{(foll)} = \vec{F}^{(foll)}\cdot\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi}$$

$$\vec{F}_P = \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right)$$

$$\vec{x}_P = (P-B) + (B-A) = s\,\vec{i} + 6a\,\vec{e}_\theta$$

$$\frac{\partial\vec{x}_P}{\partial s} = \vec{i} + \cancel{\frac{\partial\vec{i}}{\partial s}}, \quad \frac{\partial\vec{x}_P}{\partial\varphi} = s\frac{\partial\vec{i}}{\partial\varphi} = s\,\vec{j}$$

Infatti dalla (3.5) si trova

$$\frac{\partial\vec{i}}{\partial\varphi} = \frac{3}{5}\frac{\partial\vec{e}_\xi}{\partial\varphi} + \frac{4}{5}\frac{\partial\vec{e}_\eta}{\partial\varphi} = \frac{3}{5}\vec{e}_\eta - \frac{4}{5}\vec{e}_\xi = \vec{j}$$

Dunque,

(5.1)
$$Q_s^{(foll)} = \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i}+\vec{j}\right)\cdot\vec{i} = \frac{F}{2}\sqrt{3}$$

$$Q_\varphi^{(foll)} = \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i}+\vec{j}\right)\cdot s\,\vec{j} = \frac{F}{2}s$$

Quindi

(5.2)
$$Q_s = -\lambda s + F\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$Q_\varphi = -\mu\varphi + F\frac{s}{2}$$

le eq. pure di equilibrio sono

(5.3), (5.4)
$$\begin{cases} -\lambda s + F\dfrac{\sqrt{3}}{2} = 0 \\ -\mu\varphi + F\dfrac{s}{2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} s_e = \dfrac{F}{\lambda}\dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \varphi_e = \dfrac{F}{\mu}\dfrac{s_e}{2} = \dfrac{F}{\mu}\dfrac{F\sqrt{3}}{\lambda\cdot 4} = \dfrac{F^2\sqrt{3}}{\lambda\mu\,4} \end{cases}$$

Dunque, $\exists!$ configurazione di equilibrio data da

(5.5)
$$\underline{q}_e = (s_e, \varphi_e) = \left(\frac{F}{\lambda}\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{F^2}{\lambda\mu}\frac{\sqrt{3}}{4}\right)$$

3. Sollecitazione reattiva in E, B, P all'equilibrio.

La cerniera sferica liscia in E e il collare rotante in B producono una sollecitazione reattiva equivalente

$$(6.1) \quad \mathcal{L}^{(reatt)} = \left\{ (E, \vec{\phi}), (B, \vec{\Psi}) \right\} \quad \text{con } \vec{\Psi}_B \cdot \vec{e}_z = 0,$$

che calcoleremo grazie alle ECS

$$\begin{cases} \vec{R}_e^{(est,att)} + \vec{\phi}_E + \vec{\Psi}_B = \vec{0} \\ \vec{M}_E^{(est,att)} + (B-E) \times \vec{\Psi}_B = \vec{0} \end{cases}$$

Prima, risolviamo la II ECS rs. a $\vec{\Psi}_B$

$$\vec{\Psi}_B \times (B-E) = \vec{M}_{E|_{qe}}^{(est,att)} \iff \vec{\Psi}_B = \frac{B-E}{|B-E|^2} \times \vec{M}_{E|_{qe}}^{(est,att)} + \cancel{f \vec{e}_z} \quad (6.1)$$

dove $\frac{B-E}{|B-E|^2} = \frac{1}{\overline{BE}} \vec{e}_z = \frac{1}{\left(6 - \frac{9}{4}\right)a} \vec{e}_z = \frac{4}{15a} \vec{e}_z$

$$\vec{M}_E^{(est,att)} = -\mu \varphi \vec{e}_z + (G-E) \times 4M\vec{g} + (P-E) \times \vec{F}_P$$

$$(G-E) = (G-A) + (A-E) = \left(\frac{5}{2} a \vec{i} + \cancel{\frac{9}{4} a \vec{k}}\right) \cancel{- \frac{9}{4} a \vec{k}} = \frac{5}{2} a \vec{i}$$

$$(G-E) \times 4M\vec{g} = \frac{5}{2} a \vec{i} \times (-4Mg\vec{k}) = 10\, Mga\, \vec{j}$$

$$(P-E) = (P-B) + (B-E) = 5\vec{i} + \left(6a - \frac{9}{4}a\right)\vec{k} = 5\vec{i} + \frac{15}{4} a \vec{k}$$

$$(P-E)\times\vec{F}_P = \left(s\vec{i}+\frac{15}{4}a\vec{k}\right)\times\left(\frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}\right)-mg\vec{k}\right) =$$ 7

$$(7.1)\qquad = \frac{F}{2}s\vec{k}+mgs\vec{j}+\frac{15}{8}aF\left(\sqrt{3}\vec{j}-\vec{i}\right)$$

$$= -\frac{15}{8}aF\vec{i}+\left(mgs+\frac{15}{8}\sqrt{3}aF\right)\vec{j}+\frac{F}{2}s\vec{k}$$

Quindi,

$$\vec{M}_E^{(est,att)} = -\mu\varphi\vec{k}+10Mag\vec{j}+\left(-\frac{15}{8}aF\vec{i}+\left(mgs+\frac{15}{8}\sqrt{3}aF\right)\vec{j}+\frac{F}{2}s\vec{k}\right)$$

$$(7.2)\qquad = -\frac{15}{8}aF\vec{i}+\left(10Mag+\frac{15}{8}\sqrt{3}aF+mgs\right)\vec{j}+\left(\frac{F}{2}s-\mu\varphi\right)\vec{k}$$

Dunque,

$$\vec{\Psi}_B = \frac{4}{15a}\vec{k}\times\left(-\frac{15}{8}aF\vec{i}+\left(10Mag+\frac{15}{8}\sqrt{3}aF+mgs_e\right)\vec{j}+\cancel{\left(\frac{F}{2}s_e-\mu\varphi_e\right)\vec{k}}\right)$$

$$= -\frac{F}{2}\vec{j}-\frac{4}{15a}\left(10M\cancel{a}g+\frac{15}{8}\sqrt{3}\cancel{a}F+mg\frac{F\sqrt{3}}{a\lambda\,2}\right)\vec{i} =$$

$$= -\left(\frac{8}{3}Mg+\frac{\sqrt{3}}{2}F+\frac{2\sqrt{3}}{15}\frac{F}{a\lambda}mg\right)\vec{i}-\frac{F}{2}\vec{j}$$

Dalla I ECS,

$$\vec{\Phi}_E = -\vec{R}^{(est,att)}-\vec{\Psi}_B$$

$$\vec{R}^{(est,att)} = (4M+m)\vec{g}+\frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}\right)$$

$$\vec{\Phi}_E = (4M+m)g\vec{k}-\frac{F}{2}\cancel{\left(\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}\right)}+\cancel{\frac{F}{2}\vec{j}}+\left(\frac{8}{3}Mg+\cancel{\frac{F\sqrt{3}}{2}}+\frac{2\sqrt{3}}{15}\frac{F}{a\lambda}mg\right)\vec{i}$$

$$= (4M+m)g\vec{k}+\left(\frac{8}{3}M+\frac{2\sqrt{3}}{15}\frac{F}{a\lambda}m\right)g\vec{i}$$

Reazione nel punto P

L'equazione della statica del punto è

$$\vec{R}^{(att)} + \vec{\Psi}_P = \vec{0} \qquad \text{dove} \quad \vec{\Psi}_P \cdot \vec{i} = 0$$

$$\vec{R}^{(att)} = -\lambda (P-B) + m\vec{g} + \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right)$$

$$= -\lambda s \vec{i} - mg\vec{k} + \frac{F}{2}\left(\sqrt{3}\,\vec{i} + \vec{j}\right)$$

Allora

$$\vec{\Psi}_P = \left(\lambda s_e - \frac{F}{2}\sqrt{3}\right)\vec{i} - \frac{F}{2}\vec{j} + mg\vec{k}\,\Big|_{q_e}$$

(5.3)

4) Scriviamo le eq. di Lagrange (EL).

$$K = K^{(R)} + K^{(P)}$$

$$K^{(R)} = \frac{1}{2}\vec{\omega}\cdot \mathbb{I}_E(\vec{\omega}) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z\cdot\mathbb{I}_E(\vec{e}_z) =$$

$$= \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_z = \frac{1}{2}\frac{100}{3}Ma^2\dot{\varphi}^2$$

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}m|\vec{v}_P|^2$$

$$\vec{v}_P = \dot{\vec{x}}_P = \frac{d}{dt}\left(s\vec{i} + 6a\vec{e}_z\right) = \dot{s}\,\vec{i} + s\,\dot{\vec{i}}.$$

Poiché,

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\times\vec{i} = \dot{\varphi}\,\vec{k}\times\vec{i} = \dot{\varphi}\,\vec{j}$$

$$\vec{v}_P = \dot{s}\,\vec{i} + s\dot{\varphi}\,\vec{j}\,, \quad |\vec{v}_P|^2 = \dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2$$

Quindi

$$K^{(P)} = \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2\right)$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{100}{3}Ma^2\dot{\varphi}^2\right) + \frac{1}{2}m\left(\dot{s}^2 + s^2\dot{\varphi}^2\right) = \frac{1}{2}m\dot{s}^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{100}{3}Ma^2 + ms^2\right)\dot{\varphi}^2$$

$$= \frac{1}{2}\left[\dot{s},\dot{\varphi}\right]\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{100}{3}Ma^2 + ms^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{s}\\ \dot{\varphi}\end{bmatrix}$$

Allora,

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{s}} = m\dot{s} \ , \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{s}}\right) = m\ddot{s} \ , \ \frac{\partial K}{\partial s} = m s \dot{\varphi}^2$$

$$EL_s: \quad m\ddot{s} - m s \dot{\varphi}^2 = -\lambda s + F\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}} = \left(\frac{100}{3} M\ell^2 + m s^2\right)\dot{\varphi} \ , \ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial \dot{\varphi}}\right) = \left(\frac{100}{3} M\ell^2 + m s^2\right)\ddot{\varphi} + 2ms\dot{s}\varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial \varphi} = 0$$

EL_φ:

$$\left(\frac{100}{3} M\ell^2 + m s^2\right)\ddot{\varphi} + 2ms\dot{s}\varphi = -\mu\varphi + \frac{Fs}{2}$$

5) Linearizzazione delle EL intorno a q_E

Posto $\underline{x} = \frac{q - q_e}{\varepsilon}$, le eq. linearizzate sono

$$(10.1)\quad A\,\ddot{\underline{x}} + B\,\dot{\underline{x}} + C\,\underline{x} = \underline{0} \quad \text{dove}$$

$$(10.2)\quad A = A(q_e) = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & \frac{100}{3} Ma^2 + m s_e^2 \end{bmatrix}, \quad B_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial \dot{q}_j}\Big|_{q_e} = 0$$

$$(10.3)\quad C_{ij} = \frac{\partial Q_i}{\partial q_j}\Big|_{q_e} = -\begin{bmatrix} -\lambda & 0 \\ \frac{F}{2} & -\mu \end{bmatrix}$$

Quindi,

$$\begin{cases} (10.4)\quad m\,\ddot{x}_1 + \lambda\, x_1 = 0 \\ (10.5)\quad \left(\frac{100}{3} Ma^2 + m\frac{3F^2}{2\lambda^2}\right)\ddot{x}_2 - \frac{F}{2}\, x_1 + \mu\, x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(10.6)\quad x_1(t) = c \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right) \quad \text{integrale generale della (10.4)}$$

$$(10.7)\quad s - s_e = c' \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right) \quad \text{" " nella coord. } s$$

$$\begin{cases} s(0) - s_e = c' \sin\beta & \Rightarrow \beta = 0 \\ \dot{s}(0) = +c' \cos\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t + \beta\right)\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\Big|_{t=0} = +c' \cos\beta\sqrt{\frac{\lambda}{m}} & \Rightarrow c' = v_0\sqrt{\frac{m}{\lambda}} \end{cases}$$

$$s(t) = s_e + \sqrt{\frac{m}{\lambda}}\, v_0 \sin\left(\sqrt{\frac{\lambda}{m}}\, t\right)$$

6) Momento delle reazioni vincolari rispetto ad E

Scriviamo la II ECD ridotta con polo in E

$$\vec{M}_E^{(est,att)} + \vec{M}_E^{(est,reatt)} = \frac{d\vec{L}_E}{dt}\,,$$

e proiettiamola nel piano $\perp$ all'asse $\vec{e}_z$

$$\vec{M}_E^{(est,reatt)} = -\vec{M}_{E\perp}^{(est,att)} + \left(\frac{d\vec{L}_E}{dt}\right)_\perp .$$

Dalla (7.2) otteniamo

$$\vec{M}_{E\perp}^{(est,att)} = -\frac{15}{8}aF\vec{i} + \left(10Mag + \frac{15}{8}\sqrt{3}\,aF + mgs\right)\vec{j}$$

$$\frac{d\vec{L}_E}{dt} = \frac{d\vec{L}_E^{(R)}}{dt} + \frac{d\vec{L}_E^{(punto)}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_E^{(R)}}{dt} = \mathbb{I}_E(\dot{\vec{\omega}}) + \vec{\omega}\times\mathbb{I}_E(\vec{\omega}) = \ddot{\varphi}\,\mathbb{I}_E(\vec{k}) + \dot{\varphi}^2\,\vec{k}\times\mathbb{I}_E(\vec{k})$$

Quindi,

$$\left(\frac{d\vec{L}_E^{(R)}}{dt}\right)_\perp = \ddot{\varphi}\,\vec{k}\times\cancel{\left(\mathbb{I}_E(\vec{k})\times\vec{k}\right)} + \dot{\varphi}^2\,\cancel{\vec{k}\times\mathbb{I}_E(\vec{k})} = 0$$

poiché $(E,\vec{k})$ è API per R.

Rimane da calcolare

$$\frac{d\vec{L}_{E\perp}^{(punto)}}{dt}$$

$$\vec{L}_E^{(punto)} = (P-E)\times m\vec{v}_P$$

$$\frac{d\vec{L}_E^{(punto)}}{dt} = \cancel{(\vec{v}_P-\vec{v}_E)}\times m\vec{v}_P + (P-E)\times m\vec{a}_P = (P-B)+(B-E)\times m\vec{a}_P$$

$$\vec{a}_P = \dot{\vec{v}}_P = \frac{d}{dt}\left(\dot{s}\vec{i} + s\dot{\varphi}\vec{j}\right) = \ddot{s}\vec{i} + \dot{s}\dot{\vec{i}} + (\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi})\vec{j} + s\dot{\varphi}\dot{\vec{j}}$$

Tenendo conto che

$$\dot{\vec{i}} = \vec{\omega}\times\vec{i} = \dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{i} = \dot{\varphi}\vec{j}, \quad \dot{\vec{j}} = \vec{\omega}\times\vec{j} = \dot{\varphi}\vec{k}\times\vec{j} = -\dot{\varphi}\vec{i}$$

$$\vec{a}_P = (\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2)\vec{i} + (s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi})\vec{j}$$

si ottiene

$$\frac{d\vec{L}_E^{(punto)}}{dt} = m\left(s\vec{i} + \frac{15}{4}a\vec{k}\right)\times\left[(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2)\vec{i} + (s\ddot{\varphi} + 2\dot{s}\dot{\varphi})\vec{j}\right] =$$

$$= m\left[-\frac{15}{4}a\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{i} + \frac{15}{4}a\left(\ddot{s} - s\dot{\varphi}^2\right)\vec{j} + \left(2s\dot{s}\dot{\varphi} + s^2\ddot{\varphi}\right)\vec{k}\right]$$

Dunque,

$$\vec{M}_E^{(est,reatt)} = -\frac{15}{8}aF\vec{i} + \left(10Mag + \frac{15}{8}\sqrt{3}\,aF + mgs\right)\vec{j} +$$

$$+ m\left[-\frac{15}{4}a\left(2\dot{s}\dot{\varphi} + s\ddot{\varphi}\right)\vec{i} + \frac{15}{4}\left(\ddot{s} + \dot{s}\dot{\varphi}\right)\vec{j}\right]$$

N.B. La proiezione della II E(D) lungo il versore $\vec{k}$, coincide con la ELφ. Verificarlo per esercizio.