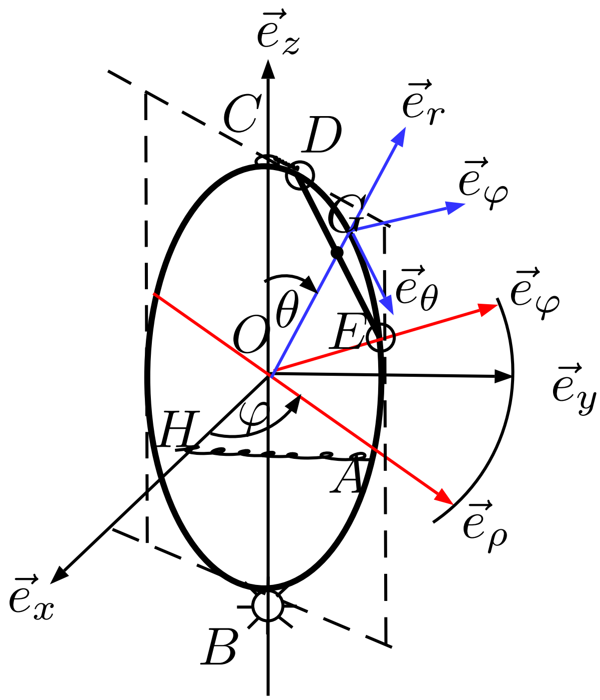
Compito di Meccanica Razionale

Trieste, 30 gennaio 2023

(G. Tondo)



Un anello omogeneo, di massa M e raggio R, è vincolato ad un asse fisso verticale $(O, \vec{e}_z)$ mediante un anellino in C e una cerniera sferica fissa in B. Un'asta omogenea di massa m e lunghezza R ha gli estremi D ed E vincolati sulla circonferenza con due cerniere sferiche scorrevoli. Una molla di costante elastica b collega l'estremo dell'asta D con il punto C dell'anello. Un'altra molla, di costante elastica c, collega A, punto medio di una delle semicirconferenze $\widehat{BC}$, con un punto H fissato all'asse orizzontale $(O, \vec{e}_x)$ a distanza R da O. Tutti i vincoli sono supposti lisci e bilateri. Scelte come coordinate libere gli angoli $0 \leq \varphi < 2\pi$ e $0 \leq \theta < 2\pi$ della figura, si chiede di:

STATICA

1) Individuare le configurazioni di equilibrio del modello e discuterne la stabilità.

Posto, da ora in poi, $b = \frac{mg}{R}$, disegnarle e determinare:

2) le reazioni vincolari esterne sull'anello nei punti B e C nella configurazione di equilibrio stabile;

3) le reazioni vincolari dell'anello sull'asta nei punti D ed E nella configurazione di equilibrio stabile.

DINAMICA

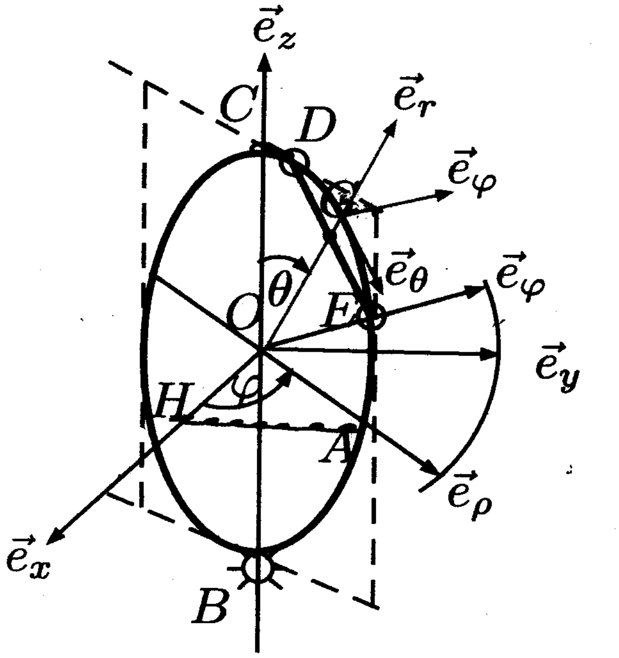
4) Scrivere le equazioni differenziali pure di moto;

5) linearizzare l'equazioni di moto intorno alla configurazione di equilibrio stabile e trovare le frequenze delle piccole oscillazioni;

6) classificare il campo di velocità dell'asta DE.

Tema del 30/01/2023

Il modello è formato da un rigido con asse fisso, l'anello, e un altro rigido, l'asta, vincolato al primo. Con il metodo dei congelamenti successivi si deduce che il modello ha 2 g.l. Quindi, può essere descritto dalle coordinate libere della figura $q = (\varphi, \theta)$ con



$$0 \leq \varphi < 2\pi \,, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \,.$$

Consideriamo le 3 basi:

$\mathcal{B} = (\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$: "fissa"

$\mathcal{B}' = (\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$: solidale all'anello

$\mathcal{B}'' = (\vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_r)$: solidale all'asta

$$(1.1) \begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\varphi\, \vec{e}_x + \sin\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_\varphi = -\sin\varphi\, \vec{e}_x + \cos\varphi\, \vec{e}_y \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases} \qquad (1.2) \begin{cases} \vec{e}_x = \cos\varphi\, \vec{e}_\rho - \sin\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_y = \sin\varphi\, \vec{e}_\rho + \cos\varphi\, \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = \vec{e}_z \end{cases}$$

$$(1.3) \begin{cases} \vec{e}_\theta = \cos\theta\, \vec{e}_\rho - \sin\theta\, \vec{e}_z \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_r = \sin\theta\, \vec{e}_\rho + \cos\theta\, \vec{e}_z \end{cases} \qquad (1.4) \begin{cases} \vec{e}_\rho = \cos\theta\, \vec{e}_\theta + \sin\theta\, \vec{e}_r \\ \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi \\ \vec{e}_z = -\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_r \end{cases}$$

Quindi,

(2.1) $\vec{x}_G = G-O = \overline{OG}\ \vec{e}_r = \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r = \frac{\sqrt{3}}{2} R\left(\sin\theta\,\vec{e}_\rho + \cos\theta\,\vec{e}_z\right)$

(2.2) $G-B = (G-O)+(O-B) = \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r - R\,\vec{e}_z$

(2.3) $C-D = (C-O)+(O-D) = C-O+(O-G)+(G-D) = R\,\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}R\,\vec{e}_r + \frac{R}{2}\vec{e}_\theta$

$=$

(2.4) $A-H = (A-O)+(O-H) = R\,\vec{e}_\rho - R\,\vec{e}_x$

$$|C-D|^2 = R\left(\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r + \frac{1}{2}\vec{e}_\theta\right)\cdot R\left(\vec{e}_z - \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r + \frac{1}{2}\vec{e}_\theta\right)$$

(2.5)
$$= R^2\left(1 - \sqrt{3}\,\vec{e}_z\cdot\vec{e}_r + \vec{e}_z\cdot\vec{e}_\theta + \frac{3}{4} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cancel{\vec{e}_r\cdot\vec{e}_\theta} + \frac{1}{4}\right)$$
$$= R^2\left(1 - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta + \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\right) =$$
$$= R^2\left(2 - \sqrt{3}\cos\theta - \sin\theta\right)$$

(2.6) $|A-H|^2 = R^2\left(\vec{e}_\rho - \vec{e}_x\right)\cdot\left(\vec{e}_\rho - \vec{e}_x\right) = R^2\left(1 - 2\,\vec{e}_\rho\cdot\vec{e}_x + 1\right) = R^2\left(2 - 2\cos\varphi\right)$

(2.7) $D-O = (D-G)+(G-O) = -\frac{R}{2}\vec{e}_\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r$

(2.8) $E-O = (E-G)+(G-O) = \frac{R}{2}\vec{e}_\theta + \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r$

N.B

Statica

La sollecitazione attiva è conservativa poiché è costituita dal peso proprio del modello e dalla forza di richiamo delle molle che hanno, entrambe, un estremo fisso. Dunque, possiamo utilizzare il teorema di stazionarietà dell'energia potenziale V per trovare le configurazioni di equilibrio.

(3.1)
$$V(\varphi,\theta) = \cancel{-M\,\vec{x}_O\cdot\vec{g}} - m\,\vec{x}_G\cdot\vec{g} + \frac{1}{2}\left(b\,\overline{CD}^2 + c\,\overline{AH}^2\right)$$
$$= -m\frac{\sqrt{3}}{2}R\,\vec{e}_\rho\cdot(-g\,\vec{e}_z) + \frac{1}{2}bR^2(2-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta) + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}cR^2(1-\cos\varphi)$$
$$= mg\frac{\sqrt{3}}{2}R\cos\theta + \frac{1}{2}bR^2(2-\sqrt{3}\cos\theta-\sin\theta) + cR^2(1-\cos\varphi)$$

Calcoliamo i punti stazionari della funzione V

(3.2)
$$\frac{\partial V}{\partial\varphi} = cR^2\sin\varphi = -Q_\varphi$$

(3.3)
$$\frac{\partial V}{\partial\theta} = -mg\frac{\sqrt{3}}{2}R\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}bR^2\sin\theta - \frac{1}{2}bR^2\cos\theta = -Q_\theta$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2}R(-mg+bR)\sin\theta - \frac{1}{2}bR^2\cos\theta = -Q_\theta$$

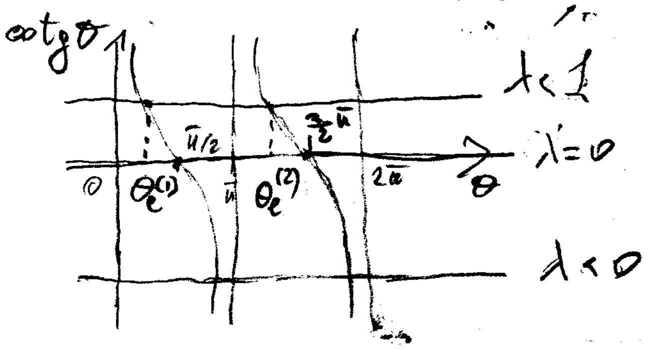
Quindi, dobbiamo risolvere il sistema

(3.4)
$$\begin{cases} \sin\varphi = 0 \\ bR\cos\theta = \sqrt{3}(-mg+bR)\sin\theta \end{cases}$$

Poiché $\theta=0$ NON è soluzione della II eq., il sistema (3.4) equivale a

(3.5)
$$\begin{cases} \varphi = 0 \text{ vel } \varphi = \pi \\ \cot\theta = \sqrt{3}\left(1-\frac{mg}{bR}\right) = \sqrt{3}\lambda \end{cases}$$

Come al solito, risolviamo la II eq. del sistema (3.5) graficamente



È evidente che $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ la II eq. ha 2 soluzioni date da

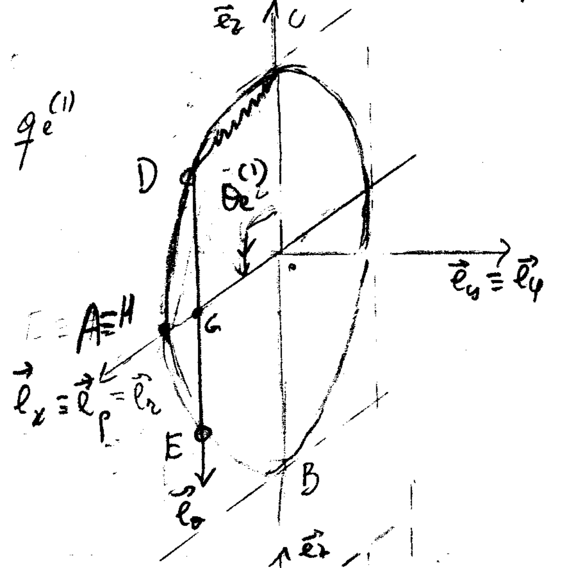
$$\theta_e^{(1)} = \operatorname{arccotg}(\sqrt{3}\,\lambda)$$

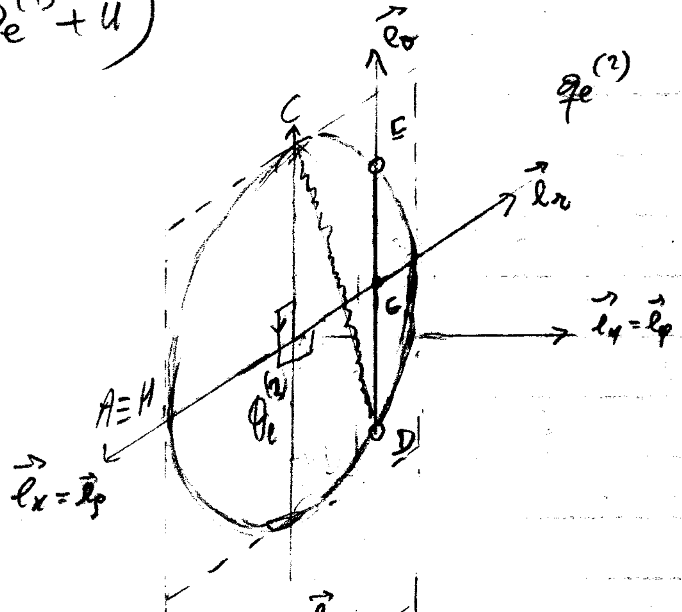
$$\theta_e^{(2)} = \theta_e^{(1)} + \pi$$

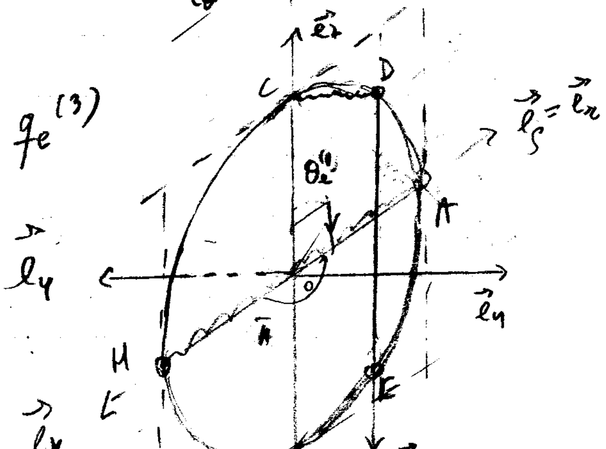
Dunque, il modello ammette 4 configurazioni di equilibrio

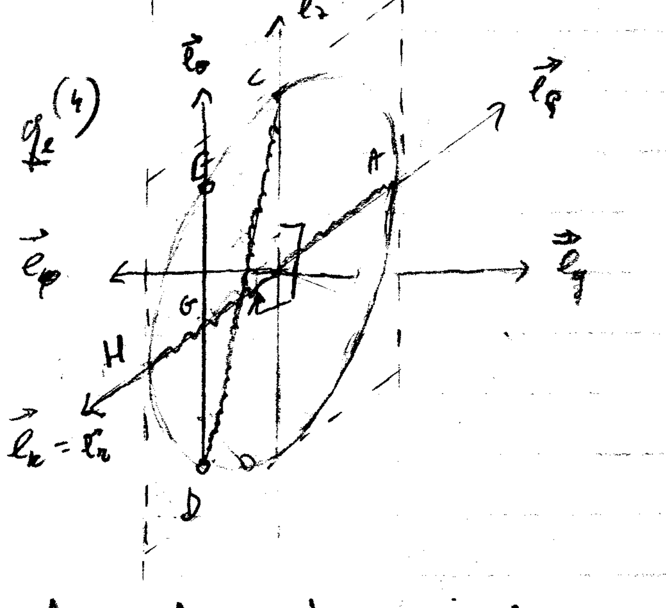
$$q_e^{(1)} = (0, \theta_e^{(1)}) \quad , \quad q_e^{(2)} = (0, \theta_e^{(1)} + \pi)$$

$$q_e^{(3)} = (\pi, \theta_e^{(1)}) \quad , \quad q_e^{(4)} = (\pi, \theta_e^{(1)} + \pi)$$









N.B. Le configurazioni di equilibrio sono disegnate per $b = \frac{mg}{R}$

Per studiarne la stabilità applichiamo i Teo. di Dirichlet-Lagrange e di . Quindi, calcoliamo la matrice Hessiana di V nelle configurazioni di equilibrio.

$$(5.1)\quad \frac{\partial^2 V}{\partial \varphi^2} = cR^2\cos\varphi\,, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta\partial\varphi} = 0, \qquad \frac{\partial^2 V}{\partial\theta^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}R\left(-mg+bR\right)\cos\theta + \frac{1}{2}bR^2\sin\theta = +\frac{bR^2}{2}\left(\sqrt{3}\lambda\cos\theta + \sin\theta\right)$$

Quindi,

$$(5.2)\quad \mathcal{H}_{V|q_e} = \begin{bmatrix} cR^2\cos\varphi_e & 0 \\ 0 & \frac{bR^2}{2}\sin\theta_e\,(3\lambda^2+1) \end{bmatrix}$$

Dunque

$$(5.3)\quad \mathcal{H}_{11}\Big|_{q_e^{(1)}} = cR^2 > 0\,, \quad \det\mathcal{H}\Big|_{q_e^{(1)}} = cR^2\frac{bR^2}{2}\sin\theta_e^{(1)}(3\lambda^2+1) > 0$$

$\Rightarrow q_e^{(1)}$ è un punto di min $\Rightarrow$ stabile.

$$(5.4)\quad \mathcal{H}_{11}\Big|_{q_e^{(2)}} = cR^2 > 0\,, \quad \det\mathcal{H}\Big|_{q_e^{(2)}} = \frac{bcR^4}{2}\sin\theta_e^{(2)}(3\lambda^2+1) < 0$$

$\Rightarrow q_e^{(2)}$ è un punto di sella per $V \Rightarrow$ instabile

$$(5.5)\quad \mathcal{H}_{11}\Big|_{q_e^{(3)}} = -cR^2 < 0, \Rightarrow q_e^{(3)} \text{ è un punto di sella} \Rightarrow \text{instabile}$$

$$\det\mathcal{H}\Big|_{q_e^{(3)}} = -\frac{bcR^4}{2}\sin\theta_e^{(3)}(3\lambda^2+1) < 0$$

$$(5.6)\quad \mathcal{H}_{11}\Big|_{q_e^{(4)}} = -cR^2 < 0 \Rightarrow q_e^{(4)} \text{ è un punto di } \text{max.} \Rightarrow \text{instabile}$$

$$\det\mathcal{H}\Big|_{q_e^{(4)}} = -\frac{bcR^4}{2}\sin\theta_e^{(4)}(3\lambda^2+1) > 0$$

In particolare, se $b = \frac{mg}{R}$ risulta che $\lambda = 0$, quindi

$$(5.7)\quad \theta_e = \operatorname{arccotg}(0) = \frac{\pi}{2}$$

quindi

$$(5.8)\quad q_e^{(1)} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

2) Reazioni vincolari in B e C nell'anello, in $q_e^{(1)} = \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$

Dall'ipotesi di vincoli lisci, segue che

$$\mathcal{L}^{(est, reat)} = \left\{ \left(B, \vec{\Phi}\right), \left(C, \vec{\Psi}\right) \right\} \text{ con } \vec{\Psi}_C \cdot \vec{e}_z = 0$$

Comunque, in tutte le configurazioni di equilibrio, poiché $\varphi = 0$ oppure $\varphi = \pi$, il problema si riduce ad uno piano, cioè

$$\vec{\Phi}_B = \phi_x \vec{e}_x + \phi_z \vec{e}_z \quad , \quad \vec{\Psi}_C = \psi_x \vec{e}_x$$

Allora, scriviamo le II ECS e proiettiamole lungo i versori $\vec{e}_x, \vec{e}_z$

$$\begin{cases} \vec{\Phi}_B + \vec{\Phi}_C + \vec{R}^{(est, att)} = \vec{0} \\ (C-B) \times \vec{\Phi}_C + \vec{M}_B^{(est, att)} = \vec{0} \end{cases} \quad \text{dove} \quad \vec{R}^{(est, att)}\Big|_{q_e^{(1)}} = (M+m)\vec{g} - \cancel{c(A-H)}$$

$$\vec{M}_B^{(est, att)}\Big|_{q_e^{(1)}} = (G-B) \times m\vec{g} + (A-B) \times \cancel{-c(A-H)}$$

$$(C-B) \times \vec{\phi}_C = 2R\, \vec{e}_z \times \psi_x \vec{e}_x = 2R \psi_x \vec{e}_y$$

Allora,

$$\vec{R}^{(est, att)}_{q_e^{(1)}} = -(M+m) g\, \vec{e}_z$$

$$\vec{M}_B^{(est, att)}\Big|_{q_e^{(1)}} = \left[(G-O)+(O-B)\right] \times \left(-mg\,\vec{e}_z\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} R\, \vec{e}_r \times \left(-mg\, \vec{e}_z\right)$$

$$= -mg \frac{\sqrt{3}}{2} R\, \vec{e}_r \times \vec{e}_z = \sin\theta_e\, mgR\frac{\sqrt{3}}{2}\, \vec{e}_\varphi \Big|_{q_e^{(1)}} = mgR\frac{\sqrt{3}}{2} \vec{e}_y$$

Quindi

$$\begin{array}{l} \vec{e}_x \\ \vec{e}_z \\ \vec{e}_y \end{array} \begin{cases} \phi_x + \psi_x = 0 \\ \phi_z - (M+m) g = 0 \\ 2\cancel{R}\, \psi_x + \frac{\sqrt{3}}{2} mg \cancel{R} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \phi_x = +\frac{\sqrt{3}}{4} mg \\ \phi_z = (M+m) g \\ \psi_x = -\frac{\sqrt{3}}{4} mg \end{cases}$$

3) Reazioni vincolari in E e D sull'asta, in $q_e^{(1)}=\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$

Nelle configurazioni di equilibrio il problema è piano e dall'Hp. di vincoli lisci

$$\mathcal{L}^{(int\to asta)} = \left\{(D,\vec{\xi}),(E,\vec{\eta})\right\} \quad \text{con} \quad \begin{aligned}\vec{\xi}_D &= \xi \text{ vers}(D-O)\\ \vec{\eta}_E &= \eta \text{ vers}(E-O)\end{aligned}$$

Quindi

$$\vec{\xi}_D \overset{(2.7)}{=} \xi\left(-\frac{\vec{e}_\theta+\sqrt{3}\,\vec{e}_r}{2}\right), \quad \vec{\eta}_E \overset{(2.8)}{=} \eta\left(\frac{\vec{e}_\theta+\sqrt{3}\,\vec{e}_r}{2}\right)$$

Applichiamo la IECS all'asta DE

$$\vec{\xi}_D+\vec{\eta}_E+\vec{R}^{(est,att\to asta)}_{|q_e^{(1)}} = \vec{0}$$

$$\vec{R}^{(est,att\to asta)}_{|q_e^{(1)}} = m\vec{g}-b(D-C) = -mg\,\vec{e}_z + bR\left(\vec{e}_z-\frac{\sqrt{3}}{2}\vec{e}_r{}_{|q_e^{(1)}}+\frac{1}{2}\vec{e}_\theta{}_{|q_e^{(1)}}\right)$$

$$=(bR-mg)\,\vec{e}_z+\frac{bR}{2}\left(-\sqrt{3}\,\vec{e}_r+\vec{e}_\theta\right)_{|q_e^{(1)}}$$

$$\overset{(1.4)}{=}(bR-mg)\left(-\sin\theta_e\,\vec{e}_\theta+\cos\theta_e\,\vec{e}_r\right)_{|q_e^{(1)}}+\frac{bR}{2}\left(-\sqrt{3}\,\vec{e}_r+\vec{e}_\theta\right)_{|q_e^{(1)}}$$

$$=\left[\cancel{(bR-mg)\cos\theta_e}-\frac{bR\sqrt{3}}{2}\right]\vec{e}_r+\left[-(bR-mg)\sin\theta_e+\frac{bR}{2}\right]\vec{e}_\theta$$

$$=-bR\frac{\sqrt{3}}{2}\,\vec{e}_r+\left(mg-\frac{bR}{2}\right)\vec{e}_\theta$$

$$\begin{cases}\frac{\sqrt{3}}{2}(\xi+\eta) = -\vec{R}^{(est,att\to asta)}_{|q_e^{(1)}}\cdot\vec{e}_r\\ \frac{1}{2}(-\xi+\eta) = -\vec{R}^{(est,att\to asta)}_{|q_e^{(1)}}\cdot\vec{e}_\theta\end{cases} \iff \begin{aligned}\eta &= bR-mg=0\\ \xi &= mg\end{aligned}$$

Quindi,

$$\vec{\xi}_D = mg\left(-\frac{\vec{e}_\theta+\sqrt{3}\,\vec{e}_r}{2}\right)_{|q_e^{(1)}}$$

$$\vec{\eta}_E = \cancel{(bR-mg)}\left(\frac{\vec{e}_\theta+\sqrt{3}\,\vec{e}_r}{2}\right)_{|q_e^{(1)}} =$$

Dinamica

4) Scriviamo le eq. di Lagrange per il modello. A tale scopo calcoliamo l'energia cinetica

(8.1) $K = K^{(\text{anello})} + K^{(\text{asta})}$

(8.2) $K^{(\text{anello})} = \frac{1}{2}\vec{\omega}^{(\text{anello})} \cdot \mathbb{I}_O^{(\text{anello})}(\vec{\omega}^{(\text{anello})})$

(8.3) $K^{(\text{asta})} = \frac{1}{2} m|\vec{v}_G|^2 + \frac{1}{2}\vec{\omega}^{(\text{asta})} \cdot \mathbb{I}_G^{(\text{asta})}(\vec{\omega}^{(\text{asta})})$

(8.4) $\vec{\omega}^{(\text{anello})} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z \quad , \quad \vec{\omega}^{(\text{asta})} = \dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi = \dot{\varphi}(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r) + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi$

(8.5) $K^{(\text{anello})} = \frac{1}{2}\dot{\varphi}\,\vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_O^{(\text{anello})}(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_z \cdot \mathbb{I}_O^{\text{anello}}(\vec{e}_z) = \frac{1}{2}\dot{\varphi}^2 I_z^{(\text{anello})} = \frac{1}{4} MR^2\dot{\varphi}^2$

(8.6) $\vec{v}_G = \dot{\vec{x}}_G = \frac{d}{dt}(G-O) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} R\,\vec{e}_r\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} R\,\dot{\vec{e}}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\vec{\omega}^{(\text{asta})} \times \vec{e}_r\right) R =$

$= \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\dot{\varphi}\,\vec{e}_z + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi\right) R \times \vec{e}_r = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\dot{\varphi}\sin\theta\,\vec{e}_\varphi + \dot{\theta}\,\vec{e}_\theta\right) R$

(8.7) $|\vec{v}_G|^2 = \frac{3R^2}{4}\left(\dot{\varphi}^2\sin^2\theta + \dot{\theta}^2\right)$

(8.8) $\mathbb{I}_G^{(\text{asta})}(\vec{\omega}^{(\text{asta})}) = \mathbb{I}_G^{(\text{asta})}\left(\dot{\varphi}(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r) + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi\right) =$

$= \cancel{-\dot{\varphi}\sin\theta\,\mathbb{I}_G(\vec{e}_\theta)} + \dot{\varphi}\cos\theta\,\mathbb{I}_G^{(\text{asta})}(\vec{e}_r) + \dot{\theta}\,\mathbb{I}_G^{(\text{asta})}(\vec{e}_\varphi)$

$= \frac{1}{12} mR^2\left(\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_r + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi\right)$

$\frac{1}{2}\vec{\omega}^{(\text{asta})} \cdot \mathbb{I}_G^{(\text{asta})}(\vec{\omega}^{\text{asta}}) = \frac{1}{2}\left[\dot{\varphi}(-\sin\theta\,\vec{e}_\theta + \cos\theta\,\vec{e}_r) + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi\right] \cdot \frac{1}{12} mR^2\left(\dot{\varphi}\cos\theta\,\vec{e}_r + \dot{\theta}\,\vec{e}_\varphi\right)$

$= \frac{1}{24} mR^2\left(\cos^2\theta\,\dot{\varphi}^2 + \dot{\theta}^2\right)$

Quindi,

$$K^{(aste)} = \frac{3}{8} mR^2\left(\dot\varphi^2 \sin^2\theta + \dot\theta^2\right) + \frac{1}{24} mR^2\left(\dot\varphi^2 \cos^2\theta + \dot\theta^2\right)$$

$$= \frac{1}{24} mR^2\left[\left(9\sin^2\theta + \cos^2\theta\right)\dot\varphi^2 + 10\,\dot\theta^2\right]$$

$$= \frac{1}{24} mR^2\left[\left(1 + 8\sin^2\theta\right)\dot\varphi^2 + 10\,\dot\theta^2\right]$$

$$K = \frac{1}{4} MR^2\dot\varphi^2 + \frac{1}{24} mR^2\left[\left(1+8\sin^2\theta\right)\dot\varphi^2 + 10\,\dot\theta^2\right]$$

$$= \frac{1}{24} R^2\left\{\left[6M + m\left(1+8\sin^2\theta\right)\right]\dot\varphi^2 + m\,10\,\dot\theta^2\right\}$$

Allora,

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi} = \frac{1}{12} R^2\left[6M + m\left(1+8\sin^2\theta\right)\right]\dot\varphi, \qquad \frac{\partial K}{\partial\varphi} = 0$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial K}{\partial\dot\varphi}\right) = \frac{1}{12} R^2\left[6M + m\left(1+8\sin^2\theta\right)\right]\ddot\varphi + \frac{\overset{4}{\cancel{16}}}{\underset{3}{\cancel{12}}} mR^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot\theta\dot\varphi$$

$$EL_\varphi:\quad \frac{1}{12} R^2\left[6M + m\left(1+8\sin^2\theta\right)\right]\ddot\varphi + \frac{2}{3} mR^2 \sin 2\theta\,\dot\theta\dot\varphi = -cR^2\sin\varphi$$

$$\frac{\partial K}{\partial\dot\theta} = \frac{5}{6} mR^2\dot\theta, \qquad \frac{\partial K}{\partial\theta} = \frac{\overset{2}{\cancel{16}}}{\underset{3}{\cancel{24}}} mR^2 \sin\theta\cos\theta\,\dot\varphi^2$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial K}{\partial\dot\theta} = \frac{5}{6} mR^2\ddot\theta$$

$$EL_\theta:\quad \frac{5}{6} mR^2\ddot\theta - \frac{1}{3} mR^2 \sin 2\theta\,\dot\varphi^2 = -\frac{1}{2} mgR\cos\theta$$

5) Linearizzazione delle EL intorno a $q_e^{(1)} = (0, \frac{\pi}{2})$

Poichè la sollecitazione attiva è conservativa, le eq. linearizzate intorno alle configurazioni di equilibrio sono

$$A(q_e)\, \underline{\ddot{x}} + \mathcal{H}_V(q_e)\, \underline{x} = \underline{0} \qquad \underline{x}(t) = \frac{q(t) - q_e}{\varepsilon}$$

$$A(q_e^{(1)}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial K}{\partial \dot\varphi^2} & \frac{\partial^2 K}{\partial \dot\theta \partial \dot\varphi} \\ \frac{\partial K}{\partial \dot\varphi \partial \dot\theta} & \frac{\partial K}{\partial \dot\theta^2} \end{bmatrix}_{q_e^{(1)}} = \frac{R^2}{12} \left[\begin{array}{c|c} 6M + m(1 + 8\sin^2\theta_e)_{(1)} & 0 \\ \hline 0 & 10m \end{array}\right] =$$

$$= \frac{R^2}{12} \left[\begin{array}{c|c} 6M + 9m & 0 \\ 0 & 10m \end{array}\right]$$

$$\mathcal{H}_V(q_e^{(1)}) = \left[\begin{array}{c|c} cR^2 & 0 \\ \hline 0 & \frac{mgR}{2} \end{array}\right]$$

$$\frac{R^2}{12} \left[\begin{array}{c|c} 6M + 9m & 0 \\ 0 & 10m \end{array}\right] \begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cR^2 & 0 \\ 0 & \frac{mgR}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \cancel{R^2}\left(\frac{M}{2} + \frac{3}{4}m\right) \ddot{x}_1 + c\cancel{R^2}\, x_1 = 0 \\ \frac{5}{6} m R^2 \ddot{x}_2 + \frac{mgR}{2} x_2 = 0 \end{cases} \qquad \begin{aligned} \nu_1 &= \sqrt{\frac{cR^2 \cdot 4}{R^2 (2M + 3m)}} \\ \nu_2 &= \sqrt{\frac{\cancel{m} g R\, 6^3}{\cancel{2} \cdot 5 \cancel{m} R^2}} \end{aligned}$$

6) L'invariante scalare cinematico dell'asta vale:

$$I = \vec{V}_G \cdot \vec{\omega}^{(asta)} = \frac{\sqrt{3}}{2}(\dot\varphi \sin\theta\, \vec{e}_\varphi + \dot\theta\, \vec{e}_\theta) R \cdot \left[\dot\varphi(-\sin\theta\, \vec{e}_\theta + \cos\theta\, \vec{e}_z) + \dot\theta \cdot \vec{e}_\varphi\right] = 0,$$

quindi il campo di velocità è rotatorio e l'asse di Mozzi diventa AIR.