

Introduzione alla Fisica Nucleare

a.a. 2022/2023

Prof.ssa Valentina Zaccolo¹

¹La prima versione LaTeX dei miei appunti è stata redatta da Francesco Cautero nel 2022.

Indice

1	Introduzione	4
1.1	Elementarietà	4
1.2	Unità di misura	7
1.2.1	Relazione tra energia e temperatura	7
1.3	Lunghezza d'onda di Compton	7
1.4	Interazioni Fondamentali	9
1.4.1	Gravità	9
1.4.2	Interazione Debole	9
1.4.3	Interazione Elettromagnetica	10
1.4.4	Interazione Forte (Forza Nucleare)	10
2	Proprietà generali dei nuclei	11
2.1	La struttura dell'Atomo	11
2.1.1	Terminologia	11
2.2	Proprietà dei Nuclidi	12
2.2.1	Energia di Legame	12
2.2.2	Spettroscopia di Massa	12
2.2.3	Abbondanze isotopiche	14
2.3	Parametrizzazione dell'energia di legame	15
3	La Struttura dei Nuclei	20
3.1	Modello a Gas di Fermi	20
3.2	Il modello a gas di Fermi e le stelle di neutroni	22
3.3	Modello a shell	24
3.3.1	Autostati del potenziale nucleare	26
3.3.2	Il potenziale di Wood-Saxon	27
3.3.3	L'accoppiamento spin orbita	29
3.3.4	Esempio applicativo del modello a shell	30
3.3.5	Oltre il Modello a Shell	31
4	La stabilità dei nuclei	36
4.1	La legge del decadimento radioattivo	37
4.2	Produzione e decadimento della radioattività	40
4.2.1	Crescita delle attività delle figlie	41
4.2.2	Serie di decadimenti	43
4.3	Tipi di decadimento	43
4.3.1	Decadimento α	44
4.3.2	Decadimento β	44

4.3.3	Decadimento γ	45
4.3.4	Fissione spontanea	45
4.4	Il decadimento α	45
4.4.1	Conservazione dell'Energia nel Decadimento α	47
4.5	Il decadimento β	50
4.5.1	Decadimento β nei nuclei con A dispari	51
4.5.2	Decadimenti β in nuclei con A pari	52
4.5.3	Cattura elettronica	53
4.5.4	La vita media dei decadimenti β	53
4.5.5	Rilascio energetico nei decadimenti β	54
4.6	Il decadimento γ	56
4.6.1	Bilanciamento energetico dei decadimenti γ	56
4.6.2	Regole di selezione sul momento angolare e la parità	57
4.7	Rapporti di Ramificazione e Vite Medie Parziali	59
4.8	Radioattività naturale	59
4.9	La fissione nucleare	61
4.9.1	Caratteristiche della fissione	62
4.9.2	Energia nella fissione	63
4.10	L'Esplosione di Chernobyl	64
4.10.1	Reazioni di fissione controllate e cosa può andare storto in un reattore	64
5	La diffusione di particelle	70
5.0.1	Diffusione elastica	70
5.0.2	Diffusione anelastica	71
5.1	Sezioni d'urto	72
5.1.1	La sezione d'urto geometrica	72
5.1.2	Sezione d'urto totale	74
5.1.3	Luminosità	74
5.1.4	Sezioni d'urto differenziali	75
5.2	La regola d'oro	75
6	La forma geometrica dei nuclei	78
6.1	La cinematica della diffusione di elettroni	78
6.2	La sezione d'urto di Rutherford - calcolo classico	80
6.3	La sezione d'urto di Rutherford - calcolo quantistico	84
6.4	La sezione d'urto di Mott	87
6.5	I fattori di forma nucleari	88
6.5.1	Esempi di fattori di forma	88
7	La forza nucleare	91
7.1	Proprietà della forza nucleare	91
7.2	Il modello della forza di scambio	94
8	Fisica nucleare relativistica	98
8.1	La storia dell'Universo	98
8.1.1	Universo molto primordiale	98
8.1.2	Universo primordiale	99
8.2	Cromodinamica quantistica	101

8.3	Collisioni relativistiche tra ioni pesanti	102
8.4	Transizione di fase della QCD	103
8.5	Calcolo della Densità di Energia	105

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Elementarietà

Una particella è compresa come un oggetto che occupa uno spazio-tempo localizzato e ha attributi come massa, vita media, spin carica elettrica ecc... definiti. Quindi, idealmente:

1. Non dovrebbe essere ulteriormente riducibile in sotto costituenti più elementari, i gradi di libertà fondamentali della materia a livello microscopico (sperabilmente un numero molto limitato di mattoncini costituenti)
2. Deve obbedire alle leggi delle interazioni fondamentali, sperabilmente poche, matematicamente semplici, tra mattoncini costituenti.

Quindi la teoria sottostante è un set di postulati e concetti base con un fondamento matematico che descrive il comportamento della materia microscopica nei termini dei costituenti fondamentali e delle loro mutue interazioni.

Ad esempio, gli atomi sono costituiti da elettroni "elementari" e da un nucleo, ed essi interagiscono tramite la semplice legge di Coulomb: $F = \frac{1}{4\pi} \frac{q_1 q_2}{r^2}$, e la meccanica quantistica non relativistica (equazione di Schrödinger) è la teoria che descrive questa interazione.

La teoria contiene una serie di parametri che non possono essere predetti quantitativamente come ad esempio la massa dell'elettrone e la sua carica elettrica. Altre quantità come il momento magnetico dell'elettrone e l'esistenza dell'anti-elettrone (positrone) possono essere invece predette dall'equazione di Dirac.

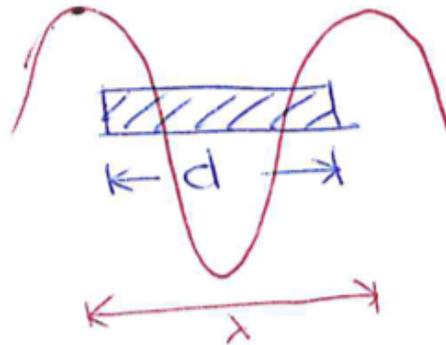
Come si può testare la validità di una teoria? Comparandola quantitativamente con i dati sperimentali. In alcuni casi l'esistenza di alcuni costituenti fondamentali viene infatti prima predetta teoricamente e poi scoperta sperimentalmente (come nel caso del Bosone di Higgs).

Per verificare se un oggetto è elementare si svolge una ricerca sperimentale.

L'elementarietà di un oggetto lineare, lungo d , si dimostra illuminandolo con onde elettromagnetiche o di materia con lunghezza d'onda λ comparabile o minore di:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = \frac{1}{k} \leq d, \quad \vec{p} = \hbar \vec{k} \quad E = \hbar \omega$$

($\vec{p} \equiv$ impulso lineare, $\vec{k} \equiv$ numero d'onda, $E \equiv$ energia, $\omega \equiv$ frequenza angolare).



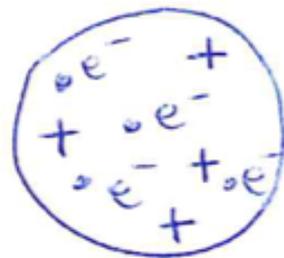
Maggiore Impulso \rightarrow Maggiore Energia

devono essere impiegati per esplorare d più piccoli.

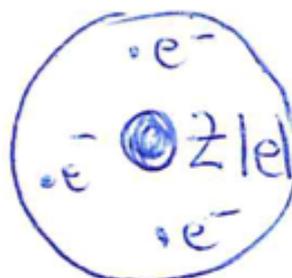
Ciò significa che gli esperimenti con collisioni ad alte energie ci permettono di testare l'elementarietà, di determinare gli attributi degli oggetti elementari e le proprietà delle interazioni fondamentali.

Ad esempio, l'esperimento di Rutherford ci portò alla scoperta del nucleo atomico (1911). All'epoca, i modelli atomici erano 2:

1. Il modello di Thompson: elettrone e^- elementare ma distribuito in maniera uniforme con le cariche positive:

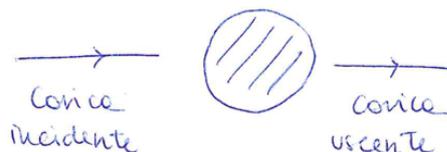


2. Il modello planetario di Rutherford: cariche positive concentrate in un trasportatore positivo chiamato nucleo:



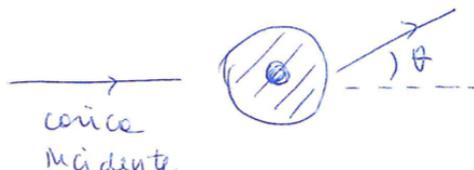
I risultati sperimentali alternativi erano i seguenti:

1.



urto a zero o piccolissimo angolo uscente θ

2.



eventi con angolo θ grande

L'esperimento rivelò il secondo caso.

Inoltre, la distribuzione sperimentale degli eventi per θ confermò la formula analitica della sezione d'urto di Rutherford (come si vedrà più avanti), basata sull'elementarietà (in questo caso il termine più corretto è puntiformità) dell'elettrone e del nucleo, con interazione di Coulomb tra loro.

Da notare inoltre che $R_{nucleo} \sim 10^{-13} \text{cm}$ mentre $R_{atomo} \sim 10^{-8} \text{cm} \Rightarrow$ lo spazio occupato da un atomo è praticamente vuoto!

Oltre a verificare l'elementarietà in questo modo, lo si può fare anche sfruttando il fatto che la maggior parte delle particelle elementari sono instabili, i.e. hanno un'esistenza transitoria e poi decadono in altre particelle, ad esempio

$$A \rightarrow B + C + \dots$$

Per elaborare in dettaglio la relazione tra risoluzione, localizzazione ed energia a scale temporali caratteristiche delle interazioni si ricordi il principio d'indeterminazione:

$$\Delta p \cdot \Delta x \gtrsim \hbar$$

La localizzazione di un sistema microscopico con accuratezza r_0 risulta in un aumento della larghezza dell'impulso dell'ordine $\gtrsim \frac{\hbar}{r_0}$ e in un dispendio energetico in termini di energia cinetica di $\sim \frac{p^2}{2m}$

Possiamo quindi classificare i sistemi in:

- MICROSCOPICI : $[dimensioni] \times [impulso] \sim \hbar \rightarrow$ governati dalle leggi quantistiche
- MACROSCOPICI : $[dimensioni] \times [impulso] \gg \hbar \rightarrow$ governati dalle leggi macroscopiche o classiche

1.2 Unità di misura

Le unità di misura comunemente usate in fisica nucleare e delle particelle per lunghezze ed energie sono rispettivamente

- FEMTOMETRO (fm , detto anche Fermi). Il Fermi $\sim 10^{-15}m$ corrisponde circa al raggio del protone.
- ELETTRONVOLT (eV), l'energia che acquista una particella di carica $1e$ quando attraversa una differenza di potenziale di $1V$: $1eV = 1.6 \times 10^{-19}J$. Per indicare i multipli si usano kilo ($1 keV = 10^3eV$), Mega ($1 MeV = 10^6eV$), Giga ($1 GeV = 10^9eV$), Tera ($1 TeV = 10^{12}eV$)
- $\frac{MeV}{c^2}$, $\frac{GeV}{c^2} \dots$ si possono usare per le masse in relazione all'equivalenza massa-energia: $E = mc^2$ e $1 \frac{eV}{c^2} = 1.7 \times 10^{-36}kg$

In fisica subatomica le scale di lunghezza ed energia sono legate al principio d'indeterminazione e la costante di Planck può essere espressa come $\hbar \cdot c = 200 MeV \cdot fm$

Un'altra quantità utilizzata è la costante di accoppiamento elettromagnetica o **Costante di Struttura Fine**:

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \sim \frac{1}{137}$$

In unità naturali:

$$[\hbar] = M L^2 T^{-1} = 6.6 \times 10^{-22} MeV \cdot s$$

$$[c] = L T^{-1} \sim 3 \times 10^8 m \cdot s^{-1}$$

$$[E] = M L^2 T^{-2}$$

quindi $[tempo] = [lunghezza]$ e $[massa] = [energia] = [lunghezza]^{-1}$ se assumo $\hbar = c = 1$ in oggetti microscopici $[h]$ e relativistici $[v \sim c]$.

1.2.1 Relazione tra energia e temperatura

$E = k_B \cdot T$ energia cinetica, con $k_B = 8.6 \times 10^{-5}eV \times k^{-1}$
quindi $1eV \Rightarrow 1.2 \times 10^4k$ e $1k \Rightarrow 8.6 \times 10^{-5}eV$

Ad esempio:

- temperatura della stanza: $20^\circ = 293k \Rightarrow 2.5 \times 10^{-2}eV$
- temperatura del sole (superficie): $6 \times 10^3k \Rightarrow 0.5 eV$
- temperatura del sole (centro): $10^7k \Rightarrow 0.9 keV$
- legame atomico: $E \sim 13eV \Rightarrow 1.6 \times 10^5k$ (molto caldo!)

1.3 Lunghezza d'onda di Compton

Per ogni particella con carica elettrica e e massa a riposo m :

$$\lambda_c = \frac{h}{mc}$$

. Questa relazione limita la localizzazione di una particella con processi elettromagnetici: più grande è la massa a riposo \rightarrow migliore sarà la localizzabilità.

Ad esempio:

$$\lambda_{elettrone} = 3.9 \times 10^{-11}cm$$

$$\lambda_{protone} = 2 \times 10^{-14} cm$$

con $\hbar = \frac{h}{2\pi} = 6.6 \times 10^{-22} MeV$, $c = 3.0 \times 10^8 \frac{m}{s}$, $m_e = 0.5 \frac{MeV}{c^2}$, $m_p = 938.3 \frac{MeV}{c^2}$.

La lunghezza di Compton misura l'estensione spaziale dei fenomeni in cui l'elettrone è coinvolto: fisica atomica.

In questo caso, l'energia totale di una particella viene definita come

$$E_{tot} = \frac{p^2}{2m} - \frac{Z\alpha\hbar c}{r}$$

, usando $\alpha = \frac{1}{137}$ costante di struttura fine e Z numero di protoni, L'energia totale non ha un minimo se r decresce, perché per il principio di indeterminazione di Pauli p cresce a $r \rightarrow 0$.

Sostituisco quindi $p \rightarrow \frac{\hbar}{r}$ e calcolo il minimo per E :

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial r} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\hbar^2}{2mr^2} - \frac{Z\alpha\hbar c}{r} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\hbar}{mr} = Z\alpha c \quad \rightarrow \\ r = \frac{1}{Z\alpha} \frac{\hbar}{mc} \sim \frac{0.5 \times 10^{-8}}{Z} cm \end{aligned}$$

che corrisponde circa alla dimensione degli atomi. Definiamo l'energia di legame come:

$$E_{leg-at} = -\frac{1}{2}(Z\alpha)^2 me^2 = -Z^2 \cdot 13.5 eV$$

quindi energie dell'ordine di $E \sim 10 - 1000 eV$ devono essere utilizzate per esplorare atomi.

A questo punto posso introdurre il tempo caratteristico partendo da

$$\Delta E \cdot \Delta t \hbar$$

Dunque per $\Delta E \sim 10 eV$ allora si avrà $t_{em} \sim \frac{\hbar}{\Delta E} \sim 10^{-16} s$ con $\hbar \sim 10^{-15} eV \cdot s$.

Salendo di un livello verso l'elementarietà ho il nucleo che è composto da protoni e neutroni (nucleoni) legati.

Considero il sistema nucleare più semplice, il deutone costituito da un protone e un neutrone $D(n, p)$ con energia di legame di circa $E_D \simeq 2 Mev$ quindi le sue dimensioni saranno di circa

$$r_{nucleo} = \frac{\hbar}{\sqrt{m_p E_D}} \simeq 4 \times 10^{-15} m$$

risultando essere un oggetto molto compatto ($r_{atomico} \simeq 10^{-10} m$).

Per esplorare la struttura del nucleo in termini di nucleoni "elementari" sono necessarie energie dell'ordine di $10 - 1000 MeV$ che sono ottenibili solo artificialmente, nei laboratori, utilizzando acceleratori di particelle.

A questo punto è necessaria una nuova forza che tenga uniti i nucleoni, la quale deve essere "a corto raggio" dell'ordine di $10^{-15} m$ e deve avere un effetto molto più grande della repulsione Coulombiana tra i protoni a quelle distanze, stiamo parlando dell'interazione forte la quale ha un tempo caratteristico $t_{strong} \sim \hbar/E \sim 6 \times 10^{-23} s$ per $E \sim 10 MeV$, un processo estremamente veloce!

Ovviamente energie molto maggiori di $1 GeV$ sono necessarie per avere accesso alla struttura interna del protone e neutrone, la fisica che studia questi fenomeni è detta fisica subnucleare ed è resa possibile dagli acceleratori di particelle ad alta energia.

1.4 Interazioni Fondamentali

Di norma le interazioni fondamentali sono tutte di tipo scambio, i.e. agiscono scambiando dei quanti. I valori delle quantità non adimensionali dipendono dal sistema di unità di misura che si usa, quindi per poter comparare la forza di interazioni diverse è necessario avere costanti adimensionali α diverse.

1.4.1 Gravità

Governa l'attrazione tra corpi massivi: si considera carica = massa e un potenziale di tipo

$$V_G = G_N \frac{m_1 m_2}{r}$$

con costante di Newton

$$G_N = 6.67 \times 10^{-11} \text{ N m}^2/\text{kg}^2 = 6.7 \times 10^{-39} \cdot \hbar c \frac{c^4}{\text{GeV}^2}$$

A partire da G_N definiamo la massa, lunghezza e tempo di Planck

$$M_{Pl} = \sqrt{\frac{\hbar c}{G_N}} = 1.2 \times 10^{19} \frac{\text{GeV}}{c^2} \quad \lambda_{Pl} = \frac{\hbar}{M_{Pl} c} \simeq 1.6 \times 10^{-33} \text{ m} \quad \tau_{Pl} = \frac{\lambda_{Pl}}{c} \simeq 5.3 \times 10^{-44} \text{ s}$$

comparando la massa di Planck con la massa del protone $m_p = 0.938 \text{ GeV}/c^2$ ci si rende conto di quanto è grande!

L'interazione gravitazionale diventa importante per energie (o scale di massa) dell'ordine di $M_{Pl}(10^{19} \frac{\text{GeV}}{c^2})$ e per distanze $\sim 10^{-33} \text{ cm}$.

Nel caso della gravità definiamo una costante gravitazionale adimensionale $\alpha_G(\mathcal{M}^2)$ dove \mathcal{M} è una massa di riferimento. Nel caso in cui $\mathcal{M} = M_{Pl}$

$$\alpha_G(M_{Pl}^2) = \alpha = \frac{1}{137}$$

Nel caso considerassimo $\mathcal{M} = m_p \simeq 1 \text{ GeV}$ massa del protone allora

$$\alpha_G(\text{GeV}^2) = \alpha_G(m_p^2) = \frac{m_p^2}{M_{Pl}^2} \alpha_G(M_{Pl}^2) \simeq 10^{-40}$$

Per questo motivo in fisica nucleare e subnucleare l'interazione gravitazionale può essere trascurata.

1.4.2 Interazione Debole

Responsabile dei decadimenti delle particelle elementari, ad esempio i decadimenti β che verranno studiati più avanti.

A partire dalle misure di vita media dei decadimenti β ($\tau \sim 10^2 \text{ s}$), si determina la costante di accoppiamento effettiva di Fermi G_F :

$$G_F \simeq 1.17 \times 10^{-5} \left(\frac{\hbar c}{\text{GeV}} \right)^2 \sim 10^{-5} \left(\frac{\hbar}{m_p c} \right)^2$$

Come prima per la gravità definisco l'energia di scala di Fermi, cioè l'energia del più alto livello energetico occupato in un sistema di fermioni allo 0 assoluto e la sua lunghezza di Fermi corrispondente al suo impulso di Fermi:

$$\varepsilon_{Fermi} = \sqrt{\frac{(\hbar c)^3}{G_F}} \simeq 300 GeV \quad \lambda_{Fermi} = \sqrt{\frac{G_F}{\hbar c}} \simeq 0.6 \times 10^{-16}$$

Come prima, definiamo una costante di accoppiamento debole effettiva

$$\alpha_{deb}(Fermi^2) = \alpha = \frac{1}{137} \quad \alpha_{deb}(\varepsilon_{Fermi}^2) = 10^{-5} \cdot \alpha = 10^{-7}$$

un numero molto piccolo!

1.4.3 Interazione Elettromagnetica

Lega insieme gli atomi e governa la maggior parte dei fenomeni conosciuti nella Terra. Agisce su ogni particella che ha carica elettrica e si manifesta anche nella radiazione elettromagnetica.

Si considera il potenziale elettromagnetico di Coulomb:

$$V_{Coulomb} = \frac{Z_1 Z_2 \alpha \hbar c}{r} \quad \alpha = \frac{1}{137}$$

si noti che il raggio è infinito, siccome il quanto scambiato è il fotone con $m_\gamma \simeq 0$ (sperimentalmente $m_\gamma < 10^{-8} \frac{eV}{c^2}$) e $Q_\gamma = 0$ (sperimentalmente $Q_\gamma < 10^{-35} e$).

Ci sono tre punti importanti da sottolineare:

1. tutti i corpi carichi hanno carica multipla della carica dell'elettrone (quantizzazione della carica elettrica). Questo è valido fino al livello nucleonico. I costituenti dei nucleoni, i quarks, hanno cariche frazionarie ma non possono essere trovati liberi nello spazio, infatti sono legati nei nucleoni (confinamento dei quarks)
2. universalità: i processi elettromagnetici di tutte le particelle sono regolati dalla stessa costante di accoppiamento α
3. $\alpha \ll 1 \rightarrow$ si può usare la teoria perturbativa per il calcolo dei processi in atto.

1.4.4 Interazione Forte (Forza Nucleare)

Lega i protoni e i neutroni nei nuclei ed è responsabile della stabilità della materia nucleare.

Se considero il "protonio" uno stato ipotetico legato di protone (p) e anti-protone (\bar{p}), ponendo la massa ridotta $m_\mu = \frac{m_p}{2} \simeq 469 \frac{MeV}{c^2}$ l'energia di legame sarà

$$E_{legame} = \frac{1}{2}(Z\alpha)^2 mc^2 \simeq 13 KeV$$

usando gli argomenti utilizzati qui, mentre l'energia di legame del deutone (stato legato n e p) è $E_{D(n,p)} \sim 2 MeV = 2 \times 10^3 keV$ quindi l'interazione forte deve essere 10^2 più grande dell'elettromagnetica dunque $\alpha_{nucleare} \simeq 10^2 \alpha$

Quindi in conclusione esiste una **gerarchia delle forze** nel senso che la forza relativa delle quattro interazioni fondamentali (le uniche conosciute ad oggi) è:

$$10^{-40}(\text{gravità}) < 10^{-7}(\text{debole}) < 10^{-2}(\text{elettromagnetica}) < 1(\text{nucleare})$$

si nota comunque che non tutte le particelle sperimentano tutti i tipi di forze.

Capitolo 2

Proprietà generali dei nuclei

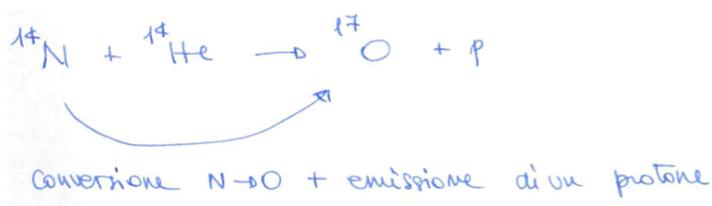
2.1 La struttura dell'Atomo

L'atomo è costituito da un nucleo, composto da protoni e neutroni, e da elettroni (scoperti da Thompson nel 1897).

Il protone fu scoperto da Rutherford bombardando l'atomo di azoto con particelle α , poi identificate come atomi di He, da questo osservò la produzione di particelle cariche positivamente a lungo raggio, cioè in grado di percorrere distanze inusualmente lunghe in un materiale.

Quindi concluse che l'atomo di N doveva essere stato modificato nella reazione e che un componente leggero era stato emesso.

Aveva precedentemente osservato i nuclei di idrogeno che avevo un range così lungo di percorrenza nel materiale, e quindi concluse che dovevano essere presenti **anche** nei nuclei di azoto:



2.1.1 Terminologia

Per indicare un nuclide (specifica specie nucleare) si usa la nomenclatura

$${}^A_Z X_N$$

- $X \equiv$ simbolo chimico
- $Z \equiv$ numero di protoni = numero atomico \rightarrow un atomo neutro avrà quindi Z elettroni
- $A \equiv$ numero di massa \equiv intero più vicino tra il rapporto tra massa nucleare e l'unità di massa fondamentale. In questo caso $A=1$ per il protone
- $N \equiv$ numero di neutroni = $A - Z$

Ad esempio, per indicare il nuclide uranio uso ${}^{238}\text{U}$, guardando la tabella periodica leggo $Z=92$, quindi ${}^{238}\text{U}$ ha $N=A-Z=238-92=146$ neutroni: ${}^{238}_{92}\text{U}_{146}$.

Come visto prima, posso anche indicare semplicemente un nuclide come ${}^A X$, è importante però che se sto bilanciando Z e N in una reazione o decadimento li specifichi espressamente. Nuclidi con stesso Z ma diverso N sono detti **isotopi**. Ad esempio, il nuclide Cloro ha due isotopi stabili per il decadimento radioattivo, ${}^{35}Cl$ e il ${}^{37}Cl$. Il Cloro ha però anche molti altri isotopi non stabili prodotti artificialmente nelle reazioni nucleari.

Gli **isotoni**, invece, sono nuclidi con lo stesso N ma Z diverso. Gli isotoni stabili con $N=1$ sono il deuterio 2H e l'elio-3 3He .

I nuclidi con lo stesso numero di massa A sono detti **isobari**, quindi 3He e trizio 3H radioattivo sono isobari.

Anche il neutrone fu scoperto bombardando nuclei con particelle α da Chadwick nel 1932, il quale studiò la radiazione neutra emessa da un campione di Berillio irradiato con le particelle α emesse da una sorgente di Polonio.

Dalla cinematica dell'urto egli dimostrò che la massa della particella che costituiva la radiazione neutra doveva essere molto prossima a quella del protone, e che il neutrone doveva essere un componente fondamentale dei nuclei.

Ad oggi si sa che esistono 108 diversi nuclidi stabili e > 1000 isotopi!

2.2 Proprietà dei Nuclidi

Come abbiamo visto nella prima lezione, la forza che lega la materia nucleare, cioè il protone e il neutrone, è $\sim 10^2$ volte più forte di quella elettromagnetica che tiene insieme l'atomo.

2.2.1 Energia di Legame

L'energia di legame è definita come la massa dei singoli costituenti di un sistema meno la massa del sistema, moltiplicata per c^2 . La differenza tra massa del sistema legato e massa dei costituenti viene anche chiamata **difetto di massa**.

L'energia di legame viene determinata a partire dalle masse atomiche, siccome queste possono essere misurate sperimentalmente con precisione decisamente superiore alle masse nucleari, quindi:

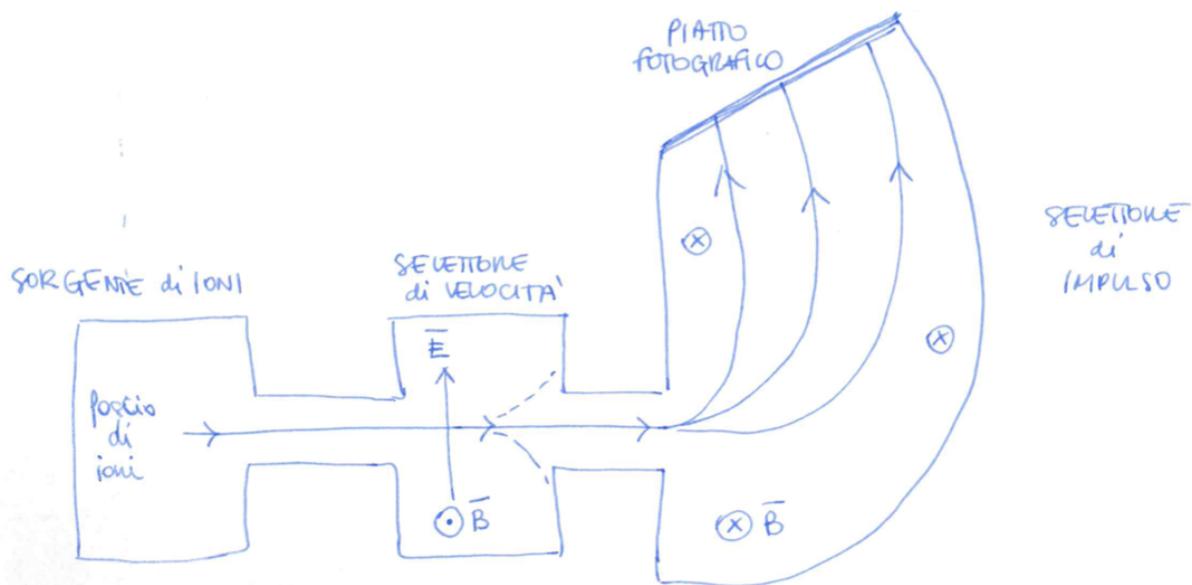
$$B(Z, A) = [Zm({}^1H) + (A - Z)m_n - m(A, Z)]c^2$$

con $m({}^1H) = m_p + m_e$ massa dell'atomo di idrogeno, m_n massa del neutrone, m_p massa del protone, m_e massa dell'elettrone, $m(A, Z)$ massa di un atomo con Z elettroni, il cui nucleo contiene A nucleoni.

Quindi per determinare con precisione l'energia di legame di un nucleo devo misurare la massa atomica con precisione.

2.2.2 Spettroscopia di Massa

La spettroscopia di massa fu la prima tecnica sperimentale che permise misure di massa con precisione $\sim 10^{-6}u$. Lo schema di uno spettrometro di massa è il seguente:



Ho una **sorgente di ioni** di diversa velocità. Questa sorgente può essere ottenuta ad esempio bombardando con elettroni il materiale che sto studiando cosicché da ottenere solo ioni.

L'elemento successivo è un **selettore di velocità** con campi elettrici e magnetici perpendicolari. Il campo elettrico \vec{E} esercita una forza di modulo qE che porterà gli ioni verso la parte superiore del selettore.

Il campo magnetico \vec{B} invece eserciterà una forza verso il basso qvB , quindi gli ioni selezionati avranno

$$qE = qvB \quad \rightarrow \quad v = \frac{E}{B}$$

L'ultimo elemento avrà invece un **selezionatore di impulso** costituito da un campo magnetico uniforme che piega il fascio di raggio r , determinato dall'impulso

$$mv = qBr \quad \rightarrow \quad r = \frac{mv}{qB}$$

Quindi q, B, v sono note e ogni massa differente avrà un r differente.

Se ad esempio il campo \vec{B} dei selettori di velocità e impulso è uguale, allora

$$m = \frac{qrB^2}{E}$$

Il trucco per ottenere una misura di alta precisione ($\sim 10^{-6}u$) è usare come riferimento un punto fisso nella scala delle masse atomiche, normalmente si usa il carbonio ^{12}C con:

$$m(^{12}\text{C}) = 12.000000 \text{ u}$$

si utilizza poi il metodo chiamato **doppietto di massa** per misurare piccole differenze tra masse vicine in numero.

Ad esempio, settiamo l'apparato per effettuare misure attorno alla massa 128 e misuriamo le differenze tra le masse molecolari del C_9H_{20} (nonano) e C_{10}H_8 (naftalene). La differenza misurata è:

$$\begin{aligned} \Delta &= m(\text{C}_9\text{H}_{20}) - m(\text{C}_{10}\text{H}_8) = \\ &= 12 \cdot m(^1\text{H}) - m(^{12}\text{C}) = \\ &= 0.09390032 \pm 0.00000012 \text{ u} \end{aligned}$$

quindi:

$$m(^1H) = \frac{1}{12}[m(^{12}C) + \Delta] = 1.0000000 + \frac{1}{12}\Delta = 1.007982503 \pm 0.00000001 u$$

nel conto di Δ è stata trascurata la differenza tra l'energia di legame delle due molecole che è $\mathcal{O}(10^{-9}u)$.

Ora che conosco questo valore così accuratamente setto l'apparato per la massa 28 e determino la differenza di massa tra C_2H_4 (etilene) e N_2 (azoto):

$$\begin{aligned} \Delta &= m(C_2H_4) - m(N_2) = \\ &= 2m(^{12}C) + 4m(^1H) - 2m(^{14}N) = \\ &= 0.025152196 \pm 0.0000000030 u \end{aligned}$$

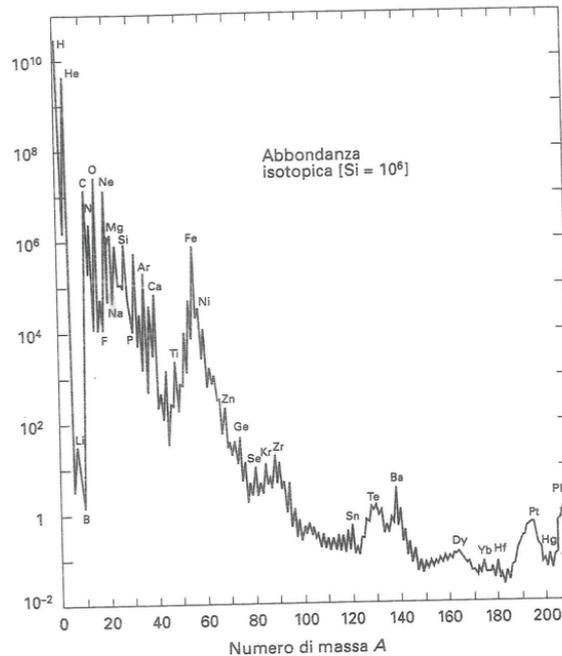
da cui:

$$m(^{14}N) = m(^{12}C) + 2m(^1H) - \Delta/2 = 14.003007696 \pm 0.00000002u$$

2.2.3 Abbondanze isotopiche

Lo spettrometro di massa ci permette anche di misurare le abbondanze relative dei vari isotopi di un elemento, rimpiazzando il piatto fotografico con delle fenditure di uscita e facendo uno scan degli intervalli di massa variando \bar{E} e \bar{B} .

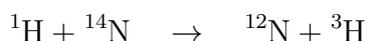
Una delle applicazioni più comuni è la determinazione dell'abbondanza isotopica nel sistema solare:



← i nuclei più leggeri (fino al ^{56}Fe) originano dalla fusione nucleare delle stelle →
 → originano dall'esplosione di supernovae.

Le masse possono anche essere calcolate a partire dall'energia delle particelle in una reazione nucleare.

Se considero ad esempio la reazione:



conosco già i seguenti valori tramite il metodo del doppietto di massa:

$$m({}^1\text{H}) = 1.007825 \text{ u}$$

$$m({}^{14}\text{N}) = 14.003074 \text{ u}$$

$$m({}^3\text{H}) = 3.016049 \text{ u}$$

Dal bilancio energetico della reazione ho: $E_{1\text{H}} + E_{14\text{N}} = E_{12\text{N}} + E_{3\text{H}}$ dove E_X è l'energia totale del nuclide $X \equiv$ somma della sua massa a riposo e della sua energia cinetica $\frac{Mv^2}{2}$. Quindi conosco le tre masse in gioco, misuro le corrispondenti energie cinetiche e otterrò:

$$m({}^{12}\text{N}) = 12.018613 \pm 0.00001 \text{ u}$$

sapendo che ${}^{12}\text{N}$ è instabile, con $\tau \sim 10^{-2}\text{s}$ non potrei mai usare lo spettrometro di massa in questo caso.

2.3 Parametrizzazione dell'energia di legame

L'energia di legame B di un nucleo è la differenza in massa tra il nucleo ${}^A_Z\text{X}_N$ e i costituenti Z protoni e N neutroni:

$$B = [Zm_p + Nm_n - [M({}^A\text{X}) - Zm_e]] \cdot c^2$$

se raggruppo le Z masse del protone e dell'elettrone in Z atomi di idrogeno neutro ho:

$$B = [ZM({}^1\text{H}) + Nm_n - m({}^A\text{X})] \cdot c^2 \quad c^2 = 931.50 \frac{\text{Mev}}{m}$$

Conoscendo il difetto di massa $\Delta = (m - A)c^2$ posso usare questa equazione per derivare la massa atomica.

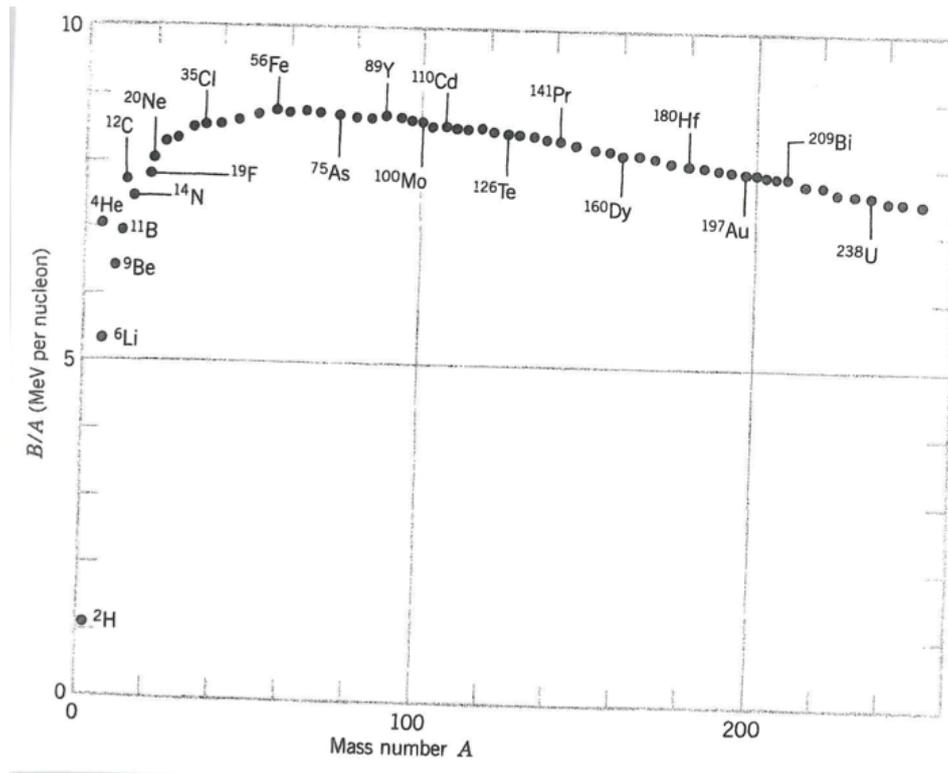
L'energia di separazione di un neutrone S_n è la quantità di energia necessaria a rimuovere un neutrone da un nucleo ${}^A_Z\text{X}_N$, cioè la differenza tra l'energia di legame di ${}^A_Z\text{X}_N$ e ${}^{A-1}_Z\text{X}_{N-1}$

$$\begin{aligned} S_n &= B({}^A_Z\text{X}_N) - B({}^{A-1}_Z\text{X}_{N-1}) = \\ &= [m({}^{A-1}_Z\text{X}_{N-1}) - m({}^A_Z\text{X}_N) + m_n] \cdot c^2 \end{aligned}$$

In maniera analoga posso definire l'energia di separazione di un protone, S_p , come l'energia necessaria per rimuovere un protone:

$$\begin{aligned} S_p &= B({}^A_Z\text{X}_N) - B({}^{A-1}_{Z-1}\text{X}_N) = \\ &= [m({}^{A-1}_{Z-1}\text{X}_N) - m({}^A_Z\text{X}_N) + m({}^1\text{H})] \cdot c^2 \end{aligned}$$

da notare che in queste due equazioni Zm_e si cancella. Nella seconda equazione si usa la massa dell'idrogeno anziché quella del protone perché lavoriamo sempre con masse atomiche. Osserviamo l'energia di legame per nucleone:



B cresce quasi linearmente con A , per questo si mostra normalmente B/A in funzione del numero di massa A .

Si nota che:

1. la curva è quasi costante tranne che per nuclei molto leggeri
2. la media $\langle B/A \rangle \sim 8 \pm 0.8$ MeV/nucleone
3. si osserva un picco a $A \sim 60$ dove i nuclei sono legati "più fortemente".

Si può rilasciare energia in 2 modi:

- $A < 60$: assemblando nuclei più leggeri in nuclei più pesanti tramite **fusione nucleare** che genera molta energia
- $A > 60$: rompendo nuclei più pesanti in nuclei più leggeri, **fissione nucleare** - la studieremo più avanti

In entrambi questi casi salgo nella curva dell'energia di legame e libero energia nucleare. La formula che caratterizza questo andamento è la **formula semi-empirica di massa** o formula di Weizsacker (1935)

$$m(Z, A) = Nm_n + Zm_p + Zm_e - \frac{B(Z, A)}{c^2} \Rightarrow$$

$$B(Z, A) = a_v A - a_s A^{\frac{2}{3}} - a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{\frac{1}{3}}} - a_a \frac{(N-Z)^2}{4A} + \delta$$

con $N = A - Z$, costituita da cinque termini:

1. **Termine di volume** $\propto A$: questo contributo è costante e a_v è una costante da determinare. Se ogni nucleone interagisse con tutti gli altri nucleoni nel nucleo, si avrebbe $B \propto A(A-1) \sim A^2$, visto che è provato sperimentalmente che $R \propto A^{1/3}$. Siccome $B \propto A$ il termine di volume ci suggerisce che ogni nucleone attrae solo i suoi vicini e non tutti gli altri nucleoni.
2. **Termine di superficie** $\propto A^{2/3}$: quanto detto nel paragrafo precedente è vero ad eccezione che per i nucleoni sulla superficie nucleare. In quel caso i nucleoni sono circondati da meno vicini e sono legati "meno fortemente". Quindi al termine di volume devo sottrarre un termine proporzionale all'area della superficie nucleare $\propto R^2 \propto A^{2/3}$, quindi sottraggo al termine di volume un termine $-a_s A^{2/3}$
3. **Termine Coulombiano** $\propto A^{-1/3}$: all'energia di legame va sottratta la repulsione Coulombiana dei protoni

$$E_{Coulomb} \propto \frac{Z(Z-1)\alpha\hbar c}{R} \propto Z(Z-1)A^{-1/3}$$

4. **Termine di asimmetria** $\propto (N-Z)^2/4A$: finché il numero di massa è piccolo i nuclei tendono ad avere un numero uguale di protoni e neutroni $Z \simeq N$, mentre i nuclei più grandi hanno un eccesso via via maggiore di neutroni, per compensare la repulsione Coulombiana e rendere il nucleo più stabile. Dunque si ha un termine correttivo $\propto \frac{(A-2Z)^2}{A}$ che ha la forma corretta per favorire nuclei con $Z = A/2$ e diventare più piccolo per nuclei con A grande
5. **Termine di accoppiamento** δ : uno studio sistematico delle masse nucleari dimostra che i nuclei sono più stabili qualora contengano un numero pari di protoni e neutroni. Questo fatto suggerì che tanto i protoni quanto i neutroni abbiano la tendenza ad accoppiarsi. Quindi, ad esempio, se ho un numero dispari di nucleoni (dispari Z e pari N o viceversa) questo termine non contribuisce, ma se ho sia Z che N dispari guadagno energia di legame convertendo uno dei protoni in un neutrone o viceversa per avere quindi la formazione di coppie. La prova sperimentalmente è che in Natura esistono solo 4 nuclei stabili con N e Z dispari (${}^2\text{H}, {}^6\text{Li}, {}^{10}\text{B}, {}^{14}\text{N}$), gli altri 167 stabili hanno N e Z pari! L'energia di accoppiamento

$$\delta = a_p A^{-3/4} \quad \text{se } A, Z, N \text{ sono pari}$$

$$\delta = -a_p A^{-3/4} \quad \text{se } A \text{ pari e } Z, N \text{ dispari}$$

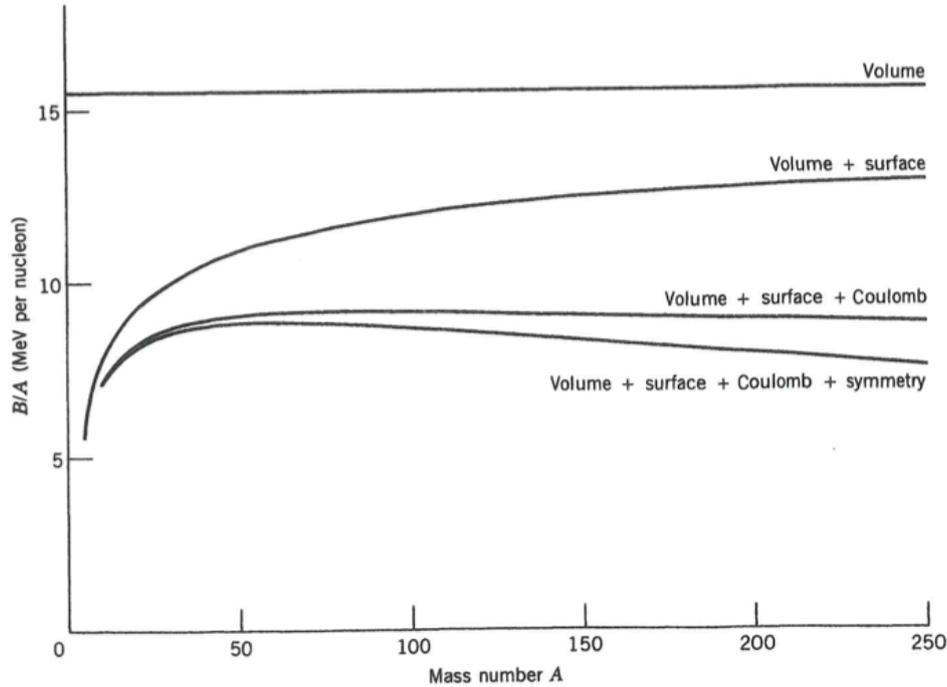
$$\delta = 0 \quad \text{se } A \text{ dispari}$$

Per ottenere B/A che sono stati mostrati prima in figura, trovo i migliori parametri per le costanti:

$$a_v = 15.67 \frac{\text{MeV}}{c^2} \quad a_s = 17.23 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

$$a_c = 0.714 \frac{\text{MeV}}{c^2} \quad a_a = 93.15 \frac{\text{MeV}}{c^2} \quad a_p = 34 \frac{\text{MeV}}{c^2}$$

ottenuti dai risultati riportati in questa figura:



La formula di massa riportata prima descrive in generale le proprietà dell'interazione nucleare, ma non è in grado di riprodurre i dettagli della struttura nucleare.

Per quanto riguarda le proprietà nucleari include:

1. Il **Modello a Goccia**: infatti i primi tre termini appaiono anche nel calcolo dell'energia di una goccia di liquido carico;
2. Il **Modello a Shell**: che concerne invece i nucleoni individuali e contiene gli ultimi 2 termini - verrà studiato nel dettaglio.

Esercizio 1. In un suo romanzo, Isaac Asimov, descrive un universo in cui il nucleo più stabile con $A=186$ non è il tungsteno ${}_{74}^{186}\text{W}$, bensì il plutonio ${}_{94}^{186}\text{Pu}$. Questo viene giustificato nel romanzo come una conseguenza del fatto che il rapporto fra l'intensità della forza elettromagnetica e quella dell'interazione forte è diversa da quella che si ha nel nostro universo.

Assumendo che questo sia di reputare unicamente ad una variazione della costante di accoppiamento α , mantenendo invariate sia la costante di accoppiamento forte che le masse dei nucleoni: quanto dovrebbe essere grande α affinché ${}_{82}^{186}\text{Pb}$, ${}_{88}^{186}\text{Ra}$ e ${}_{94}^{186}\text{Pu}$ siano stabili?

Soluzione 1. Si rielabora la formula semi-empirica di massa fissando A :

$$M(A, Z) = Nm_n + Zm_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{\frac{2}{3}} + a_c \frac{Z^2}{A^{\frac{1}{3}}} + a_a \frac{(N - Z)^2}{4A} + \delta$$

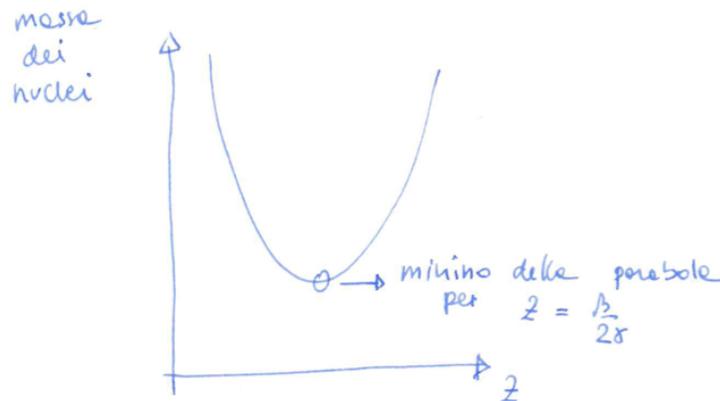
per isobari, stesso A :

$$M(A, Z) = \alpha \cdot A - \beta \cdot Z + \gamma \cdot Z^2 + \delta$$

con:

$$\alpha = m_n - a_v + a_s A^{-\frac{1}{3}} + \frac{a_a}{4} \quad \beta = a_a + (m_n - m_p - m_e) \quad \gamma = \frac{a_a}{A} + \frac{a_c}{A^{\frac{1}{3}}}$$

quindi $M(A, Z)$ dipende da Z^2 ed ha un minimo per $Z_0 = \frac{\beta}{2\gamma}$, e la massa dei nuclei in funzione del numero di protoni ha la forma di una parabola:



La costante a_a in β e γ è parte del termine di asimmetria della formula semi-empirica di massa e non dipende dalla costante di accoppiamento elettromagnetico α . Invece la costante a_c che descrive la repulsione Coulombiana e compare nel termine γ è proporzionale ad α e può essere scritta come $a_c = k\alpha$.

Inserendo questa sostituzione nella relazione $Z_0 = \frac{\beta}{2\gamma}$ si ottiene:

$$Z_0 = \frac{\beta}{2 \left(\frac{a_a}{A} + \frac{k\alpha}{A^{\frac{1}{3}}} \right)} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{\alpha} = \frac{2kAZ_0}{A^{\frac{1}{3}}(A\beta - 2a_aZ_0)}$$

Adesso assumo che il minimo in $M(A, Z)$ corrisponda esattamente allo Z dato per i vari nuclei. Calcolo $k = \frac{a_c}{\alpha}$ nel caso canonico di $\alpha = \frac{1}{137}$ e vado ad inserirlo nella funzione di $\frac{1}{\alpha}$ sopra.

Facendo in calcoli precisi (occhio che ci sono molte cifre ed è facile scambiare una funzione per un'altra) ottengo:

$$\frac{1}{\alpha} = 128 \quad \text{per } {}^{186}_{74}\text{W}, \quad \frac{1}{\alpha} = 238 \quad \text{per } {}^{186}_{81}\text{Pb}, \quad \frac{1}{\alpha} = 522 \quad \text{per } {}^{186}_{88}\text{Ra}.$$

Invece non posso ottenere ${}^{186}_{94}\text{Pu}$ stabile solo variando α , perché il termine $2a_aZ_0 > A\beta$ rende il denominatore negativo!!! Purtroppo il conto di Asimov non era corretto.

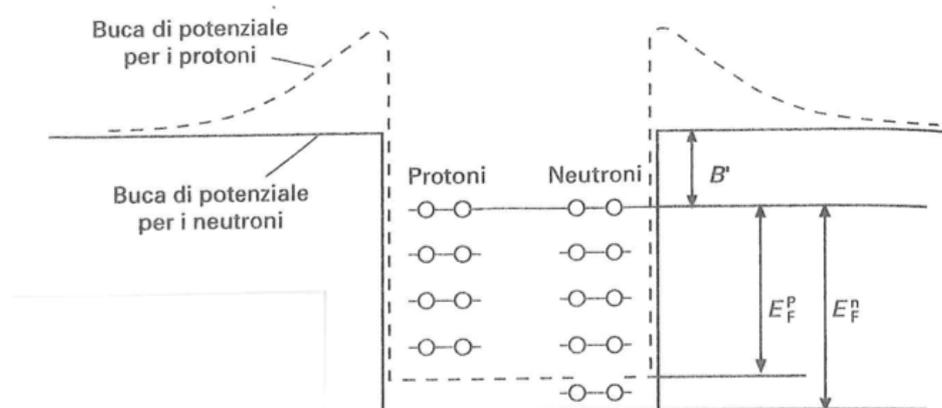
Capitolo 3

La Struttura dei Nuclei

3.1 Modello a Gas di Fermi

I nuclei che si trovano nel loro stato fondamentale o sono solo debolmente eccitati sono un esempio di gas di Fermi degeneri. I protoni e i neutroni che costituiscono il nucleo sono visti come due sistemi indipendenti di nucleoni. Sono fermioni di spin $1/2$ che quindi obbediscono alla statistica di Fermi-Dirac. Si assume che i nucleoni si muovono liberamente all'interno del volume nucleare, posto ovviamente il rispetto del principio di esclusione di Pauli.

Il potenziale cui ogni nucleone è soggetto è una sovrapposizione dei singoli potenziali prodotti dagli altri nucleoni. Assumiamo che nell'ambito del modello a gas di Fermi il potenziale risultante sia una buca di potenziale rettangolare *i.e.* costante dentro al nucleo e che si annulla bruscamente nel bordo.



Per il principio di indeterminazione, ogni particella occupa nello spazio delle fasi (spazio a 6 dimensioni definito dall'impulso e dalla posizione della particella) un volume pari a $h^3 = (2\pi\hbar)^3$. Quindi, il numero di stati accessibili per un nucleone all'interno di un volume V in un intervallo di impulsi fra \bar{p} e $d\bar{p}$, nello spazio degli impulsi, corrisponde ad una calotta sferica di raggio interno \bar{p} e spessore $d\bar{p}$ che quindi occupa un volume $4\pi p^2 dp$, è dato da:

$$dn = \frac{4\pi p^2 dp}{(2\pi\hbar)^3} \cdot V$$

Cioè dal volume nello spazio delle fasi diviso per $(2\pi\hbar)^3$. Allo 0 assoluto temperatura assoluta, *i.e.* quando il nucleo è nello stato fondamentale, gli stati più bassi sono tutti

occupati fino all'impulso massimo detto **impulso di Fermi**, p_F .
 Il numero di tali stati si trova integrando l'equazione precedente:

$$n = \frac{V p_F^3}{6\pi^2 \hbar^3}$$

Per il principio di esclusione di Pauli ogni stato può contenere al più due fermioni della stessa specie:

$$N = \frac{V (p_F^n)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad Z = \frac{V (p_F^p)^3}{3\pi^2 \hbar^3} \quad (3.1)$$

Dato R del nucleo $R = R_0 A^{\frac{1}{3}}$ (sperimentalmente determinato) il volume del nucleo sferico:

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi R_0^3 A \quad (3.2)$$

con $R_0 = 1.21 fm$ (sperimentalmente determinato).

Assumo che le buche di potenziale di protoni e neutroni abbiano lo stesso raggio e per un nucleo $Z=N=A/2$ ottengo da (3.1) e (3.2):

$$p_F = p_F^n = p_F^p = \frac{\hbar}{R_0} \left(\frac{9\pi}{8} \right)^{\frac{1}{3}} \sim 250 \frac{MeV}{c}$$

un impulso di moto all'interno del nucleo piuttosto elevato. L'energia del più alto stato occupato, **energia di Fermi**, E_F , è:

$$E_F = \frac{p_F^2}{2M} \sim 33 MeV \quad \text{con } M = m_n \text{ o } m_p$$

La differenza B' fra la sommità della buca e il livello di Fermi è costante per la maggior parte dei nuclei e corrisponde all'energia di legame medio per nucleone $B/A = 7-8 \frac{MeV}{\text{nucleone}}$ mentre la profondità della buca di potenziale $V_0 = E_F + B' \sim 40 MeV$ è indipendente da A .

Come visto precedentemente, i nuclei pesanti hanno un eccesso di neutroni. Siccome il livello di Fermi per un nucleo stabile è lo stesso per protoni e neutroni mentre la profondità della buca di potenziale per il gas di neutroni è maggiore di quella per il gas di protoni allora i protoni sono meno legati nei nuclei rispetto ai neutroni.

Questo può essere dovuto al fatto che ho repulsione Coulombiana per i protoni e quindi fra protoni carichi ho un termine aggiuntivo nel potenziale: $V_c = (Z-1) \frac{\alpha \hbar c}{R}$.

Posso calcolare nel modello a gas di Fermi la dipendenza dell'energia di legame dall'eccesso di neutroni.

Trovo l'energia cinetica media per nucleone:

$$\langle E_{cin} \rangle = \frac{\int_0^{p_F} E_{cin} p^2 dp}{\int_0^{p_F} p^2 dp} = \frac{\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2m} p_F^5}{\frac{1}{3} \cdot p_F^3} = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2m} \sim 20 MeV \quad (3.3)$$

quindi quella totale è data da:

$$E_{cin}(N, Z) = N \langle E_n \rangle + Z \langle E_p \rangle = \frac{3}{10M} (N \cdot (p_F^n)^2 + Z (p_F^p)^2)$$

$$\rightarrow E_{cin}(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9}{4} \pi \right)^{\frac{2}{3}} \cdot \frac{N^{\frac{5}{3}} + Z^{\frac{5}{3}}}{A^{\frac{2}{3}}} \quad \text{utilizzando (3.1) e (3.2)}$$

Se espando l'equazione precedente evidenziando il fattore (N-Z) ottengo:

$$E_{cin}(N, Z) = \frac{3}{10M} \frac{\hbar^2}{R_0^2} \left(\frac{9}{8}\pi\right)^{\frac{2}{3}} \cdot \left(A + \frac{5(N-Z)^2}{9A} + \dots\right)$$

dove il termine A contribuisce al termine di volume nella formula di massa, mentre il secondo termine nella parentesi contiene una correzione per $N \neq Z$ e corrisponde al termine di asimmetria: cresce con il quadrato dell'eccesso di N, mentre B diminuisce della stessa misura.

Ciò significa che anche nel semplice modello a gas di Fermi in cui i nucleoni si muovono all'interno di un potenziale medio senza interagire ho reso plausibili i termini di volume e di asimmetria nella formula semi-empirica di massa.

Esercizio 2. Si determini la dipendenza dalla pressione del gas di Fermi dalla densità nucleare. Quanto vale la pressione nel caso in cui si abbia una densità di 0.17 nucleoni/fm³?

Soluzione 2. Ad entropia S costante, la pressione obbedisce alla legge

$$p = -\left(\frac{\partial U}{\partial V}\right)_S$$

con V volume e U l'energia interna del sistema. Nel modello a gas di Fermi si ha, da 3.3:

$$U = \frac{3}{5} \cdot A \cdot E_F \quad \rightarrow \quad p = -\frac{3}{5} A \frac{\partial E_F}{\partial V} \quad (\text{questo viene dal secondo termine nella parentesi})$$

Dalle definizioni del numero di N e Z in 3.1 per il caso $N=Z=A/2$ trovo che:

$$A = 2 \frac{V p_F^3}{3\pi^2 \hbar^3} = 2 \frac{V (2ME_F)^{\frac{3}{2}}}{3\pi^2 \hbar^3} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial E_F}{\partial V} = -2 \frac{E_F}{3V}$$

La pressione di Fermi è quindi data da:

$$p = \frac{2A}{5V} E_F = \frac{2}{5} \rho_N E_F \quad \text{dove } \rho_N \text{ è la densità di nucleoni.}$$

Quindi, essendo $\rho_N = 0.17 \frac{\text{nucleoni}}{\text{fm}^3}$ e $E_F \sim 33 \text{ MeV}$ allora

$$p = 2.2 \frac{\text{MeV}}{\text{fm}^3}$$

3.2 Il modello a gas di Fermi e le stelle di neutroni

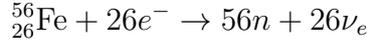
Possiamo utilizzare il modello a gas di Fermi per descrivere lo stato di materia nucleare nelle stelle di neutroni.

In questo caso non si avrà il termine di energia Coulombiana, ma si avrà la forza gravitazionale. Questa forza agirà accanto alla forza nucleare attrattiva che determina una densità nucleare pari a ρ_0 , contribuendo alla densità finale che sarà dieci volte maggiore di ρ_0 .

Le stelle di neutroni vengono prodotte in seguito all'esplosione di supernove. Il nucleo della stella quando è esausto è composto principalmente da ferro la cui massa equivale a una o due volte quella solare, collassa sotto l'azione della forza gravitazionale. L'aumento

della densità a causa della forza gravitazionale fa crescere l'energia di Fermi degli elettroni, questo fino a che posso avere decadimento β inverso: $p + e^- \rightarrow n + \nu_e$ (che vedremo tra qualche lezione).

A questo punto tutti i protoni presenti nei nuclei atomici si convertono in neutroni e i nuclei perdono la loro identità. Alla fine, l'interno della stella sarà composto solo da neutroni, in questo processo:



questo processo di imposizione si arresta solo quando la pressione di Fermi dei neutroni diventa sufficientemente grande ($\sim 10^{18} \frac{kg}{m^3}$).

Se la massa del nucleo centrale della stella supera le due masse solari ($2 \cdot M_{Sole} \cong 2 \cdot (1.99 \times 10^{30} kg)$), la pressione di Fermi non è più in grado di contrastare la forza gravitazionale e la stella diventa un buco nero.

Le stelle di neutroni meglio conosciute hanno masse che variano fra 1.3 e 1.5 volte M_{Sole} . La massa di una stella di neutroni che fa parte di un sistema binario di stelle può essere dedotta dal suo moto.

Un tipico raggio di una stella di neutroni è ~ 10 km. La struttura interna di una stella di neutroni è sconosciuta! Si possono fare solo trattazioni teoriche.

Uno dei modelli più semplici vede il nucleo più interno della stella come composto da un liquido di neutroni degeneri, a densità costante.

Il liquido degeneri ha una densità molto elevata, così elevata che il maggior contributo alla sua pressione è dato dal principio di esclusione di Pauli che impedisce ai fermioni di occupare lo stesso stato energetico.

Riducendo forzatamente il volume a disposizione dei fermioni, questi sono costretti ad occupare anche gli stati energetici più alti.

La crosta della stella ha uno spessore di circa 1 km in questo modello ed è composta da atomi che sono compattati in uno stato solido dall'intensa pressione gravitazionale.

Stimiamo ora le dimensioni della stella assumendo che abbia densità costante \rightarrow eseguiamo il calcolo con una pressione media.

Consideriamo una stella di neutroni tipica con $M = 3 \times 10^{30} kg$ (~ 1.5 volte M_{\odot}). Questo corrisponde a $N = 1.8 \times 10^{57}$ neutroni a partire da $M_n \sim 1.67 \times 10^{-27} kg$.

L'impulso di Fermi è:

$$p_F = \left(\frac{9\pi N}{4} \right)^{\frac{1}{3}} \cdot \frac{\hbar}{R}$$

qui ho solo neutroni e non un nucleo fatto di neutroni e protoni; abbiamo calcolato l'energia cinetica media per nucleone, e in questo caso quella media per ogni neutrone sarà:

$$\left\langle \frac{E_{cin}}{N} \right\rangle = \frac{3}{5} \frac{p_F^2}{2M_n} = \frac{c}{R^2}$$

$$\text{con } c = \frac{3\hbar^2}{10M_n} \left(\frac{9\pi N}{4} \right)^{\frac{2}{3}}$$

Ora vediamo invece l'energia potenziale media di un singolo neutrone, che varrà, a partire dall'energia gravitazionale di una stella a densità costante:

$$\left\langle \frac{E_{pot}}{N} \right\rangle = -\frac{3}{5} \frac{GNM_n^2}{R}$$

dove G è la costante di gravitazione universale (qui il fattore $3/5$ deriva dall'integrale per fare la media).

La stella raggiunge il suo equilibrio quando l'energia totale per nucleone è minima:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dR} \left\langle \frac{E}{N} \right\rangle &= \frac{d}{dR} \left[\left\langle \frac{E_{cin}}{N} \right\rangle + \left\langle \frac{E_{pot}}{N} \right\rangle \right] = 0 \\ \rightarrow R &= \frac{\hbar^2 (9\pi/4)^{\frac{2}{3}}}{GM_n^3 N^{\frac{1}{3}}}\end{aligned}$$

Da qui si può calcolare che il raggio di una stella di neutroni è $R \sim 12 km \rightarrow$ molto vicino al valore sperimentale ($\sim 10 km$).

Per la densità invece ottengo:

$$\rho_{SN} = \frac{N}{V} = \frac{1.8 \times 10^{57}}{\frac{4}{3}\pi R^3} \cong 0.25 \frac{\text{nucleoni}}{fm^3}$$

che è circa 1.5 volte la densità tipica di un nucleo atomico: $\rho_0 \cong 0.17 \frac{\text{nucleoni}}{fm^3}$

In realtà ci sono molti fattori in gioco, infatti la densità all'interno di una stella può crescere fino a $\sim 10 \cdot \rho_0$ e in quel caso otterrei valori di R molto più piccoli.

Per $\rho_{SN} \sim 10\rho_0$ la distanza di separazione tra neutroni sarebbe $\sim 0.8 fm$ allora ci sarebbe una forte repulsione neutrone-neutrone che li porterebbe a riallontanarsi.

Se si tiene conto di questo fatto si può concludere che la pressione gravitazionale è compensata, in egual misura, dalla pressione di Fermi + repulsione nucleone-nucleone.

La sovrapposizione dei neutroni è massima al centro della stella e potrebbe indicare la presenza di uno stato della materia in cui i quark e i gluoni non sono più confinati all'interno dei singoli neutroni, ma sono liberi.

Quindi le stelle di neutroni potrebbe anche essere parzialmente composte da **plasma di quark e gluoni**. Vedremo meglio di cosa si tratta nell'ultima lezione.

3.3 Modello a shell

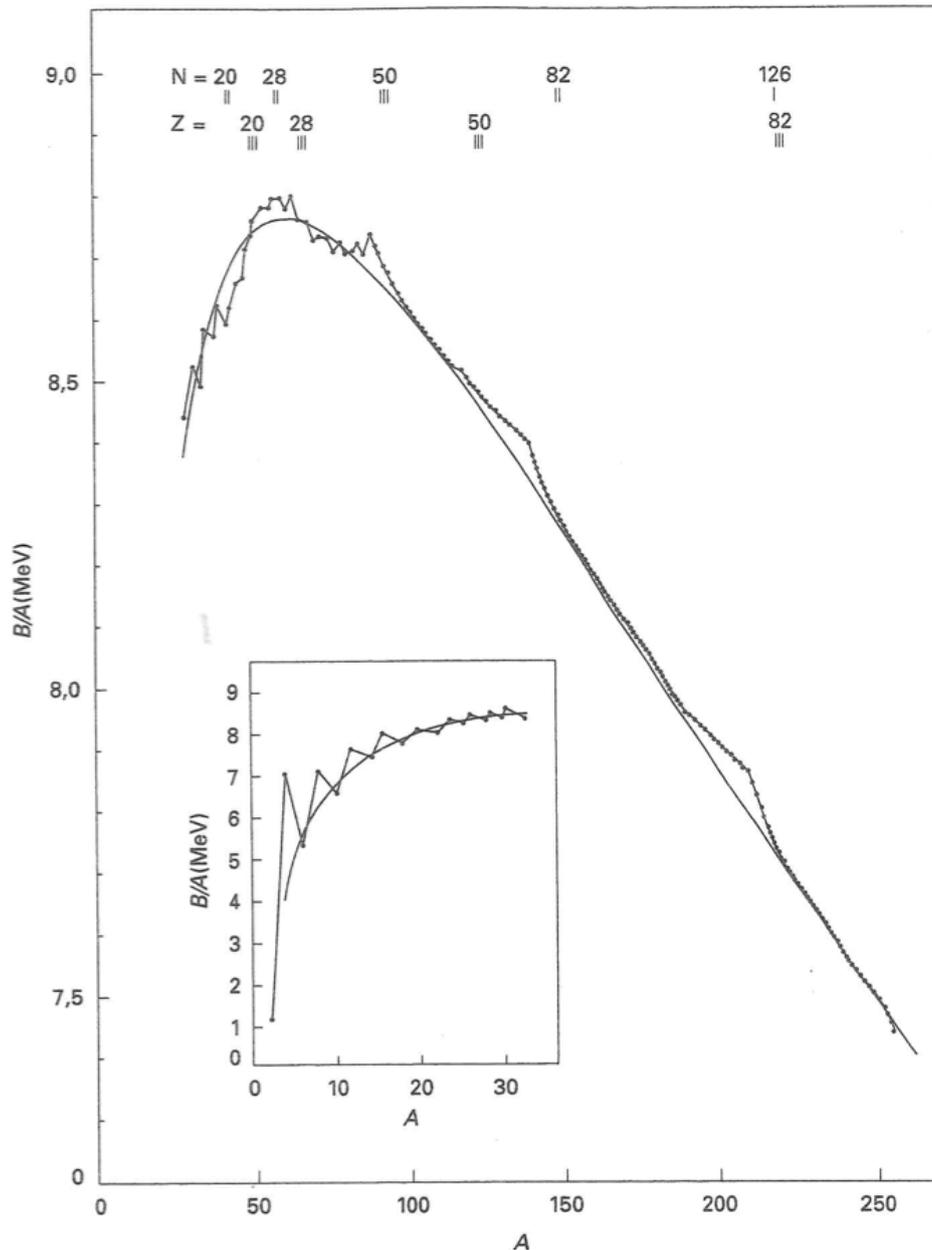
L'idea di base sotto a questo modello è che ogni nucleone occupa un livello di energia ben definito. L'esistenza di livelli discreti di energia per nucleoni ricorda la struttura della nuvola di elettroni atomica.

Nel caso atomico gli elettroni si muovono nell'atomo in un campo di potenziale Coulombiano, centrale, generato dal nucleo. Nel caso del nucleo, invece i nucleoni si muovono all'interno di un **potenziale medio**, prodotto da altri nucleoni.

In entrambi i casi ho uno spettro energetico discreto i cui livelli sono popolati secondo il principio di Pauli.

È un dato sperimentale che certi nuclidi con un determinato numero di protoni e/o neutroni sono particolarmente stabili.

Osservando il grafico di B/A per nuclei con A pari, dove la linea continua è la formula semi-empirica di massa, vedo che per alcuni valori di Z e N , sia a basso che alto A , ho una discrepanza dalla curva della formula semi-empirica di massa.



La discrepanza è verso l'alto, cioè ci sono alcuni valori di Z e N per cui il legame è più forte. Questi corrispondono ai **numeri magici** (2, 8, 20, 28, 50, 82, 126). I nuclei con un numero magico di Z o N hanno un numero molto grande di isotopi (stesso Z), e isotoni (stesso N) stabili o molto longevi.

Se N è un numero magico allora serve molta energia per estrarre un neutrone.

Viceversa, se aumento di una unità N , S_n (energia di separazione di un neutrone) diventa molto più piccola; lo stesso vale per i protoni.

Si riscontra inoltre che è necessaria molta energia per portare uno di questi nuclei in uno stato eccitato.

I nuclei doppiamente magici *i.e.* quelli per cui sia N che Z sono magici, sono eccezionalmente stabili, ad esempio:



(nota: il nuclide $^{208}_{82}\text{Pb}_{126}$ viene usato nelle collisioni ad LHC al CERN).
Per spiegare questi numeri usiamo il **modello a shell**.

3.3.1 Autostati del potenziale nucleare

Introduciamo un opportuno potenziale nucleare. L'interazione forte ha raggio d'azione piccolo, quindi la forma del potenziale dovrebbe seguire la distribuzione di densità dei nucleoni nel nucleo.

Se il nucleo è molto leggero ($A \leq 7$) la distribuzione di densità è simile ad una gaussiana. Quindi approssimo questo potenziale a quello di un oscillatore armonico tridimensionale e l'equazione di Schrödinger può essere risolta analiticamente.

Lavorando in coordinate sferiche, la soluzione dell'equazione può essere divisa in una parte radiale e una parte angolare.

Nel nostro caso, il potenziale considerato è centrale, ha la forma $V(r) = 1/2kr^2$ e quindi dipende solamente dalla coordinata radiale r .

Quindi la parte angolare della soluzione che dipende dalle coordinate θ e ϕ può essere ricavata direttamente. Le soluzioni angolari combinate mi daranno le armoniche sferiche $Y_{lm_l}(\theta, \phi)$, con $m_l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm l$ costante di separazione e $l = 0, 1, 2, 3, \dots$

La soluzione della parte radiale può essere espressa come il prodotto tra un esponenziale e un polinomio di grado finito.

I livelli energetici sono dati da

$$E_n = \hbar\omega_0\left(N + \frac{3}{2}\right)$$

con $n = 0, 1, 2, 3, \dots$

Il numero quantico N rappresenta i livelli energetici, n il numero di nodi e il numero l rappresenta il momento angolare orbitale, $l = 0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots = s, p, d, f, g, h, \dots$. Dalla risoluzione dell'equazione radiale, si ricava che l non può assumere tutti i valori possibili ma deve essere $l \leq N$.

I livelli energetici sono determinati da $N = 2(n - 1) + l$.

È la stessa nomenclatura utilizzata in fisica atomica, con l'eccezione che n non è il numero quantico principale, conta semplicemente il numero di livelli con quel valore l . Ad esempio, $1d$ è il più basso livello con stato d , $2d$ è il secondo e così via.

Siccome l'energia non dipende da m_l e, considerati i valori che può assumere la costante di separazione, c'è una degenerazione di $2l + 1$ per ogni valore di l .

La degenerazione è la situazione per cui ogni livello energetico può avere diversi set di numeri quantici, corrispondenti a diverse funzioni d'onda corrispondenti a diverse densità di probabilità e diversi autostati per le osservabili fisiche, ma tutti con la stessa energia. Questa degenerazione ha un ruolo fondamentale nel modello a shell, perché ci dice quanti nucleoni possono trovarsi in ogni shell nucleare.

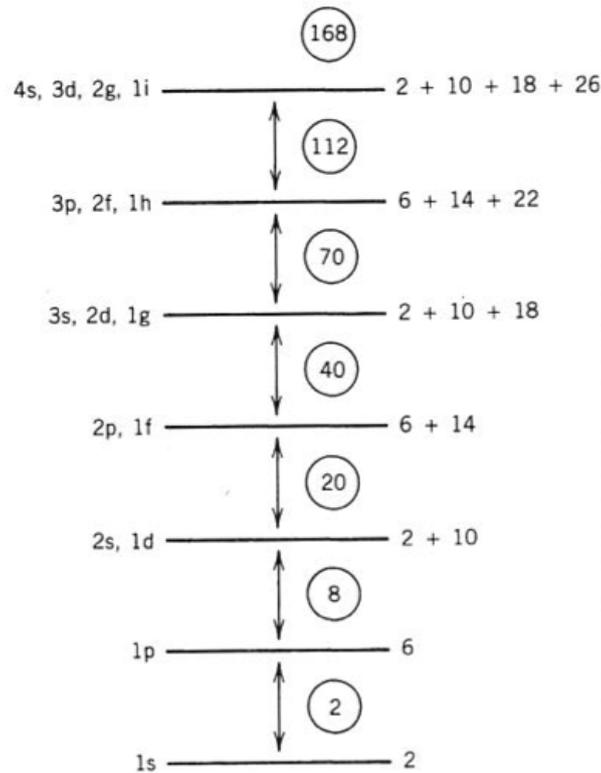
Oltre alla degenerazione $2l + 1$ c'è un fattore 2 che deriva dal fatto che i nucleoni hanno due possibili orientazione di spin.

Quindi i livelli sono di fatto $2 \cdot (2l + 1)$ volte degeneri.

$$s \rightarrow l = 0 \quad 2(2 \cdot 0 + 1) = 2 \text{ stati} \qquad p \rightarrow l = 1 \quad 2(2 \cdot 1 + 1) = 6 \text{ stati}$$

La parità della funzione d'onda è data dalla funzione d'onda sferica $Y_l^m = (-1)^l$.

Si osserva la struttura a shell ottenuta con il potenziale dell'oscillatore armonico:



A destra osservo la capacità di ogni livello, n e p non sono identici quindi posso avere ad esempio $2n$ o $2p$.

I larghi intervalli tra i livelli indicano shell chiuse, e i numeri cerchiati rappresentano il numero totali di nucleoni ad ogni chiusura di shell.

Osservo che già con questa approssimazione semplice del potenziale nucleare riproduco i numeri magici 2, 8 e 20.

3.3.2 Il potenziale di Wood-Saxon

I nuclei non sono sfere con una superficie definita in modulo netto, all'interno del nucleo la densità di carica è costante, mentre in superficie si annulla gradualmente.

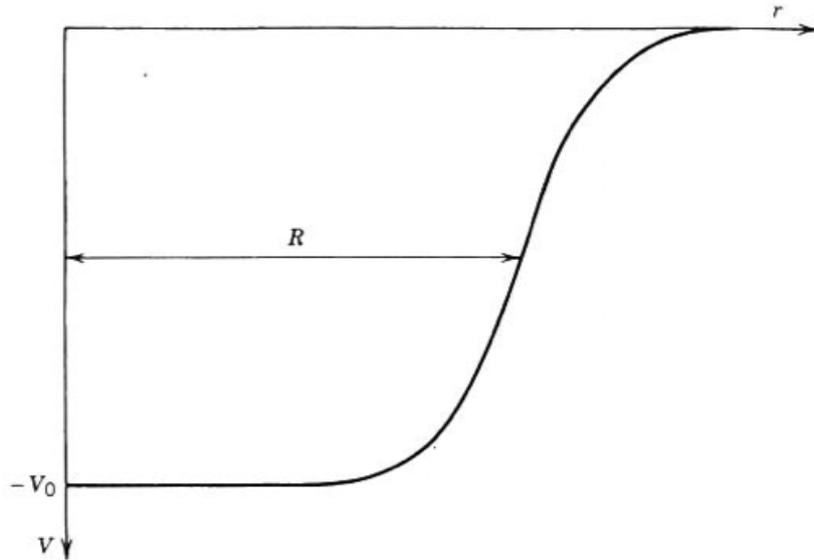
La distribuzione radiale della carica elettrica può essere descritta da una distribuzione di Fermi a due parametri:

$$\rho(r) = \frac{\rho(0)}{1 + e^{\frac{r-c}{a}}}$$

con c = distanza radiale alla quale la $\rho(r)$ si riduce alla metà del suo valore a $r = 0$

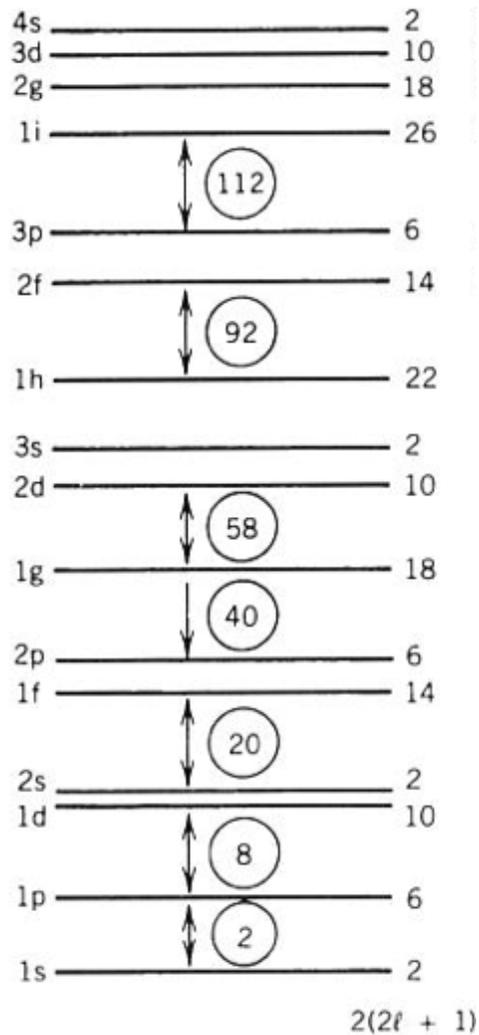
Il potenziale di Wood-Saxon è legato a questa distribuzione:

$$V_{centr}(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{a}}}$$



dove V_0 sarà la profondità della buca, a rappresenta lo spessore della superficie del nucleo, $a \sim 0.5 fm$; R =raggio medio $\sim 1.25 \cdot A^{\frac{1}{3}}$ con A numero di massa. Tipicamente $V_0 \sim 50 MeV$.

Si osservano quindi i livelli energetici col potenziale di Wood-Saxon:



L'effetto dell'uso del potenziale di Wood-Saxon è quello di rimuovere la degenerazione di l nelle shell, perché gli stati con lo stesso N ma diverso nl presentano energie diverse (stati con n piccolo, l grande hanno energia un pochino più bassa).

Anche se il modello non replica tutti i numeri magici, risulta utile per introdurre il modello successivo.

3.3.3 L'accoppiamento spin orbita

Ora ci chiediamo come migliorare ulteriormente il modello. Non possiamo cambiare radicalmente la forma del potenziale perché non vogliamo distruggere il significato fisico di questo modello e il potenziale di Wood-Saxon ha la forma corretta.

E' necessario però includere gli effetti dell'accoppiamento spin-orbita che producono ulteriori separazioni tra i livelli delle shell nl .

Il potenziale di Wood-Saxon contiene già una buona descrizione fisica del modello ma va aggiunto un termine di accoppiamento spin-orbita:

$$V(r) = V_{centr}(r) + V_{ls}(r) \frac{\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle}{\hbar^2}$$

dove \vec{l} : momento angolare orbitale

\vec{s} : spin del nucleone.

Sappiamo che un singolo nucleone ha $s = 1/2$, quindi definiamo il **momento angolare totale** come: $\vec{j}\hbar = \vec{l}\hbar + \vec{s}\hbar$ e avrà due valori possibili:

$$j\hbar = l\hbar + \frac{\hbar}{2} \quad j\hbar = l\hbar - \frac{\hbar}{2}$$

ad eccezione del caso $l = 0$, dove avrà un valore unico $j\hbar = \frac{\hbar}{2}$.

Calcolo:

$$\vec{j}^2 \hbar^2 = \hbar^2 (\vec{l} + \vec{s})^2 = \hbar^2 (\vec{l}^2 + 2\vec{l} \cdot \vec{s} + \vec{s}^2) \quad \rightarrow \quad \vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} (\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2)$$

risolvendo l'equazione agli autovalori e inserendo i valori attesi:

$$\frac{\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle}{\hbar^2} = \frac{1}{2} [j(j+1) - l(l+1) - s(s+1)] \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \frac{l}{2} & \text{per } j = l + \frac{1}{2} \\ -\frac{(l+1)}{2} & \text{per } j = l - \frac{1}{2} \end{cases}$$

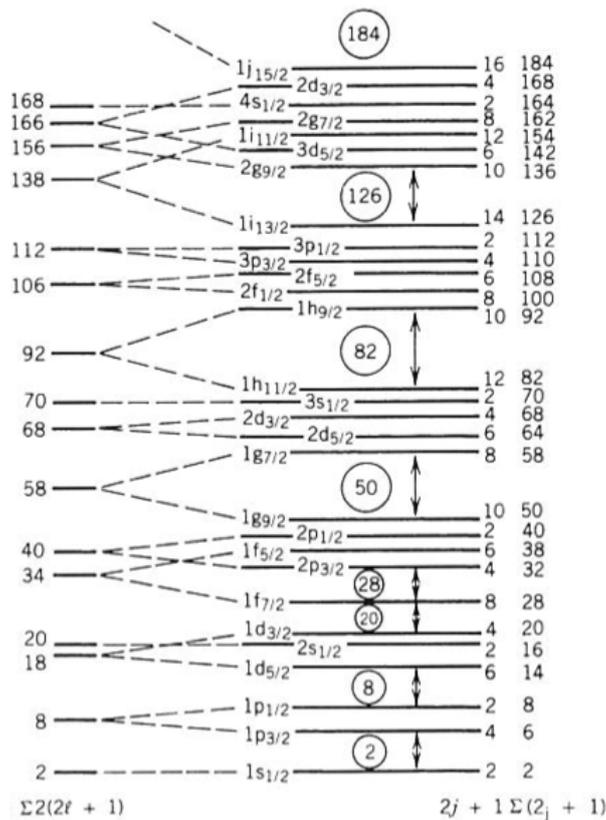
quindi la separazione dei livelli cresce linearmente col momento angolare:

$$\begin{aligned} \Delta E_{ls} &= \left[\langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle_{j=l+\frac{1}{2}} - \langle \vec{l} \cdot \vec{s} \rangle_{j=l-\frac{1}{2}} \right] \cdot \langle V_{ls}(r) \rangle = \\ &= \frac{2l+1}{2} \cdot \langle V_{ls}(r) \rangle \end{aligned}$$

che cresce al crescere di l .

Sperimentalmente si trova che V_{ls} è negativo. Quindi il livello con $j = l + 1/2$ si trova sempre al di sotto di quello con $j = l - 1/2$.

L'effetto di shell è molto evidente e i numeri magici sono riprodotti alla perfezione:



Si osserva che i livelli con $l > 0$ sono divisi in due nuovi livelli per effetto dell'accoppiamento spin-orbita.

Sotto sulla sinistra si trova la degenerazione del potenziale Wood-Saxon da solo.

Solitamente il numero quantico $j = l \pm \frac{1}{2}$ è specificato con un indice aggiuntivo, ad esempio lo stato 1f ($l=3$) che ha degenerazione $2(2l+1)=14$:

$$j = l \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{livello } 1f_{\frac{5}{2}} \\ \frac{7}{2} & \text{livello } 1f_{\frac{7}{2}} \end{cases}$$

la degenerazione di ogni livello è $(2j+1)$ che viene dal numero quantico j .

La capacità del livello $1f_{\frac{5}{2}}$ è 6 mentre quella del livello $1f_{\frac{7}{2}}$ è 8 per un totale di 14 stati. Guardando la figura si vede che il livello $1f_{\frac{7}{2}}$ è nel gap tra la seconda e la terza shell e la sua capacità è 8, ci dà il numero magico 28!

Vediamo ora il livello $1g_{\frac{9}{2}}$ è spinto in giù fino alla shell sotto, la sua capacità di 10 nucleoni si aggiunge al totale di 40 per quella shell, dando il numero magico 50.

Si nota dunque che la capacità di un livello è il numero di nucleoni che può ospitare e la somma progressiva delle varie capacità ci dà i numeri magici.

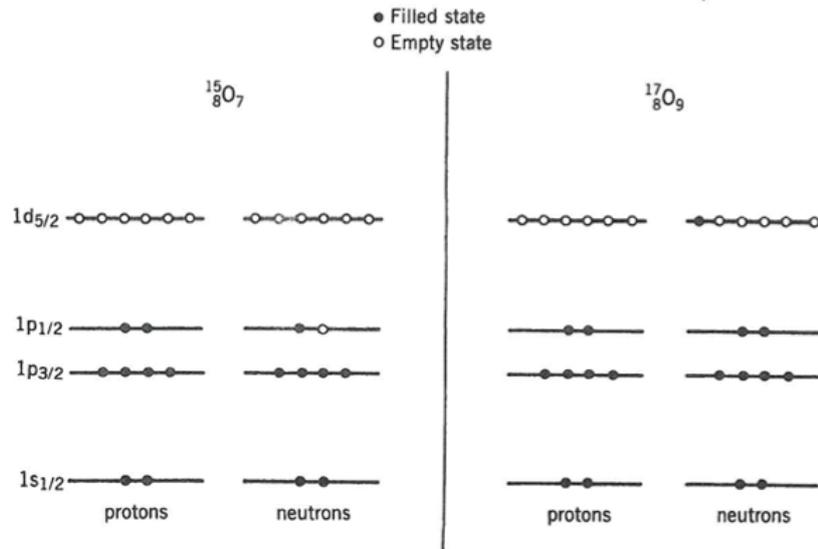
Fatto interessante: abbiamo predetto un nuovo numero magico 184 che non è mai stato osservato!

3.3.4 Esempio applicativo del modello a shell

Vediamo il riempimento dei livelli necessari per produrre $^{15}_8\text{O}$ e $^{17}_8\text{O}$.

$Z=8$ protoni riempiono una shell chiusa e non contribuiscono alla struttura.

Nel modello a shell sono i nucleoni singoli disaccoppiati, detti nucleoni **spaiati**, che determinano lo stato del nucleo.



Per il $^{15}_8\text{O}$ il neutrone spaiato è nella shell $1p_{1/2}$, il nucleone mancante è detto **buco**. Quindi lo stato fondamentale dell' $^{15}_8\text{O}$ dovrebbe avere spin $1/2$ e parità $(-1)^l$, quindi essere dispari.

In questo caso il momento angolare J e la parità P , scritti come numero quantico J^P sono $J^P = \frac{1}{2}^-$.

Lo stato fondamentale dell' $^{17}_8\text{O}$ dovrebbe essere caratterizzato da un buco nel livello $1d_{5/2}$ con momento angolare $5/2$ e pari, quindi $J^P = \frac{5}{2}^+$.

Queste due predizioni sono in accordo con la realtà! Il modello a shell ha infatti un grande successo per $A < 150$ o $190 < A < 220$.

3.3.5 Oltre il Modello a Shell

Nuclei Deformati

Nel modello a shell abbiamo assunto che i nuclei siano oggetti a simmetria sferica e questo è valido solo per nuclei che sono prossimi ad avere shell chiuse.

I nuclei con shell occupate solo a metà sono deformati e hanno un potenziale che non è più a simmetria sferica (caso per $150 < A < 190$ e $A > 230$).

Nuclei pari-pari

Nel caso di nuclidi con Z, N pari, per tutti i nuclei, indipendentemente da quali stati sono occupati, si avrà che lo stato fondamentale ha $J^P = 0^+$ e il primo stato eccitato avrà invece $J_1^P = 2^+$.

e siccome verranno ordinati a coppie la loro parità risulterà essere sempre positiva (dimostrato anche sperimentalmente).

Nuclei dispari-dispari

Nel caso dispari-dispari i protoni spaiati con momento angolare totale j_1 e i neutroni spaiati con momento angolare totale j_2 contribuiscono allo spin totale che sarà somma vettoriale di questi momenti angolari e ha valori tra $|j_1 - j_2|$ e $j_1 + j_2$ in step unitari.

La parità sarà: $(-1)^{l_1+l_2}$ con l_1 e l_2 momenti angolari orbitali del protone e neutrone spaiati, rispettivamente.

Ad esempio ${}^6_3\text{Li}_3$ con $A=6$ e $Z=N=3$ ha che l'ultimo protone e l'ultimo neutrone giacciono in $1p_{\frac{3}{2}} \rightarrow l=1$.

Siccome sia protone che neutrone giacciono lì, allora la parità è $(-1) \cdot (-1) = +1$ positiva.

$$j_{min} = |j_1 - j_2| = 0 \quad j_{max} = j_1 + j_2 = 3 \quad \Rightarrow \quad J^P = 0^+, 1^+, 2^+, 3^+$$

perché $j_1 = j_2 = \frac{3}{2}$.

Esercizio 3. Nella tabella seguente sono presentati i valori determinati sperimentalmente dello spin e della parità dello stato fondamentale e del 1° stato eccitato di alcuni nuclei

	${}^7_3\text{Li}$	${}^{23}_{11}\text{Na}$	${}^{33}_{16}\text{S}$	${}^{47}_{21}\text{Sc}$	${}^{86}_{36}\text{Kr}$	${}^{93}_{41}\text{Nb}$
J_0^P	$\frac{3}{2}^-$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{7}{2}^-$	$\frac{9}{2}^+$	$\frac{9}{2}^+$
J_1^P	$\frac{1}{2}^-$	$\frac{5}{2}^+$	$\frac{1}{2}^+$	$\frac{3}{2}^+$	$\frac{7}{2}^+$	$\frac{1}{2}^-$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{2}{2}$

Si determini per tali nuclei le configurazioni di protoni e neutroni nelle shell incomplete più esterne e se ne predicano i numeri quantici per gli stati fondamentali e per i primi stati eccitati nell'ambito del modello a shell.

Si paragonino i risultati così ottenuti con i valori riportati in tabella.

Soluzione 3. Litio ${}^7_3\text{Li}$, $A=7$, $Z=3$, $N=4$ quindi si ha un protone spaiato in $1p_{\frac{3}{2}}$ dunque si ha che $l=1$ e

$$j = l \pm \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{2} \quad \text{spin} = \frac{3}{2} \quad P = (-1)^l = -1$$

allora si vede facilmente avendo indicato con s lo spin e P la parità che $J_0^P = \frac{3}{2}^-$ che è in accordo con il valore misurato.

Il 1° stato eccitato si ottiene in 2 modi:

1. per eccitazione del nucleone spaiato nella sottoshell successiva
2. per accoppiamento di questo nucleone con un altro che provenga da una sottoshell più interna

In questo caso si ha che possiamo passare da $1p_{\frac{3}{2}} \xrightarrow{1} 1p_{\frac{1}{2}}$ e $1p_{\frac{3}{2}} \xrightarrow{2} 1s_{\frac{1}{2}}$ e qui si differenziano i 2 casi

$$1. \quad 1p_{\frac{1}{2}} \text{ parità } (-1)^l = -1 \text{ allora } J_1^P = \frac{1}{2}^-$$

$$2. \quad 1s_{\frac{1}{2}} \text{ parità } (-1)^l = +1 \text{ allora } J_1^P = \frac{1}{2}^+$$

ma nel caso 2 mi occorrerebbe molta energia perché sto occupando una nuova shell, questo significa che mi aspetto di occupare lo stato eccitato solo per eccitazioni più alte.

Sodio ${}^{23}_{11}\text{Na}$, $A=23$, $Z=11$, $N=12$ quindi si ha un protone spaiato in $1d_{\frac{5}{2}}$ dunque si ha che $l=2$ siccome

l	0	1	2	3	4	5	6
simbolo	s	p	d	f	g	h	i

$$j = l \pm \frac{1}{2} = \frac{5}{2} \text{ o } \frac{3}{2} \quad \text{spin} = \frac{5}{2} \quad P = (-1)^l = +1$$

allora si vede facilmente avendo indicato con s lo spin e P la parità che $J_0^p = \frac{5}{2}^+$ qui il modello a shell non funziona perché il valore misurato è $J_0^p = \frac{3}{2}^+$.

Il modello non funziona perché ho in questo caso più di un nucleone nella sottoshell non riempita.

Per il primo stato eccitato, si ha

1. $2s_{\frac{1}{2}}$ parità $(-1)^l = +1$ allora $J_1^p = \frac{1}{2}^+$

2. $1p_{\frac{1}{2}}$ parità $(-1)^l = -1$ allora $J_1^p = \frac{1}{2}^-$

anche questi non sono in accordo con la misura.

Zolfo ${}^{33}_{16}S$, $A=33$, $Z=16$, $N=17$ quindi si ha un neutrone spaiato in $1d_{\frac{3}{2}}$ dunque si ha che $l = 2$ e $J_0^p = \frac{3}{2}^+$.

Per il primo stato eccitato, si ha

1. $1f_{\frac{7}{2}}$ fuori dalla shell, $l = 3$ allora $J_1^p = \frac{7}{2}^-$

2. $2s_{\frac{1}{2}}$ $l = 0$ allora $J_1^p = \frac{1}{2}^+$ compatibile con la misura.

Scandio ${}^{41}_{21}Na$, $A=41$, $Z=21$, $N=20$ quindi si ha un protone spaiato in $1f_{\frac{7}{2}}$ dunque si ha che $l = 3$ e $J_0^p = \frac{7}{2}^-$.

Per il primo stato eccitato, si ha

1. $1f_{\frac{7}{2}}$ fuori dalla shell, $l = 3$ allora $J_1^p = \frac{7}{2}^-$

2. $2s_{\frac{1}{2}}$ $l = 0$ allora $J_1^p = \frac{1}{2}^+$ compatibile con la misura.

Kripton ${}^{83}_{36}Kr$, $A=83$, $Z=36$, $N=47$ quindi si ha un neutrone spaiato in $1g_{\frac{9}{2}}$ dunque si ha che $l = 4$ e $J_0^p = \frac{9}{2}^+$.

Per il primo stato eccitato, si ha

1. $1g_{\frac{7}{2}}$ fuori dalla shell, $l = 4$ allora $J_1^p = \frac{7}{2}^+$

2. $2p_{\frac{1}{2}}$ $l = 1$ allora $J_1^p = \frac{1}{2}^-$

in questo caso, il primo metodo è compatibile con la misura. Il modello non funziona molto bene perché la sottoshell ha più di un buco.

Niobio ${}^{93}_{41}Nb$, $A=93$, $Z=41$, $N=52$ quindi si ha un protone spaiato in $1g_{\frac{9}{2}}$ dunque si ha che $l = 4$ e $J_0^p = \frac{9}{2}^+$.

Per il primo stato eccitato, si ha

1. $1g_{\frac{7}{2}}$ fuori dalla shell, $l = 4$ allora $J_1^p = \frac{7}{2}^+$

2. $2p_{\frac{1}{2}}$ $l = 1$ allora $J_1^p = \frac{1}{2}^-$ in accordo con la misura.

Esercizio 4. Calcolare spin e parità per nuclei dispari-dispari 6_3Li e ${}^{40}_{19}Kr$.

Soluzione 4. Il primo caso l'abbiamo visto precedentemente, protone spaiato in $1p_{\frac{3}{2}}$ e neutrone spaiato in $1p_{\frac{3}{2}}$, quindi $J^P = 0^+, 1^+, 2^+, 3^+$.

Il secondo caso sarà $A=40, Z=19, N=21$, quindi protone spaiato in $1d_{\frac{3}{2}}$ e neutrone spaiato in $1f_{\frac{7}{2}}$, quindi $J^P = 2^-, 3^-, 4^-, 5^-$.

I valori sperimentali sono 1^+ per il 6_3Li e 4^- per il ${}^{40}_{19}Kr$.

Esercizio 5. Esercizio esame 01/07/2022

1. Determinare spin e parità predetti dal modello a shell per gli stati fondamentali dei seguenti nuclidi: ${}^{15}_6C$, ${}^{15}_7N$ e ${}^{15}_8O$?
2. Ordinare la triade di isobari del punto 1. partendo da quello con la massa più bassa a quello con la massa più alta, giustificando la risposta.
3. Indicare come è possibile stimare abbastanza accuratamente la differenza in energia tra i due isobari con massa più bassa della triade al punto 1.

Si consideri:

$$R = 1.21 \cdot A^{1/3} \text{fm}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\alpha \cdot \hbar c}{e^2} = \frac{197}{137 \cdot e^2} \text{MeV} \cdot \text{fm}$$

Soluzione 5. 1. Nel modello a shell lo spin e la parità sono determinati a partire dall'ultimo nucleone spaiato, quindi:

${}^{15}_6C$: $J^P = (\frac{5}{2}^+)$, siccome ha un neutrone spaiato in $1d_{5/2}$

${}^{15}_7N$: $J^P = (\frac{1}{2}^-)$, siccome ha un protone spaiato in $1p_{1/2}$

${}^{15}_8O$: $J^P = (\frac{1}{2}^-)$, siccome ha un neutrone spaiato in $1p_{1/2}$.

2. Ordinando i nuclidi da quello con la massa minore a quello con la massa maggiore ottengo: ${}^{15}_7N$, ${}^{15}_8O$, ${}^{15}_6C$.

La differenza in massa tra ${}^{15}_7N$ e ${}^{15}_8O$ nasce da due fattori: la differenza in energia Coulombiana e la differenza in massa tra neutrone e protone.

La differenza in energia di Coulomb è la causa dell'ordinamento. Infatti, l' ${}^{15}_8O$ ha un protone in più rispetto ad ${}^{15}_7N$ quindi ha energia di Coulomb più alta.

Una maggiore repulsione Coulombiana implica una minore energia di legame, risultando in una massa più alta.

Il ${}^{15}_6C$ invece ha molti meno protoni e molti più neutroni, quindi si trova lontano dalla fascia dei nuclei stabili.

Per questo motivo ha energia di legame minore e massa più alta.

3. Considerando i due nuclidi con massa più bassa della triade sopra, ${}^{15}_7N$ e ${}^{15}_8O$, posso approssimarli a sfere di carica uniforme, ognuna con energia Coulombiana elettrostatica pari a:

$$E_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{5R}$$

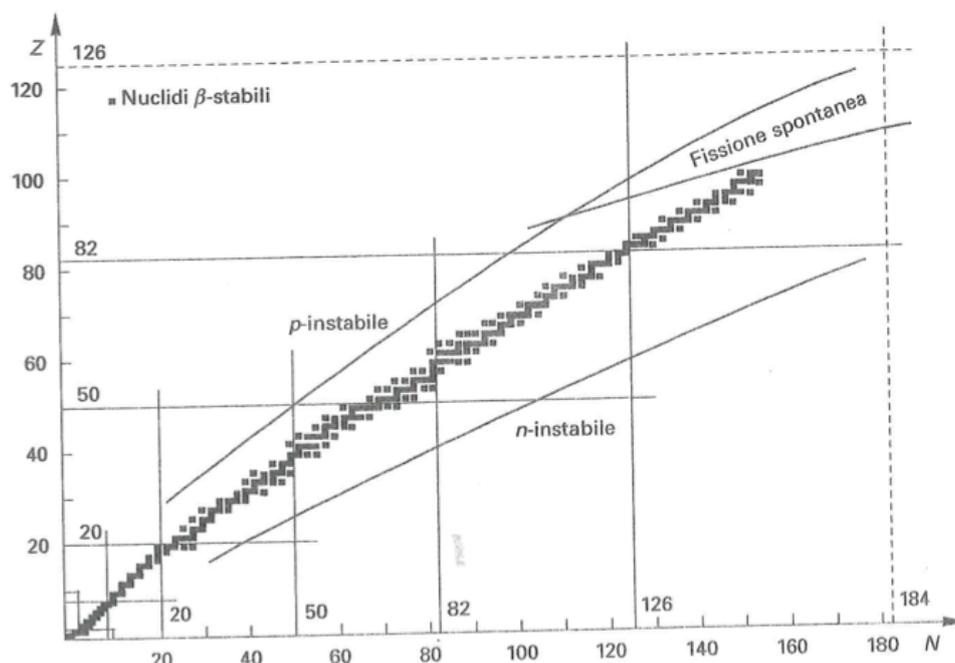
con R raggio nucleare.

La differenza in energia sarà quindi:

$$\begin{aligned}
[M({}^{15}_8O) - M({}^{15}_7N)]c^2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5R} (Q_O^2 - Q_N^2) - [M_n - M({}^1H)]c^2 = \\
&= \frac{197}{137 \cdot e^2} \text{MeV} \cdot \text{fm} \frac{3}{5 \cdot 1.21 \cdot 15^{1/3} \text{fm}} e^2 (8^2 - 7^2) - 0.78 \text{MeV} = \\
&= 3.56 \text{MeV}
\end{aligned}$$

Capitolo 4

La stabilità dei nuclei



I nuclei stabili si trovano solo lungo una stretta fascia nel piano Z-N.

Tutti gli altri nuclei sono instabili, decadono spontaneamente e in vari modi.

Ad esempio, per isobari con eccesso di neutroni è vantaggioso energeticamente convertire un neutrone in un protone (o una reazione inversa per un eccesso di protoni). Questa particolare conversione è detta **decadimento β** ed è una forma particolare dell'interazione debole che verrà approfondita in seguito.

I nuclei di ^{56}Fe e ^{58}Ni posseggono la massima energia di legame per nucleone e sono quindi i nuclidi più stabili.

A causa della repulsione Coulombiana, l'energia di legame per nucleone è minore.

I nuclei ancora più pesanti diventano instabili e decadono per fissione in due o più nuclei di massa inferiore.

Per rendere energeticamente possibile questo processo la massa dell'atomo originario deve essere superiore alla somma delle masse dei prodotti finali del processo.

Per un decadimento a due corpi:

$$M(A, Z) > M(A - A', Z - Z') + M(A', Z')$$

questa relazione tiene conto della necessità di conservare il numero complessivo di protoni e neutroni, ma non contiene alcuna informazione riguardo alla probabilità di tale decadimento.

Si definisce isotopo stabile quando la sua vita media è considerevolmente più lunga della vita media del sistema solare.

Processi con decadimento con molte particelle nello stato finale sono meno probabili dei decadimenti a due corpi e verranno studiati solo brevemente in seguito.

Molto spesso accade che venga prodotto il nucleo di ${}^4\text{He}$, con $A'=4$ e $Z'=2$; questo viene chiamato **decadimento α** perché ${}^4\text{He}$ è detta **particella α** .

Invece se un nucleo pesante decade in due nuclei piuttosto massivi \rightarrow **fissione spontanea** e $P(\text{fissione}) > P(\alpha)$ per $Z \geq 110$.

4.1 La legge del decadimento radioattivo

Se ho N nuclei radioattivi presenti in un tempo t e non introduco nuovi nuclei nel campione allora il numero dN che decade in un tempo dt è proporzionale a N , quindi:

$$\lambda = -\frac{\left(\frac{dN}{dt}\right)}{N} \quad \text{costante di decadimento}$$

, la quale identifica la probabilità per unità di tempo che decada un nucleo.

Integrando si ottiene:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t} \quad \rightarrow \quad \text{legge esponenziale del decadimento radioattivo}$$

N_0 ci da il numero originario di nuclei a $t = 0$, inserendo $N = \frac{N_0}{2}$ ottengo il **tempo di dimezzamento** $t_{\frac{1}{2}}$:

$$t_{\frac{1}{2}} = \frac{0.693}{\lambda} \quad \text{tempo necessario per far decadere metà dei nuclei}$$

La vita media τ è il tempo medio perché un nucleo sopravviva prima di decadere.

Il numero di nuclei che sopravvivono ad un tempo t è $N(t)$ e il numero di essi che decadono tra un tempo da t a $t + dt$ è $\left|\frac{dN}{dt}\right|dt$, quindi la vita media è l'inverso della costante di decadimento:

$$\tau = \frac{\int_0^\infty t \left|\frac{dN}{dt}\right| dt}{\int_0^\infty \left|\frac{dN}{dt}\right| dt} = \frac{1}{\lambda}$$

al denominatore ho il numero totale dei decadimenti, $\frac{1}{\lambda}$ è l'inverso della costante di decadimento.

La legge esponenziale di decadimento radioattivo ci permette di predire il numero di nuclei che non sono decaduti dopo un certo tempo t .

In realtà N è un numero molto difficile da misurare. E' più facile contare il numero di decadimenti dal tempo t_1 al tempo t_2 osservando la radiazione emessa.

Se c'è un cambiamento ΔN da t a $t + \Delta t$:

$$|\Delta N| = N(t) - N(t + \Delta T) = N_0 e^{-\lambda t} (1 - e^{-\lambda \Delta t})$$

se $\Delta t \ll \frac{1}{\lambda} \ll t_{\frac{1}{2}}$ ignoro i termini superiori dell'esponenziale e ottengo:

$$|\Delta N| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} \Delta t$$

e nella forma differenziale:

$$\left| \frac{dN}{dt} \right| = \lambda N_0 e^{-\lambda t} = \lambda N(t)$$

Definiamo quindi l'**attività A** come il numero di decadimenti per unità di tempo:

$$A(t) = \lambda N(t) = A_0 e^{-\lambda t}$$

con attività iniziale a $t=0$: $A_0 = \lambda N_0$.

Misurare il numero di conteggi ΔN in un intervallo di tempo Δt ci permette di ottenere l'attività del campione solo se $\Delta \ll t_{1/2}$:

$$\Delta N = \int_{t_1}^{t_2=t_1+\Delta t} A dt = A \Delta t$$

altrimenti le approssimazione considerate precedentemente non sono più valide.

Dunque A risulta essere il numero di decadimenti per unità di tempo e si misura in l'unità di misura di A risulta essere

$$A = \left[\frac{\text{decadimenti}}{\text{sec}} \right] = Ci \quad 1Ci = 3.7 \times 10^{10} \frac{\text{decadimenti}}{\text{sec}}$$

che indicava originariamente l'attività di un giorno del Radio. Nel SI si usa: 1 bequerel (Bq) = $1 \frac{\text{decadimento}}{\text{s}}$.

Siccome $A(t) = A_0 e^{-\lambda t}$, ho decadimento esponenziale col tempo, quindi per misurare $A(t)$ contro il numero di decadimenti in una sequenza di brevi intervalli temporali Δt .

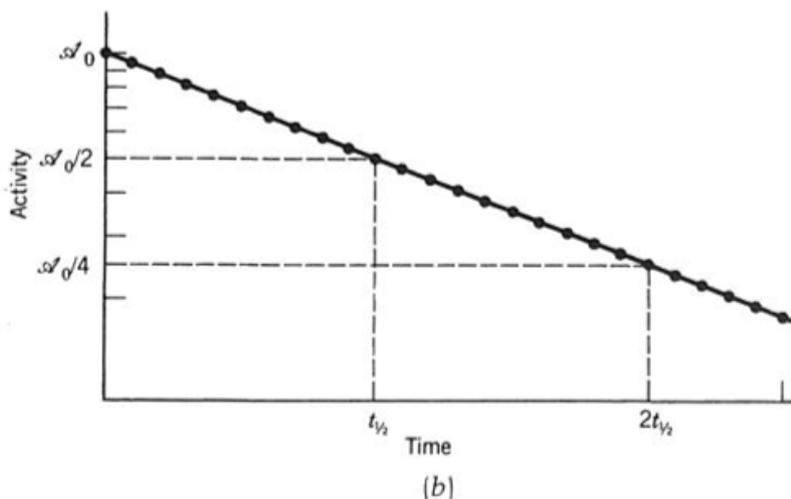
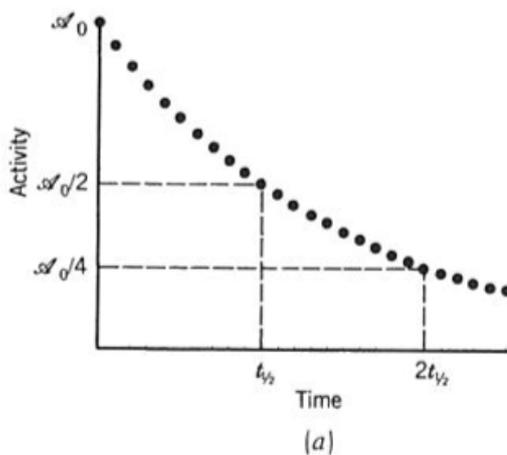


grafico con scala logaritmica sulle ordinate: scala semi-logaritmica $\ln A$.

Questo metodo può essere usato per vite medie non troppo lunghe cosicché si possa vedere il campione decadere, e non troppo corte.

- a) **se $\tau >$ vita umana:** non si vedrà alcuna riduzione del campione allora misuro direttamente $\frac{dN}{dt} = -\lambda N$ misurando il numero di atomi (ad esempio pesando il campione)
- b) **se $\tau \ll 1s$:** si usa un metodo più preciso basato sul multiscaling, un metodo disponibile su questi tutti gli analizzatori multicanale che mi permette di misurare vite medie ~ 1 ps.

Infatti con un campionamento singolo non è possibile fare la misura perché l'accendere e spegnere l'apparato si azzerava subito l'attività

La semplice legge esponenziale del decadimento radioattivo si applica solo se una quantità di una sostanza decade emettendo radiazione in un prodotto stabile.

Quindi, un nucleo radioattivo 1 decade con costante di decadimento λ_1 in un nucleo stabile 2.

Il numero di nuclei presenti sarà:

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda_1 t}; \quad N_2 = N_0 (1 - e^{-\lambda_1 t})$$

allora N_2 inizia a 0 e approssima N_0 per $t \rightarrow \infty$ perché tutti i nuclei di tipo 1 diventeranno di tipo 2.

Dunque si può dedurre che $N_1 + N_2 = N_0$, cioè il numero totale di nuclei è costante.

Un caso più complesso è quello per cui un nucleo iniziale decade in due o più modi differenti, a e b in due nuclei differenti finali.

Entrambi i modi hanno una **costante di decadimento parziale**

$$\lambda_a = - \left(\frac{dN}{dt} \right)_a \frac{1}{N} \quad \lambda_b = - \left(\frac{dN}{dt} \right)_b \frac{1}{N}$$

con **tasso di decadimento totale**

$$- \left(\frac{dN}{dt} \right)_t = - \left(\frac{dN}{dt} \right)_a - \left(\frac{dN}{dt} \right)_b = N(\lambda_a + \lambda_b) = N\lambda_t$$

con $\lambda_a + \lambda_b = \lambda_t$ **costante di decadimento totale**. Da questo si vede che i nuclei decadono secondo $N = N_0 e^{-\lambda_t t}$ e l'attività $\left| \frac{dN}{dt} \right|$ decade con costante di decadimento λ_t . Nella realtà quindi non osservo mai l'attività con costante solo λ_a o λ_b .

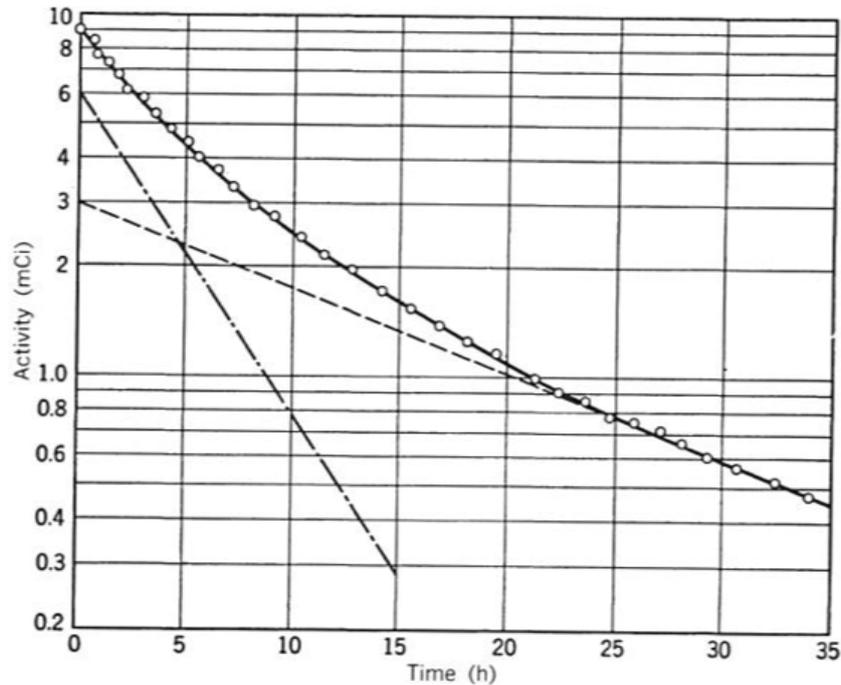
Le costanti di decadimento parziale determinano la probabilità di decadere nel modo a e b rispettivamente, quindi una frazione $\frac{\lambda_a}{\lambda_t}$ dei nuclei decade con modo a , mentre $\frac{\lambda_b}{\lambda_t}$ con modo b .

Dunque ricapitolando il numero di nuclei presenti sarà:

$$N_1 = N_0 e^{-\lambda_1 t} \quad N_{2a} = N_0 \left(\frac{\lambda_a}{\lambda_t} \right) (1 - e^{-\lambda_1 t}) \quad N_{2b} = N_0 \left(\frac{\lambda_b}{\lambda_t} \right) (1 - e^{-\lambda_1 t})$$

Un altro caso speciale è quello per cui ho un campione con due o più radionuclidi che non posso separare con differenti schemi di decadimento, ad esempio:





Nella parte finale ho solo un modo di decadimento, quindi ho una retta in scala semi-logaritmica, dalla cui pendenza ricavo $t_{1/2} = 12.7h$.

1. Estendo all'indietro la parte lineare
2. Calcolo la differenza tra la curva e la linea retta
3. Grafico queste differenze nella stessa scala e ottengo la linea punto-linea che rappresenta il nuclide con $t_{1/2} = 3.4h$

L'intercetta delle due linee indica il corrispondente conteggio iniziale.

Si può estendere questo metodo a miscele con più di due componenti, se i $t_{1/2}$ sono sufficientemente diversi tra loro.

4.2 Produzione e decadimento della radioattività

La legge esponenziale di decadimento perde la sua validità se nuovi nuclei vengono aggiunti al campione, producendo continuamente nuova attività, ad esempio tramite reazioni nucleari.

Come esempio inserisco una targhetta di nuclei stabili in un reattore o in un acceleratore di particelle.

I nuclei nella targhetta catturano un neutrone o una particella carica producendo possibilmente una specie radioattiva.

Il tasso di produzione R dipende dal numero di atomi presenti nella targhetta, N_0 , da flusso o corrente delle particelle incidenti I e dalla sezione d'urto di produzione di questa reazione, σ . La **sezione d'urto** è definita come la probabilità per una particella di interagire con il nucleo della targhetta.

Tipicamente si ha che:

$$I \propto 10^{14} \frac{\text{particelle}}{s \times \text{cm}^2} \quad \sigma \propto 10^{-24} \text{cm}^2$$

allora la probabilità di convertire una particella stabile in una radioattiva è $\sim 10^{-10}/s$. Quindi anche se la reazione continua per ore, il numero assoluto di particelle convertite nella targhetta è piccolo.

Possiamo quindi con buona approssimazione considerare N_0 come costante e R come costante e ottenere il tasso di formazione dei nuclei radioattivi:

$$R = N_0 \sigma I$$

Se N_1 = numero di nuclei radioattivi formati, ed essi decadono con costante λ_1 in nuclei stabili N_2 , si deve considerare che N_1 cresce per la loro produzione ma decresce per il loro decadimento radioattivo

$$dN_1 = Rdt - \lambda_1 N_1 dt \quad \rightarrow \quad N_1(t) = \frac{R}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}) \quad \rightarrow \quad A_1(t) = \lambda_1 N_1(t) = R(1 - e^{-\lambda_1 t})$$

$$\text{se } t \ll t_{1/2} \quad \rightarrow \quad A_1(t) \sim R\lambda_1 t$$

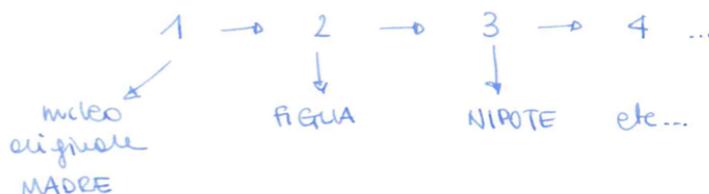
cioè cresce linearmente col tempo.

$$\text{se } t \gg t_{1/2} \quad \rightarrow \quad A_1(t) \sim R$$

e la nuova attività ha lo stesso tasso di produzione del decadimento. Questo è un esempio di **equilibrio secolare**.

4.2.1 Crescita delle attività delle figlie

Un'altra situazione comune è quella per cui un prodotto di un decadimento radioattivo decade a sua volta, formando una catena di decadimenti radioattivi:



se comincio con N_0 atomi madre a $t=0$ e non ci sono atomi da decadimento all'inizio:

$$N_1(t=0) = N_0 \quad N_2(t=0) = N_3(t=0) = \dots = N_n(t=0) = 0$$

con le corrispondenti costanti di decadimento $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$.

Facciamo il conto assumendo che la nipote 3 sia il prodotto finale stabile dei decadimenti.

Il numero di nuclei madre decade quindi nel tempo secondo la forma:

$$dN_1 = -\lambda_1 N_1 dt$$

Il numero dei nuclei figlie cresce come risultato dei decadimenti della madre, ma diminuisce a causa del suo stesso decadimento:

$$dN_2 = \lambda_1 N_1 dt - \lambda_2 N_2 dt \tag{4.1}$$

quindi il numero di nuclei madre sarà $N_1(t) = N_0 e^{-\lambda_1 t}$; per risolvere invece N_2 , usando le condizioni iniziali $N_2(0) = 0$, provo una soluzione della forma

$$N_2(t) = Ae^{-\lambda_1 t} + Be^{-\lambda_2 t} \quad \Rightarrow \quad N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

$$A_2(t) \equiv \lambda_2 N_2(t) = N_0 \frac{\lambda_1 \lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

se i nuclei 2 fossero stabili allora $\lambda_2 \rightarrow 0$ allora: $N_2(t) = N_0(1 - e^{-\lambda_1 t})$ come abbiamo ricavato all'inizio.

- se $\lambda_1 \ll \lambda_2$: la madre vive così a lungo da decadere con un tasso quasi costante e $e^{-\lambda_1 t} \simeq 1$ allora

$$N_2(t) \simeq N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_2} (1 - e^{-\lambda_2 t})$$

$$A_2 \rightarrow \lambda_1 N_0 \quad e \quad \frac{dN_2}{dt} = 0$$

da 4.1. Questo anche è un esempio di **equilibrio secolare** dove col crescere di t i nuclei di tipo 2 decadono approssimativamente con lo stesso rate nel quale sono formati: $\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2$.

- se $\lambda_1 < \lambda_2$: calcolo il rapporto tra le due attività:

$$\frac{\lambda_2 N_2}{\lambda_1 N_1} = \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} (1 - e^{-(\lambda_2 - \lambda_1)t}) \quad \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \quad \frac{A_2(t)}{A_1(t)} \rightarrow \frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$$

al crescere di t l'esponente diventa sempre più piccolo e il rapporto tra le due attività tende verso il valore costante $\frac{\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1}$.

Le attività non sono costanti ma i nuclei di tipo 2 decadono effettivamente con la costante di decadimento del tipo 1. Questo è un esempio di **equilibrio transiente**

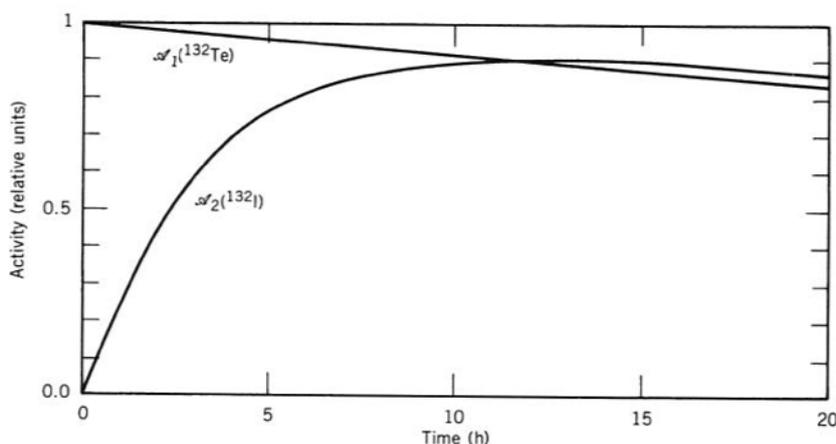
- se $\lambda_1 > \lambda_2$: la madre decade velocemente e $A_2(t)$ cresce fino ad un massimo e poi decade con costante λ_2 .

In questo caso i nuclei 1 sono trascurabili $N_1 \rightarrow 0$ e se $t \rightarrow \infty$ allora $e^{-\lambda_1 t} \rightarrow 0$

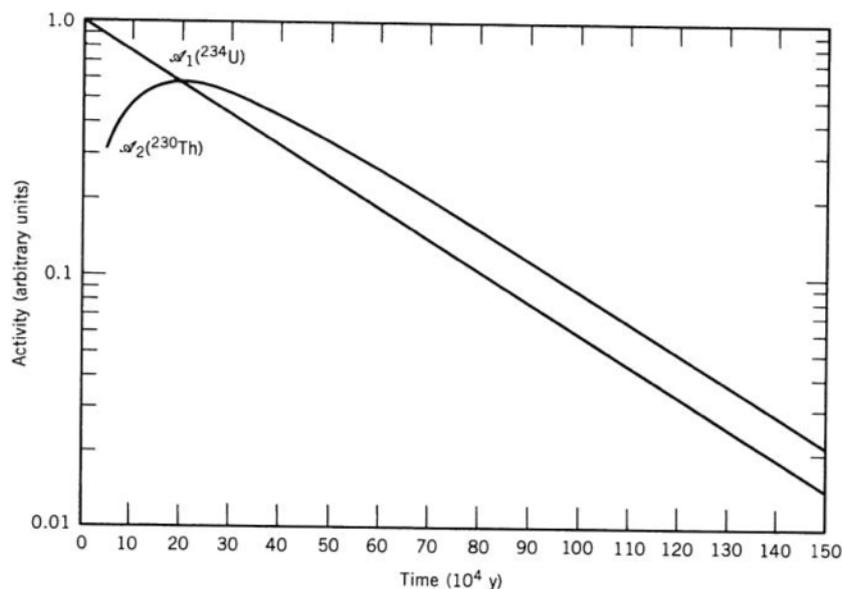
$$N_2(t) \simeq N_0 \frac{\lambda_1}{\lambda_1 - \lambda_2} e^{-\lambda_2 t}$$

cioè le figlie 2 decadono approssimativamente seguendo la legge di decadimento radioattivo esponenziale.

Nel decadimento $^{132}\text{Te}(78h) \rightarrow ^{132}\text{I}(2.28h) \rightarrow ^{132}\text{Xe}$ ho equilibrio secolare approssimato a circa 12h.



Un esempio di equilibrio transiente è quello del decadimento del ^{234}U (2.45×10^5) anni in ^{230}Th (8.0×10^4) anni dove il rapporto tra A_2/A_1 tende alla costante 1.48.



4.2.2 Serie di decadimenti

Se ho una serie di generazioni di nuclei radioattivi allora:

$$dN_i = \lambda_{i-1}N_{i-1}dt - \lambda_i N_i dt$$

una soluzione generale se N_0 è composto solo da nuclei madre è data dalla **equazione di Bateman**:

$$A_n = N_0 \sum_{i=0}^n c_i e^{-\lambda_i t} = N_0 (c_1 e^{-\lambda_1 t} + c_2 e^{-\lambda_2 t} + \dots + c_n e^{-\lambda_n t})$$

con:

$$c_m = \frac{\prod_{i=1}^n \lambda_i}{\prod_{i=1}^n (\lambda_i - \lambda_m)} = \frac{\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \dots \lambda_n}{(\lambda_1 - \lambda_m)(\lambda_2 - \lambda_m) \dots (\lambda_n - \lambda_m)}$$

dove \prod' indica che ometto il termine con $i = m$.

Ho equilibrio secolare in questo caso con

$$\lambda_1 N_1 = \lambda_2 N_2 = \dots = \lambda_n N_n$$

4.3 Tipi di decadimento

I tipi principali di decadimento sono α , β e γ .

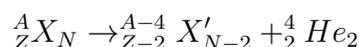
Nei decadimenti α e β , un nucleo instabile emette una particella α o β e cerca di diventare un nucleo più stabile (quindi di approssimare l'isobaro più stabile per il numero di massa risultante).

Nei decadimenti γ , uno stato eccitato decade nello stato fondamentale senza cambiare la specie nucleare.

4.3.1 Decadimento α

In questo processo, un nucleo emette una particella α , i.e. un nucleo di ${}^4_2\text{He}$. Questo nucleo è molto legato, quindi l'energia cinetica rilasciata nel processo è massimizzata. Vedremo più avanti la valutazione dettagliata degli equilibri energetici.

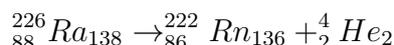
Il processo di decadimento α è il seguente:



dove X e X' sono i simboli chimici dei nuclei nello stato iniziale e finale.

Da notare che il numero di protoni e neutroni nel processo deve conservarsi separatamente nel processo di decadimento.

Un esempio di decadimento α è

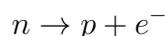


con un tempo di dimezzamento di 1600 anni, e nel quale la particella α ha energia cinetica di circa 4.8 MeV.

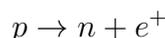
4.3.2 Decadimento β

In questo caso il nucleo corregge l'eccesso di un protone o un neutrone convertendo direttamente un protone in un neutrone e viceversa.

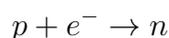
Questo tipo di processo può avvenire in tre modi, ognuno dei quali coinvolge un'ulteriore particella carica per conservare la carica elettrica (originariamente questa particella venne denominata β , si scoprì poi che si trattava dell'elettrone):



è il decadimento β^- e coinvolge l'emissione di un elettrone.



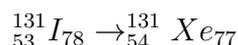
è il decadimento β^+ con emissione di elettrone caricato positivamente (positrone).



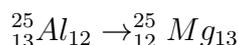
è la cattura elettronica (EC), dove un elettrone atomico che si trova vicino al nucleo viene catturato, permettendo la conversione di un protone in un neutrone.

In tutti e tre i processi, un'altra particella chiamata **neutrino** viene emessa, ma questa particella è neutra e quindi la sua inclusione nel processo non influisce sull'identità della altre particelle coinvolte.

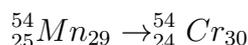
Alcuni esempi di decadimenti β sono i seguenti:



β^- con $t_{1/2} = 8.0$ giorni;



β^+ con $t_{1/2} = 7.2$ s;



EC con $t_{1/2} = 312$ giorni.

In tutti questi processi, Z e N cambiano di una unità, ma il numero di massa A rimane invariato.

4.3.3 Decadimento γ

È il caso in cui uno stato eccitato decade in uno stato diseccitato o nello stato fondamentale emettendo un fotone di radiazione γ con energia pari alla differenza in energia tra gli stati nucleari di transizione, meno una trascurabile componente ottenuta dall'energia cinetica di rinculo del nucleo.

L'emissione γ si verifica in tutti i nuclei che hanno stati legati eccitati, e normalmente segue il decadimento α o β siccome questi spesso lasciano i nuclei figli in uno stato eccitato.

4.3.4 Fissione spontanea

Normalmente si crede che la fissione sia un processo non spontaneo e artificiale creato in un reattore nucleare.

Ci sono invece alcuni nuclei che fissionano spontaneamente, sotto forma di decadimento radioattivo.

In questo processo, un nucleo pesante si divide in due nuclei più leggeri, i nuclei finali non sono determinati in maniera fissa come avviene nel decadimento α e β , ma sono distribuiti statisticamente in un range di nuclei di peso medio, come vedremo nel dettaglio.

Un esempio di fissione spontanea è quello del Fermio ^{256}Fm e del Californio ^{254}Cf .

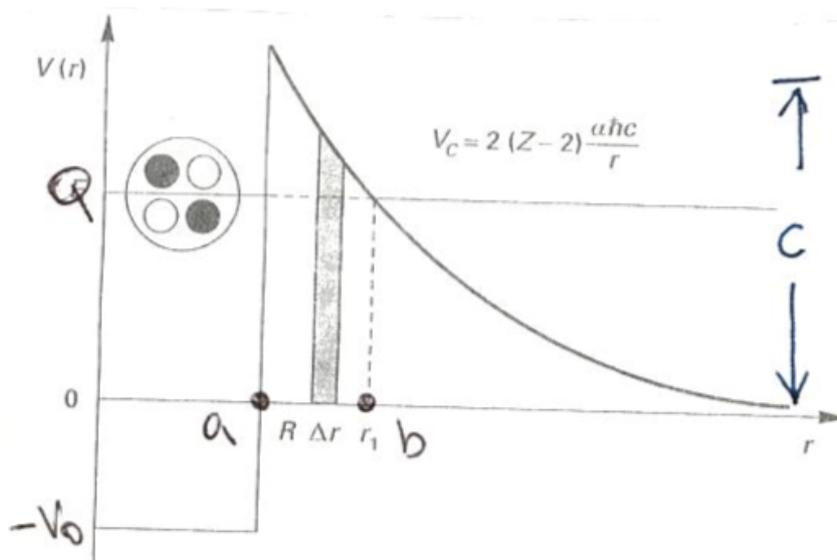
4.4 Il decadimento α

Come abbiamo visto, protoni e neutroni hanno un'energia di legame media di circa 8 MeV, quindi essi normalmente non possono scappare dal nucleo.

Può succedere però che l'emissione di un gruppo di nucleoni sotto forma di un unico sistema legato sia energeticamente favorito.

Il decadimento α avviene con l'emissione di un nucleo di ^4He che è un sistema legato di due protoni e due neutroni straordinariamente compatto con energia di legame $B(^4\text{He}) = 7$ MeV/nucleone.

Osserviamo l'energia di potenziale di una particella α in funzione della distanza dal nucleo:



A piccole distanze dal nucleo prevale l'interazione nucleare, fortemente attrattiva, rappresentata da una buca di potenziale.

A più grandi distanze la particella α è soggetta all'azione repulsiva dei protoni restanti di tipo Coulombiano:

$$V_c(r) = \frac{2(Z-2)\alpha\hbar c}{r} = \frac{2(Z-2)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

che cresce al diminuire della distanza del nucleo. Z è il numero atomico del nucleo, $2e$ è la carica elettrica del nucleo α , $Z-2$ è la carica del nucleo dopo il decadimento α .

La probabilità che un nucleo decada emettendo α varia da nucleo a nucleo e le vite medie variano da 10 ns a 10^{17} anni.

Vediamo ora i dettagli:

- La linea Q corrisponde all'energia di disintegrazione.
- Nella regione sferica $r < a$: sono nel nucleo: la barriera di potenziale è profonda $-V_0$, classicamente α può muoversi all'interno di questa regione con energia cinetica $Q + V_0$ ma non può sfuggire.
- la regione anulare $a < r < b$ forma una barriera di potenziale perché qui l'energia potenziale supera l'energia disponibile Q . α non può entrare in questa regione da alcun lato
- la regione $r > b$ è la normale regione fuori dalla barriera: dal punto di vista della meccanica quantistica ho la possibilità di penetrare la barriera per effetto tunnel.

La barriera può essere superata anche dall'altro lato per effetto tunnel ottenendo una reazione nucleare.

La costante di disintegrazione di un emettitore α è data da

$$\lambda = f \cdot p \quad \text{con} \quad f \sim \frac{v}{a}$$

dove f è la frequenza con cui α si presenta alla barriera, p la probabilità di trasmissione oltre la barriera e v la velocità della particella α sulla barriera.

Se $V_0 \simeq 35 \text{ MeV}$ per una buca di potenziale tipica ho $f \simeq 6 \times 10^{21}/s$ per $Q \simeq 5 \text{ MeV}$.

La barriera di potenziale Coulombiano ha altezza C per $r = a$ con:

$$C = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ'e^2}{a}$$

con α con carica Ze e il nucleo figlio con carica $Z'e = (Z-z)e$.

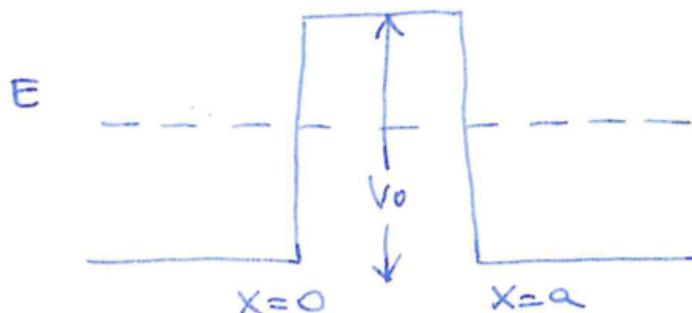
Quindi l'altezza della barriera varia da $C - Q$ per $r = a$ a 0 per $r = b$, quindi consideriamo il valore medio $\frac{1}{2}(C - Q)$.

Considero anche una larghezza media $d = \frac{1}{2}(b - a)$.

Faremo ora una digressione sulla meccanica quantistica: dobbiamo risolvere l'equazione 1D di Schrödinger di una particella di massa m sottoposta ad una barriera di potenziale, con potenziale $V(x)$, considerando ψ autostato:

$$\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$$

avendo la barriera di potenziale avremo 3 zone con 3 soluzioni diverse regolate anche poi dalle condizioni al contorno:



$$\begin{aligned}
 V(x) = 0 \quad x < 0 &\rightarrow \psi_1(x) = Ae^{ik_1x} + Be^{-ik_1x} \\
 V(x) = V_0 \quad 0 \leq x \leq a &\rightarrow \psi_2(x) = Ce^{k_2x} + De^{-k_2x} \\
 V(x) = 0 \quad x > a &\rightarrow \psi_3(x) = Ee^{ik_3x} + Fe^{-ik_3x}
 \end{aligned}$$

con:

$$k_1 = k_3 = \sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \quad k_2 = \sqrt{\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}}$$

definiamo la **probabilità di trasmissione**

$$P = \frac{J_{trasmesso}}{J_{incidente}}$$

con $j_{trasmessa} \equiv$ corrente nell'onda trasmessa e $j_{incidente} \equiv$ corrente nell'onda incidente. Quindi P rappresenta la frazione della corrente incidente trasmessa oltre la barriera:

$$P = \frac{1}{1 + \frac{1}{4} \frac{V_0^2}{E(V_0 - E)} \sinh^2(k_2 a)}$$

In questo caso in fisica classica, $P = 0$ quindi la particella non penetrerebbe mai la regione proibita dove avrebbe energia cinetica negativa.

L'onda quantica può penetrare la barriera, ed essere osservata oltre la barriera (fenomeno detto **tunneling quantistico**).

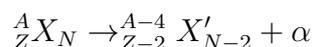
Con i nostri nuclei avrei $k_2 = \sqrt{(2m/\hbar^2) \cdot \frac{1}{2}(C - Q)}$.

Per un nucleo pesante con $Z = 90$ e $a = 7,5 \text{ fm}$, $C \sim 34 \text{ MeV} \rightarrow k_2 = 1,6 \text{ fm}^{-1}$ ed essendo $b = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZ'e^2}{Q}$ può essere ricavato il raggio a cui lascio la barriera. Per $Q \sim 6 \text{ MeV} \rightarrow b \sim 42 \text{ fm}$.

Una piccola variazione in Q genera una grande variazione in b e P con conseguente variazione anche di diversi ordini di grandezza del tempo di dimezzamento di nuclidi che decadono α .

4.4.1 Conservazione dell'Energia nel Decadimento α

L'emissione spontanea di una particella α può essere rappresentata nel seguente modo:



se assumo che il nucleo originario X sia a riposo allora l'energia iniziale del sistema è l'energia di X : $m_X c^2$.

Lo stato finale è X' e α in moto (in modo da conservare l'impulso lineare) dunque l'energia finale sarà:

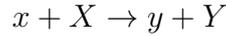
$$m_{X'} c^2 + T_{X'} + m_\alpha c^2 + T_\alpha, \quad \text{con T energia cinetica}$$

Quindi, per la conservazione dell'energia:

$$m_X c^2 = m_{X'} c^2 + T_{X'} + m_\alpha c^2 + T_\alpha$$

$$\Rightarrow (m_X - m_{X'} - m_\alpha) c^2 = T_{X'} + T_\alpha$$

Quindi il **Q-valore** definito come l'energia rilasciata nel decadimento, che per un decadimento generico



vale:

$$Q = [m(x) + m(X) - m(y) - m(Y)]c^2$$

in questo caso sarà:

$$Q = (m_X - m_{X'} - m_\alpha)c^2$$

e il decadimento accade in modo spontaneo solo se $Q > 0$. Lo calcolo dalla tabella delle masse atomiche (le masse degli elettroni si annullano).

Se le masse sono espresse in unità di massa, u, scrivo:

$$c^2 = 931.5 \frac{\text{MeV}}{u} \quad \rightarrow \quad Q \text{ è in MeV}$$

Ho anche che $Q = T_{X'} + T_\alpha$ e per la conservazione dell'impulso lineare ho che $p_\alpha = p_{X'}$; sapendo che α rilascia tipicamente 5 MeV allora sia $T_{X'}$ che T_α sono $\ll mc^2$ e quindi uso cinematica non relativistica per $T = \frac{p^2}{2m}$:

$$T_\alpha = \frac{Q}{\left(1 + \frac{m_\alpha}{m_{X'}}\right)} \quad \rightarrow \quad \text{con } \frac{m_\alpha}{m_{X'}} \ll 1$$

con X' un nucleo pesante, quindi il rapporto tra le masse è $\ll 1$, semplificando si ottiene:

$$T_\alpha = \frac{Q}{1 - \frac{4}{A}} \quad \text{per } A \gg 4 \left(\frac{m_\alpha}{m_{X'}} \sim \frac{4}{(A-4)} \right)$$

Esercizio 6. Il decadimento α di un nucleo di ^{238}Pu ($\tau=127$ anni) in un nucleo di ^{234}U a lunga vita media ($\tau = 3.5 \times 10^5$ anni) libera 5.49 MeV di energia cinetica.

Il calore che viene così prodotto può essere convertito in energia elettrica da generatori radio-termici (RTG).

La sonda spaziale Voyager 2, che venne lanciata il 20/8/1977, è andata oltre le orbite di quattro pianeti, fra cui Saturno, che ha raggiunto il 26/8/1981.

La distanza di Saturno dal Sole è pari a 9.5 AU (1 AU \simeq 150 Mkm).

1. Quanto plutonio deve trasportare il Voyager 2, dotato di un RTG con un'efficienza del 5.5%, per fornire una potenza elettrica di almeno 395W, quando la sonda oltrepassa Saturno?
2. Quanta potenza elettrica sarebbe ancora disponibile a Nettuno (24/8/1989), ad una distanza di 30.1 AU?

Soluzione 6. 1. Al raggiungimento di Saturno si ha $t/\tau = \frac{4 \text{ anni}}{127 \text{ anni}}$ e, dunque usando la formula della potenza e poi ribaltandone l'espressione:

$$P = \frac{E_{cin}}{\Delta t} \cdot \varepsilon \cdot \Delta N = E_{cin} \cdot \varepsilon \cdot N_0 \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$$

$$\begin{aligned} N_0 &= \frac{P \cdot \tau \cdot e^{t/\tau}}{\varepsilon \cdot E_{cin}} \\ &= \frac{395 \text{ W} \cdot 127 \text{ anni} \cdot e^{4/127}}{0.055 \cdot 5.49 \text{ MeV}} \\ &= \frac{10.2 \times 10^{30}}{3.02 \times 10^5} = 3.38 \times 10^{25} \text{ nuclei} \end{aligned}$$

quindi

$${}^{238}\frac{u}{\text{nucleo}} \cdot 3.38 \cdot 10^{25} \text{ nuclei} \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \frac{kg}{u} = 13.4 kg \quad \text{di } {}^{238}\text{Pu}$$

2. Calcolo la potenza come

$$\begin{aligned} P &= E_{cin} \cdot \varepsilon \times N_0 \cdot \frac{1}{\tau} \cdot e^{-t/\tau} \\ &= \frac{5.49 \times 10^6 \text{ eV} \cdot 0.055 \cdot 3.38 \times 10^{25} \cdot e^{-12/127}}{4.01 \times 10^9 \text{ s}} \\ &= 0.232 \times 10^{22} \frac{\text{eV}}{\text{s}} = 371 \text{ W} \end{aligned}$$

Esercizio 7. Esame del 14/06/2022 Il tempo di dimezzamento del protoattinio-231 può essere determinato a partire dal tasso di produzione della disintegrazione α (${}^{231}\text{Pa} \rightarrow \alpha + {}^{227}\text{Ac}$) tramite tecniche di calorimetria.

Un campione di ${}^{231}\text{Pa}$ metallico purissimo viene immerso in un volume di azoto liquido tale da fermare tutte le particelle α prodotte.

Il metallo si riscalda come conseguenza dell'emissione α e l'azoto liquido evapora completamente.

Si misura, quindi, il tasso di evaporazione generato dal calore e la sua potenza corrispondente.

Il cubetto di ${}^{231}\text{Pa}$ utilizzato pesa 142,1 g e la potenza misurata è pari a 0,205 W.

Calcolare la vita media del ${}^{231}\text{Pa}$ sapendo che l'energia di decadimento delle sue particelle α è 5,061 MeV.

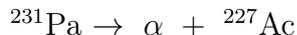
Nel calcolo dell'energia rilasciata considerare anche il contributo del rinculo del nucleo prodotto.

Fattori di conversione:

$$1 \text{ MeV} = 1,60206 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-24} \text{ g}$$

Soluzione 7. Il decadimento da considerare è il seguente:



Come prima cosa si calcola l'energia di rinculo dell'attinio-227:

$$E_{Ac} = \frac{p_{Ac}^2}{2M_{Ac}} = \frac{p_{\alpha}^2}{2M_{Ac}} = \frac{2M_{\alpha}E_{\alpha}}{2M_{Ac}} = \frac{4}{227}E_{\alpha}$$

quindi l'energia rilasciata per decadimento sarà:

$$E = E_{Ac} + E_{\alpha} = \frac{231}{227} E_{\alpha} = \frac{231}{227} \times 5,061 \text{ MeV} = 5,150 \text{ MeV}$$

Il tasso di decadimento è derivabile quindi dalla potenza e dell'energia rilasciata per decadimento:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{0,205 \text{ W}}{5,150 \text{ MeV} \times 1,60206 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}} = 2,485 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$$

Il numero di ^{231}Pa nel campione è:

$$N = \frac{142,1 \text{ g}}{231 \text{ u} \times 1,66 \times 10^{-24} \text{ g/u}} = 3,71 \times 10^{23}$$

Il tempo di dimezzamento sarà:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{N \ln 2}{dN/dt} = \frac{3,71 \times 10^{23} \ln 2}{2,485 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}} = 1,035 \times 10^{12} \text{ s} = 3,28 \times 10^4 \text{ anni}$$

4.5 Il decadimento β

Considero degli isobari, ovvero nuclidi con uguale numero di massa A , allora la formula semi-empirica di massa:

$$M(A, Z) = Nm_n + Zm_p + Zm_e - a_v A + a_s A^{2/3} + a_c \frac{Z(Z-1)}{A^{1/3}} + a_a \frac{(N-Z)^2}{4A} + \delta$$

può essere scritta come:

$$M(A, Z) = \alpha \cdot A - \beta \cdot Z + \gamma \cdot Z^2 + \delta;$$

$$\alpha = m_n - a_v + a_s A^{-1/3} + \frac{a_a}{4} \quad \beta = a_a + (m_n - m_p - m_e) \quad \gamma = \frac{a_a}{A} + \frac{a_c}{A^{1/3}}$$

e δ come prima, quindi $M(A, Z)$ sarà dipendente da Z^2 .

Se fisso A :

- **A dispari:** è una parabola
- **A pari:** $M(Z)$ per un nucleo pari-pari e dispari-dispari giacciono su due parabole distinte.

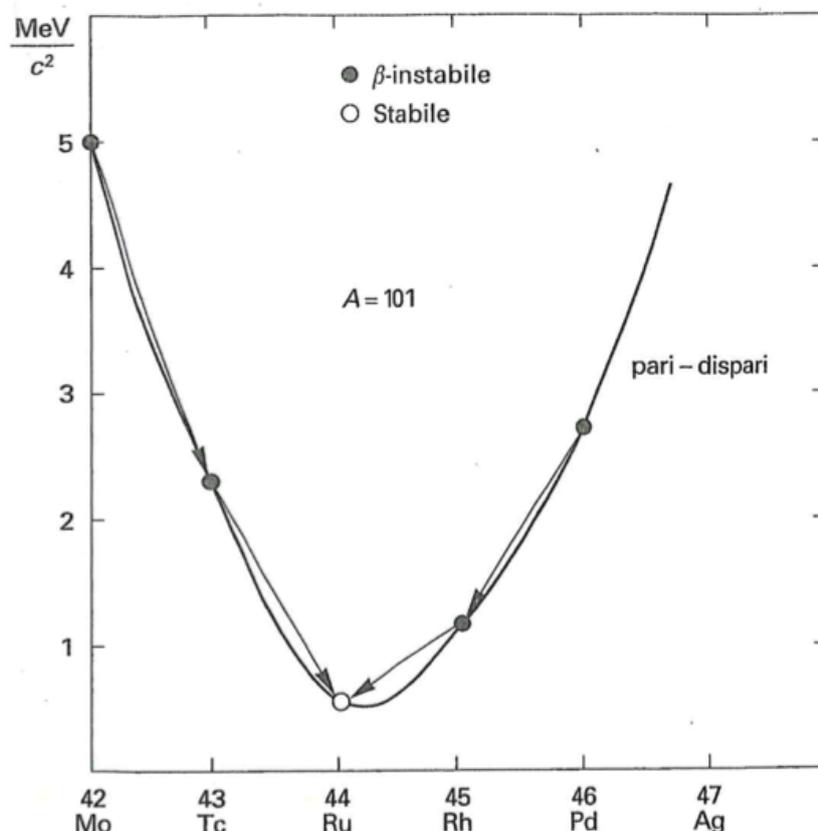
La parabola dispari-dispari giace sopra quella pari-pari di un fattore 2δ .

Il minimo della parabola è a $Z = \frac{\beta}{2\gamma}$.

Se ho uno spettro isobarico, il nucleo con massa più piccola è stabile rispetto al decadimento β .

4.5.1 Decadimento β nei nuclei con A dispari

Prendiamo come esempio i nuclei con $A=101$:



In questo caso il minimo della parabola è occupato dal Rutenio ^{101}Ru con $Z = 44$. Isobari con neutroni in eccesso come il Molibdeno $^{101}_{42}\text{Mo}$ e il Tecnezio $^{101}_{43}\text{Tc}$ decadono tramite la seguente conversione:

$$n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$$

la carica del nucleo figlio supera quella del nucleo madre e si produce un elettrone e un anti-neutrino elettronico.

Quindi in questo caso i decadimenti sono **decadimenti β^-** :



Energeticamente, il decadimento β^- è possibile se:

$$M(A, Z + 1) < M(A, Z)$$

quindi se la massa dell'atomo generato $M(A, Z+1)$ è più piccola di quella dell'isobaro adiacente.

Si noti che qui viene considerata la massa dell'intero atomo e non solo quella del nucleo in esso contenuto, in modo da tenere automaticamente conto della massa a riposo dell'elettrone prodotto nella reazione.

La massa dell'antineutrino $m_{\bar{\nu}_e} < 2\frac{eV}{c^2}$ è trascurabile.

Isobari con protoni in eccesso rispetto al $^{101}_{44}\text{Ru}$ decadono per conversione di un protone:

$$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$$

quindi l'isobaro stabile $^{101}_{44}\text{Ru}$ viene prodotto tramite **decadimento β^+** :



siccome $m_n > m_p$ ($m_p = 938 \text{ MeV}/c^2$ e $m_n = 940 \text{ MeV}/c^2$)

$p \rightarrow n + e^+ + \nu_e$ è possibile solo all'interno del nucleo.

Invece $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ può accadere anche al di fuori del nucleo.

Il decadimento β^+ è possibile energeticamente se:

$$M(A, Z) > M(A, Z - 1) + 2m_e$$

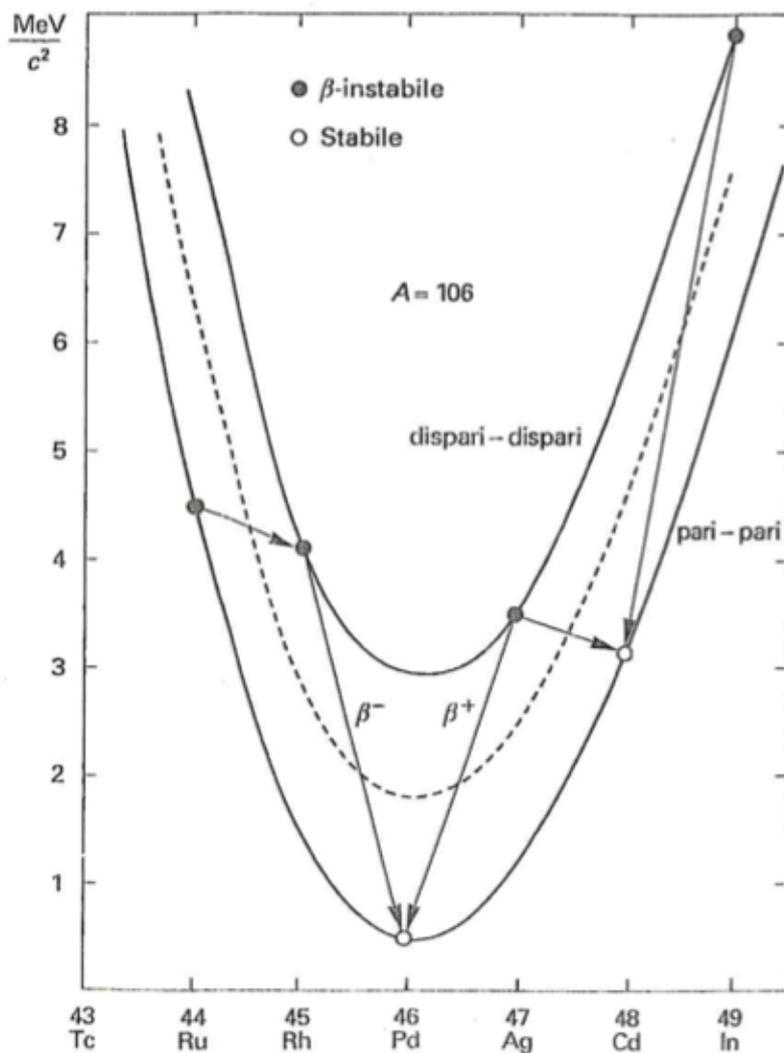
questa relazione tiene conto dell'esistenza di un eccesso di e^- nell'atomo genitore e della formazione di un e^+ .

4.5.2 Decadimenti β in nuclei con A pari

Caso 1 \rightarrow Z e N sono entrambi pari

Caso 2 \rightarrow Z e N sono entrambi dispari

Le parabole nello spazio M-Z sono separate da una costante 2δ .



Se $A > 70$ ho più di un nucleo stabile, come in questo caso con $A = 106$.

I nuclei pari-pari ${}^{106}_{46}\text{Pd}$ e ${}^{106}_{48}\text{Cd}$ sono nella parte bassa della parabola inferiore e l'isobaro più β -stabile è il ${}^{106}_{46}\text{Pd}$.

${}^{106}_{48}\text{Cd}$ è β -stabile perché i suoi vicini dispari-dispari hanno una posizione più alta nella scala delle masse.

Quindi la conversione del ${}^{106}_{48}\text{Cd}$ è possibile solo tramite un doppio decadimento β :



con una probabilità di avvenire molto bassa, tale che il ${}^{106}_{48}\text{Cd}$ può essere considerato a tutti gli effetti stabile.

I nuclei dispari-dispari hanno sempre come vicino, nello spettro isobarico, almeno un nucleo pari-pari più fortemente legato e quindi più stabile.

A questa regola fanno eccezione solo i nuclei leggeri ${}^2_1\text{H}$, ${}^6_3\text{Li}$, ${}^{10}_5\text{B}$ e ${}^{14}_7\text{N}$ stabili per decadimento β perché in quel caso comporterebbe un aumento di energia di asimmetria (contributo slegante) non compensato dal termine di accoppiamento δ .

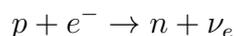
Esistono nuclei dispari-dispari β^- e β^+ instabili, ad esempio il potassio ${}^{40}_{19}\text{K}$ e il rame ${}^{64}_{29}\text{Cu}$.

4.5.3 Cattura elettronica

Un altro possibile processo di decadimento è la cattura di un e^- atomico da parte del nucleo.

L' e^- ha una probabilità finita non nulla di trovarsi all'interno del nucleo.

In tali circostanze può combinarsi con un protone e dare origine ad un neutrone ed un neutrino tramite **cattura elettronica (EC)**:



questo avviene di solito nei nuclei pesanti dove il raggio nucleare è sufficientemente grande e le orbite elettroniche sono prossime al nucleo.

Gli e^- catturati vengono dagli stati orbitali più interni (shell k) perché sono più vicini al nucleo.

In seguito ad una cattura- k , un e^- più esterno occuperà il posto dell'elettrone- k lasciando a sua volta un buco nel livello energetico superiore creando dei decadimenti a cascata.

La cattura elettronica è un processo in competizione con il decadimento β^+ , energeticamente richiede:

$$M(A, Z) > M(A, Z - 1) + \varepsilon$$

con ε =energia di eccitazione associata alla shell atomica dell' e^- catturato.

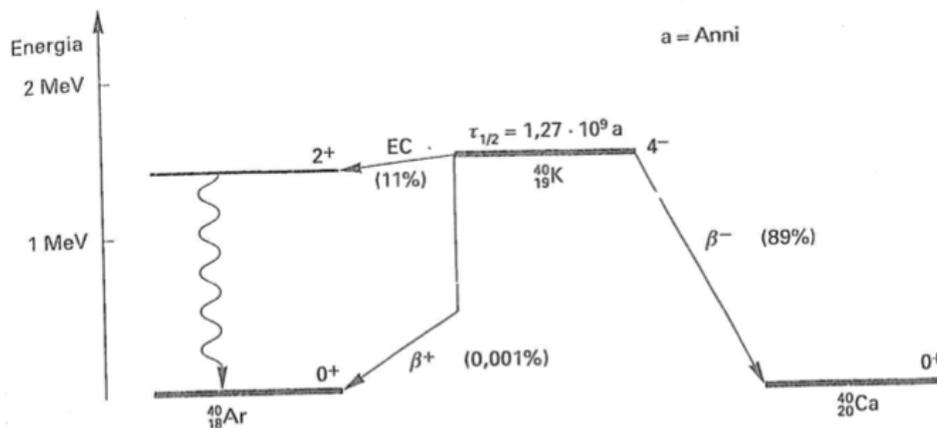
Questo processo ha energia cinetica più alta rispetto al β^+ di $2m_e c^2 - \varepsilon$ nello stato finale. Questo implica che se $M(A, Z) \simeq M(A, Z - 1)$ allora β^+ non può avvenire, mentre cattura- k sì.

4.5.4 La vita media dei decadimenti β

La vita media τ dei nuclei soggetti a decadimento β varia da pochi ms a 10^{16} anni e dipende dall'energia disponibile e dalle proprietà dei nuclei che intervengono nel processo.

Un neutrone libero decade in un protone, più un elettrone e un antineutrino $n \rightarrow p + e^- + \bar{\nu}_e$ rilasciando 0.78 MeV, e la sua vita media è $\tau = 889.1 \pm 2.1s$.

Un esempio interessante di emettitore β a lunga vita media è il ^{40}K che può andare incontro a β^- , β^+ , e EC generando ^{40}Ar e ^{40}Ca stabili, rispettivamente, entrambi con lo stesso A.

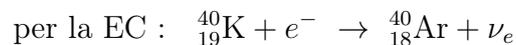
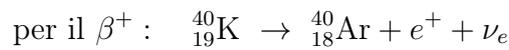


In questo caso β^- , β^+ e EC si trovano a competere tra di loro.

La frequenza di ognuno di questi processi è indicata fra parentesi.

La freccia piegata nel decadimento β^+ indica che la produzione di un e^+ e la presenza di un e^- in più nell'atomo di ^{40}Ar richiedono 1.022 MeV, mentre il resto dell'energia disponibile lo si trova sotto forma di E_{cin} del e^+ e del ν_e .

Lo stato eccitato dell' ^{40}Ar (2^+) prodotto per EC decade allo stato fondamentale (0^+) con emissione di un γ .



4.5.5 Rilascio energetico nei decadimenti β

Decadimento β^- di un neutrone libero

Vedo il decadimento di un n libero con $t_{1/2} \sim 10$ minuti:



definisco il Q-valore: $Q = (m_n - m_p - m_e - m_{\bar{\nu}})c^2$.

Se ho decadimento di neutroni a riposo:

$$Q = T_p + T_e + T_{\bar{\nu}}$$

ignoro T_p , l'energia cinetica di rinculo del protone è $\sim 0.3 \text{ keV}$.

Allora l'energia cinetica totale viene spartita tra e^- e $\bar{\nu}_e$.

$$\begin{aligned} Q &= m_n c^2 - m_p c^2 - m_e c^2 - m_{\bar{\nu}} c^2 \\ &= 939.6 \text{ MeV} - 938.3 \text{ MeV} - 0.5 \text{ MeV} - m_{\bar{\nu}} c^2 \\ &= 0.8 \text{ MeV} \end{aligned}$$

siccome $m_{\bar{\nu}} < 2 \frac{eV}{c^2}$ la trascuro.

Nel seguito userò le seguenti convenzioni: E_ν energia totale del neutrino (relativistica) =

T_ν perché lo considero con $m_\nu \simeq 0$
 Per l' e^- , l'energia totale relativistica:

$$E_e = T_e + m_e c^2$$

(il limite non relativistico non è utilizzabile perché $T \ll mc^2$ non vale, siccome $E \simeq MeV$ allora devo usare la cinematica relativistica).

Il rinculo nucleare invece ha energia molto bassa, quindi può essere trattato non relativisticamente.

Decadimento β^- nel nucleo

Considero un β^- tipico nel nucleo:



$$Q_{\beta^-} = [m_N({}^A_Z X) - m_N({}^A_{Z+1} X') - m_e]c^2$$

con m_N massa nucleare.

Ora voglio convertire le masse nucleari in quelle tabulate degli atomi neutri $m({}^A X)$, uso:

$$m({}^A X)c^2 = m_N({}^A X)c^2 + Zm_e c^2 - \sum_{i=1}^Z B_i$$

$B_i \equiv$ energia di legame dell'elettrone i -esimo. Quindi con le masse atomiche:

$$Q_{\beta^-} = \{[m({}^A X) - Zm_e] - [m({}^A X') - (Z+1)m_e] - m_e\}c^2 + \left\{ \sum_{i=1}^Z B_i - \sum_{i=1}^{Z+1} B_i \right\}$$

da notare che nel caso β^- , m_e si cancella.

Se trascuro la differenza tra le energie di legame:

$$Q_{\beta^-} = [m({}^A X) - m({}^A X')]c^2$$

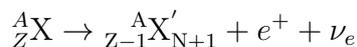
con le masse atomiche neutre.

Nel caso del ${}^{210}\text{Bi} \rightarrow {}^{210}\text{Po} + e^- + \bar{\nu}_e$ la tavola delle masse da:

$$\begin{aligned} Q_{\beta^-} &= [m({}^{210}\text{Bi}) - m({}^{210}\text{Po})]c^2 \\ &= (209.984u - 209.983u) \left(931.502 \frac{\text{MeV}}{u} \right) \\ &= 1.161 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Decadimento β^+

Per un decadimento β^+ :

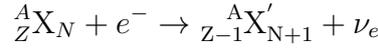


$$Q_{\beta^+} = [m({}^A X) - m({}^A X') - 2m_e]c^2$$

da notare che m_e non si cancellano in questo caso.

Cattura elettronica

Per la EC:



devo tenere conto del fatto che dopo la cattura elettronica X' è in uno stato atomico eccitato (come abbiamo visto prima), quindi ho emissione di un raggio X (γ) con $E_x \text{ emesso} = B_{e^- \text{ catturato}}$ nella shell n

$$Q_{EC} = [m({}^A X) - m({}^A X')]c^2 - B_n$$

Sia nel β^+ che nella EC parto da un nucleo ${}^A_Z X_N$ e arrivo ad un nucleo finale ${}^A_{Z-1} X'_{N+1}$ ma Q **deve** essere positivo perché un processo sia possibile energeticamente e quindi non è detto che sia β^+ che EC siano possibili.

Se posso fare β^+ allora EC è possibile, ma non è detto il viceversa, infatti posso avere $Q > 0$ per EC e $Q < 0$ per β^+ .

Per avere β^+ la differenza tra le masse atomiche deve essere $> 2m_e c^2 = 1.022 \text{ MeV}$.

4.6 Il decadimento γ

La maggior parte dei decadimenti α e β lasciano il nucleo finale in uno stato eccitato che decade rapidamente nello stato fondamentale emettendo raggi γ , cioè fotoni da radiazione elettromagnetica.

Sia il numero atomico, sia il numero di massa rimangono invariati. Nel decadimento gamma il nucleo perde energia e si dispone ad un livello energetico più basso.

4.6.1 Bilanciamento energetico dei decadimenti γ

Se considero il decadimento di un nucleo di massa M a riposo da uno stato iniziale eccitato E_i a uno finale E_f ho che per conservare il momento lineare, il nucleo finale avrà un impulso di rinculo \bar{p}_R corrispondente ad una energia cinetica T_R che assumo essere non relativistica: $T_R = \frac{\bar{p}_R^2}{2M}$

Quindi per conservare l'energia e il momento totali:

$$\begin{cases} E_i = E_f + E_\gamma + T_R \\ 0 = \bar{p}_R + \bar{p}_\gamma \end{cases} \rightarrow \bar{p}_R = -\bar{p}_\gamma$$

quindi l'impulso di rinculo è uguale e opposto a quello del γ .

Se definisco $\Delta E = E_i - E_f$ e uso la relazione relativistica $E_\gamma = cp_\gamma$:

$$\Delta E = E_\gamma + \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$$

che ha soluzione:

$$E_\gamma = Mc^2 \left[-1 \pm \left(1 + 2 \frac{\Delta E}{Mc^2} \right)^{\frac{1}{2}} \right]$$

ΔE è dell'ordine dei MeV e l'energia a riposo $Mc^2 \sim A \times 10^3 \text{ MeV}$ quindi $\Delta E \ll Mc^2$ e considero solo i primi tre ordini di grandezza nell'espansione della radice:

$$E_\gamma \simeq \Delta E - \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2} \quad \text{quindi } E_\gamma \simeq \Delta E.$$

infatti $\frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2}$ è la correzione $\sim 10^{-5}$ dovuta al rinculo.

Per raggi γ a bassa energia, l'energia di rinculo ~ 1 eV; per γ ad alta energia $\sim 5 - 10$ MeV, ho rinculi di ~ 100 eV, che sono sufficienti a spostare leggermente un atomo nello stato solido e causare il **danno da radiazione**.

4.6.2 Regole di selezione sul momento angolare e la parità

Gli stati eccitati più bassi dei nuclei decadono emettendo radiazione elettromagnetica e questo decadimento può essere descritto come la sovrapposizione di contributi di diverse polarità, ciascuna caratterizzata da una tipica distribuzione angolare.

Le transizioni di dipolo, quadrupolo, ottupolo sono caratterizzate da una tipica distribuzione angolare: le transizioni elettriche sono indicate con E_1 (dipolo), E_2 (quadrupolo), E_3 (ottupolo),..., mentre le transizioni magnetiche di multipolo sono indicate con M_1, M_2, M_3, \dots

La conservazione angolare e della parità determinano quali transizioni sono possibili.

Considero una transizione γ da uno stato iniziale eccitato di spin I_i e parità π_i ad uno stato finale I_f e π_f

Dalla conservazione del momento angolare ho:

$$\bar{I}_i = \bar{L}_\gamma + \bar{I}_f; \quad \bar{L}_\gamma \text{ momento angolare del fotone}$$

con L ordine dell'operatore multipolo, un multipolo di ordine L trasferisce un momento angolare pari a $L\hbar$ per fotone (L=1 dipolo, L=2 quadrupolo e così via).

Non esistono transizioni di monopolo, infatti classicamente il momento di monopolo è la carica elettrica che non varia nel tempo e quindi non produce radiazione.

Dalla conservazione del momento ricavo che i valori permessi di L sono:

$$|I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f$$

quindi ad esempio se $I_i = \frac{3}{2}$ e $I_f = \frac{5}{2} \rightarrow L=1,2,3,4$ e la radiazione in questo caso sarà una mistura tra dipolo, quadrupolo, ottupolo, esadecapolo.

Dalla parità dello stato iniziale e finale determino se la radiazione è elettrica o magnetica.

La radiazione elettrica è causata da un'oscillazione del campo elettrico.

La radiazione magnetica è causata da una corrente o un momento magnetico che variano nel tempo dando origine ad un campo magnetico oscillante.

Il tipo di radiazione E o M sono quindi il risultato di oscillazioni del fluido nucleare (E: redistribuzione della carica elettrica nel nucleo, e M: redistribuzione degli spin e dei momenti angolari orbitali dei nucleoni).

La parità di un campo irradiato è:

$$\pi(ML) = (-1)^{L+1} \rightarrow \text{transizione magnetica, parità pari se L è dispari}$$

$$\pi(EL) = (-1)^L \rightarrow \text{transizione elettrica, parità pari se L è pari}$$

Infatti il momento di dipolo magnetico, ad esempio, ha parità pari perché rimane invariato se inverte le coordinate essendo $\bar{\mu} = q\bar{r} \times \bar{v}$ un vettore assiale.

Mentre un dipolo elettrico $\bar{d} = q\bar{r}$ ha parità dispari perché si trasforma in $-q\bar{r}$ se inverte le coordinate, essendo un vettore polare.

Nell'esempio precedente, se $I_i = \frac{3}{2}$ e $I_f = \frac{5}{2}$ e assumo che $\pi_i = \pi_f$ allora non ho variazione di parità, se L=1,2,3,4 allora L_1, L_3 sono magnetiche e L_2 e L_4 sono elettriche e il campo

irradiato sarà: M_1, E_2, M_3, E_4 . Se invece ho variazione di parità e $\pi_i = -\pi_f$, il campo irradiato sarà E_1, M_2, E_3, M_4 .

Quindi le regole di selezione sono le seguenti:

$$|I_i - I_f| \leq L \leq I_i + I_f \quad (\text{no } L=0)$$

$\Delta\pi = NO \rightarrow$ **Pari Elettriche, Dispari Magnetiche**

$\Delta\pi = SI \rightarrow$ **Dispari Elettriche, Pari Magnetiche**

Ad esempio: $^{137}\text{Cs} \rightarrow ^{137}\text{Ba}^* + e^- + \bar{\nu}_e$ seguito da $^{137}\text{Ba}^* \rightarrow ^{137}\text{Ba} + \gamma$

Nel 94.4% dei casi il decadimento β^- del ^{137}Cs produce uno stato eccitato del ^{137}Ba con $I^p = \frac{11}{2}^-$ che decade nello stato fondamentale con $I^p = \frac{3}{2}^+$.

$$\Delta I = 4 \quad \Delta\pi = SI \quad \rightarrow \quad \text{la transizione emessa è } M_4.$$

Ci sono alcune eccezioni, ad esempio:

- se $I_i = I_f$ ma non posso avere transizione di monopolo con $L=0$. Allora il multipolo di raggio γ più basso nel caso di $I_i = I_f$ è sempre il dipolo ($L=1$)
- se $I_i = I_f = 0 \rightarrow$ avrei solo $L=0$ che non è permesso per transizioni radiative. Ci sono alcuni casi di nuclei pari-pari con primo stato eccitato 0^+ che non possono decadere nello stato fondamentale 0^+ emettendo un γ .

Questi stati decadono invece con **conversione interna**.

In questo caso i campi interagiscono con gli elettroni dell'atomo causando l'emissione di uno degli e^- dell'atomo.

A differenza del caso del decadimento β , l' e^- non viene creato nel decadimento, ma è un e^- già contenuto nella orbita atomica.

Normalmente le regole attese per la transizione sono le seguenti:

- Il più basso multipolo permesso normalmente domina
- L'emissione di un multipolo elettrico è più probabile di quello dello stesso multipolo magnetico di un fattore $\simeq 10^2$
- L'emissione di un multipolo $L+1$ è meno probabile di quella di un multipolo L di un fattore $\simeq 10^{-5}$
- Combinando b. e c. ottengo con $L'=L+1$ le seguenti probabilità di emissione:

$$\frac{\lambda(EL')}{\lambda(ML)} = \frac{\lambda(EL')}{\lambda(EL)} \cdot \frac{\lambda(EL)}{\lambda(ML)} \simeq 10^{-5} \times 10^2 \simeq 10^{-3}$$

$$\frac{\lambda(ML')}{\lambda(EL)} = \frac{\lambda(ML')}{\lambda(ML)} \cdot \frac{\lambda(ML)}{\lambda(EL)} \simeq 10^{-5} \times 10^{-2} \simeq 10^{-7}$$

quindi M_2 compete con E_1 con efficacia molto più bassa di E_2 con M_1 .

N.B. : queste sono comunque stime molto crude.

Nell'esempio precedente, $I_i = \frac{3}{2}^+$ e $I_f = \frac{5}{2}^+$ ho transizioni M_1, E_2, M_3, E_4 con stime della probabilità di emissione: $\lambda(M_1) : \lambda(E_2) : \lambda(M_3) : \lambda(E_4) = 1 : 10^{-3} : 10^{-10} : 10^{-13}$ quindi i multipoli più bassi M_1 e E_2 sono molto più probabili dei più alti.

In pratica questa transizione sarà M_1 con una piccolissima componente di radiazione E_2 .

4.7 Rapporti di Ramificazione e Vite Medie Parziali

Alcuni nuclei possono decadere solo secondo un processo singolo, ma la maggior parte delle volte gli schemi di decadimento sono molto complessi e coinvolgono α , β , γ in competizione.

Si specificano le intensità relative dei diversi modi in competizione tramite i loro **rapporti di ramificazione** (branching ratios).

Frequentemente, si specificano i BR dando le costanti di decadimento parziali e il tempo di decadimento parziale.

Se considero ad esempio il decadimento dell'attinio ^{226}Ac tramite emissione α (0.006%), emissione β^- (83%) e cattura elettronica (17%) ho per: ^{226}Ac ($t_{1/2}=29$ h), costante di decadimento totale:

$$\lambda_t = \frac{0.693}{t_{1/2}} = 0.024 \text{ h}^{-1} = 6.6 \times 10^{-6} \text{ s}^{-1}$$

e le costanti di decadimento parziale sono:

$$\lambda_\beta = 0.83\lambda_t = 5.5 \times 10^{-6} / \text{s}$$

$$\lambda_{\text{EC}} = 0.17\lambda_t = 1.1 \times 10^{-6} / \text{s}$$

$$\lambda_\alpha = 6 \times 10^{-5}\lambda_t = 4 \times 10^{-10} / \text{s}$$

e i tempi di dimezzamento parziali sono:

$$t_{1/2,\beta} = \frac{0.693}{\lambda_\beta} = 1.3 \times 10^5 \text{ s} = 35 \text{ h}$$

$$t_{1/2,\text{EL}} = \frac{0.693}{\lambda_{\text{EC}}} = 6.1 \times 10^5 \text{ s} = 170 \text{ h}$$

$$t_{1/2,\alpha} = \frac{0.693}{\lambda_\alpha} = 1.7 \times 10^9 \text{ s} = 55 \text{ anni}$$

ma se due osservatori studiassero il decadimento dell' ^{226}Ac uno tramite l'osservazione dei decadimenti β e l'altro osservando gli α , entrambi vedrebbero che la metà dei nuclei decadono dopo 29 h sempre e comunque, sia osservando i decadimenti β che gli α .

Quindi, l'attività che osservo decade sempre e comunque con il tempo di dimezzamento totale.

4.8 Radioattività naturale

La Terra e gli altri pianeti del nostro sistema solare si sono formati circa 4.5×10^9 anni fa da materiale ricco di ferro, carbonio, ossigeno, silicio ed altri elementi medi e pesanti. Questi elementi erano stati creati dall'idrogeno e dall'elio risultanti dal Big Bang circa 15×10^9 anni fa.

Nel periodo da 10^{10} anni dal Big Bang alla condensazione del sistema solare, l'idrogeno e l'elio furono *cotti* in elementi più pesanti all'interno di stelle, nove e supernove e noi siamo di fatto detriti riciclati da queste stelle morte.

Molti degli elementi così formati erano radioattivi, ma sono decaduti da allora in nuclei stabili.

Ma alcuni di questi elementi radioattivi hanno tempi di dimezzamento lunghi rispetto all'età della Terra e quindi osserviamo ancora la loro radioattività, che forma la maggior parte della radioattività naturale dell'ambiente ed è probabilmente responsabile del riscaldamento interno dei pianeti terrestri.

La maggior parte degli elementi radioattivi che osserviamo oggi originano dagli elementi molto pesanti che non hanno nessun isotopo stabile.

Questi nuclidi decadono con emissione α e β , diminuendo Z e A finché non raggiungono un elemento più leggero, stabile.

Il decadimento α cambia A di 4 unità, β non cambia A , quindi ho 4 catene di decadimento indipendenti con numeri di massa $4n$, $4n+1$, $4n+2$, $4n+3$ con n intero:

Name of Series	Type ^a	Final Nucleus (Stable)	Longest-Lived Member	
			Nucleus	Half-Life, (y)
Thorium	$4n$	²⁰⁸ Pb	²³² Th	1.41×10^{10}
Neptunium	$4n + 1$	²⁰⁹ Bi	²³⁷ Np	2.14×10^6
Uranium	$4n + 2$	²⁰⁶ Pb	²³⁸ U	4.47×10^9
Actinium	$4n + 3$	²⁰⁷ Pb	²³⁵ U	7.04×10^8

I processi di decadimento hanno la tendenza a concentrare i nuclei nel membro con la vita media più lunga.

Se la vita media di questo elemento è almeno pari a quella della Terra allora osserviamo la sua attività oggi.

Ad esempio il Nettunio ha come $t_{\frac{1}{2}} = 2.14 \times 10^6$ anni che risultano troppo pochi quindi non lo osserviamo nei materiali naturali.

Questi isotopi radioattivi sono presenti in tutti i materiali attorno a noi, specialmente nelle rocce e nei minerali che si sono condensati con la Terra 4.5×10^9 anni fa.

In generale questi isotopi sono fortemente legati nei minerali e non sono pericolosi per la nostra salute, ma tutte le serie dei decadimenti naturali coinvolgono l'emissione di un elemento radioattivo gassoso: il Radon.

Se le rocce vengono fratturate, il gas radon può fuoriuscire. Ciò avviene anche come emissione dalla superficie dei minerali utilizzati nella costruzione di edifici.

E' possibile che l'inalazione di questo gas sia responsabile di molti tumori ai polmoni.

Ci sono anche altri isotopi radioattivi oltre a questi che provengono dalla catena di decadimento dei nuclidi pesanti, ad esempio il ⁴⁰K, ⁸⁷Rb, ¹¹³Cd, ¹¹⁵In...

Esercizio 8. L'uranio presente in natura è una miscela di ²³⁸U (99.28%) e ²³⁵U (0.72%). Che età deve avere la materia di cui è costituito il sistema solare se si assume che alla sua creazione i due isotopi fossero presenti in egual quantità? Come si può interpretare il risultato ottenuto?

Soluzione 8. Applico la formula $N = N_0 e^{-\lambda t}$ ad entrambi gli isotopi: $\frac{99.28}{0.72} = \frac{e^{-\lambda_{238} t}}{e^{-\lambda_{235} t}}$. Conoscendo i tempi di dimezzamento specifici:

$$t_{1/2,238} = 4.468 \times 10^9 \text{ anni}$$

$$t_{1/2,235} = 7.038 \times 10^8 \text{ anni}$$

allora:

$$\lambda_{238} = \frac{0.693}{t_{1/2,238}} = 0.155 \times 10^{-9} \text{ /anni}$$

$$\lambda_{235} = \frac{0.693}{t_{1/2,235}} = 0,0985 \times 10^{-8} \text{ /anni}$$

quindi:

$$e^{-(\lambda_{238}-\lambda_{235})t} = 137.9$$

$$t = \frac{\ln(137.9)}{\lambda_{238} - \lambda_{235}} = \frac{4.927}{(0.985 - 0.155) \times 10^{-9} \text{ /anni}} = 5.94 \times 10^9 \text{ anni}$$

4.9 La fissione nucleare

La fissione deriva in primo luogo dalla competizione tra la forza nucleare e la forza di Coulomb nei nuclei pesanti.

B cresce proporzionalmente ad A, mentre la repulsione Coulombiana è proporzionale a Z^2 , quindi cresce più rapidamente.

La fissione può accadere spontaneamente come un decadimento naturale o può essere indotta dall'assorbimento di una particella a bassa energia, come un neutrone o un fotone. L'applicabilità della fissione per ottenere una grande quantità di energia fu dedotta presto dal fatto che ogni processo di fissione indotta da un neutrone produce molti altri neutroni che a loro volta inducono fissione loro stessi, scatenando una reazione a catena come avviene in un reattore a fissione o in un esplosivo.

Dal grafico B/A vs. A vedo che $B_U \simeq 7.6 \text{ MeV/nucleone}$, se si dividesse ^{238}U in due frammenti con $A \simeq 119$ allora $B/A \simeq 8.5 \text{ MeV}$.

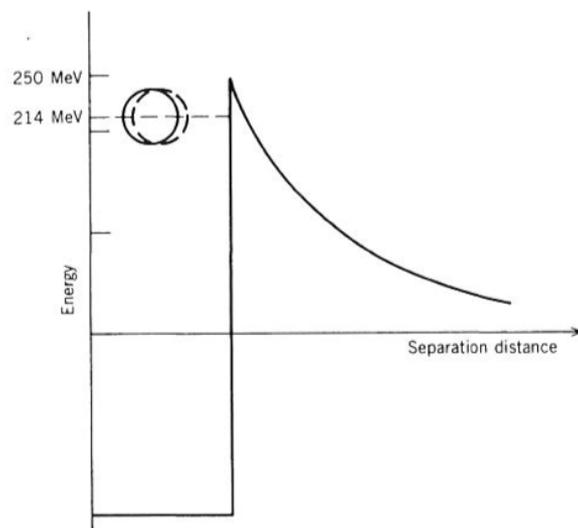
La fissione nucleare diventa importante in questo caso solo per $A \geq 250$. Infatti viene inibita dalla barriera di potenziale Coulombiano.

Se divido ^{238}U in due frammenti identici che si toccano sulla superficie, con separazione R_1+R_2 e $R_1 \simeq R_2 \simeq kA^{1/3} \simeq 1.3 \cdot (119)^{1/2} \simeq 6 \text{ fm}$. Allora la barriera Coulombiana sarà:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 Z_2 e^2}{R} \simeq (1.44 \text{ MeV} \cdot \text{fm}) \cdot \frac{(46)^2}{12 \text{ fm}} \simeq 250 \text{ MeV}$$

siccome $E_i = -238 \times 7.6 \text{ MeV} = -1809 \text{ MeV}$ per ^{238}U legato e $E_f = -2 \cdot 119 \times 8.5 \text{ MeV} = -2023 \text{ MeV}$ per due ^{119}Pd legati, allora per conservare l'energia, lo stato finale deve includere 214 MeV extra (come n, β , γ , ...) che appare come energia cinetica dei frammenti allontanati dalla repulsione di Coulomb.

Quindi:



all'interno della barriera di potenziale ho i due nuclei di Pd, ma la barriera gli impedisce di separarsi.

L'altezza della barriera corrisponde circa all'energia rilasciata dalla fissione dei nuclei pesanti e se l'energia è tale che i nuclei si trovino poco sotto la barriera c'è una buona probabilità di fissione e questi nuclei fissionano **spontaneamente**.

Altri nuclei possono fissionare in maniera **indotta** dall'assorbimento di una piccola quantità di energia di un neutrone o fotone, formando un composto nucleare poco sopra la barriera che fissiona immediatamente.

Partendo dalla formula semi-empirica di massa:

$$M(A, Z) = Zm(^1\text{H}) + Nm_n - B(Z, A)/c^2$$

si può considerare l'effetto dell'energia di legame di un nucleo sferico che allungo gradualmente:



Considero il nucleo allungato come un'ellissoide con volume $4/3\pi ab^2$ con a,b assi dell'ellissoide.

I termini di deviazione dalla sfera dipendono dal parametro di distorsione ε :

$$a = R(1 + \varepsilon) \quad b = R(1 + \varepsilon)^{-1/2}$$

con ε eccentricità dell'ellisse relativa al parametro di deformazione β , con $\varepsilon = \beta\sqrt{\frac{5}{4\pi}}$. Infatti il raggio nucleare può essere parametrizzato come l'espansione in termini di un polinomio di Legendre.

Siccome ho simmetria tra i due assi, si tiene solo il termine $l=2$, dunque

$$R(\theta) = R_0[1 + \varepsilon P_2(\cos\theta)]$$

Nell'allungare una sfera l'area cresce come $S = 4\pi R^2(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots)$ mentre il termine Coulombiano viene modificato da un fattore $1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots$ quindi la diminuzione in energia di legame è pari a :

$$\begin{aligned} \Delta E &= B(\varepsilon) - B(\varepsilon = 0) \\ &= -a_s A^{2/3}(1 + \frac{2}{5}\varepsilon^2 + \dots) - a_c Z^2 A^{-1/3}(1 - \frac{1}{5}\varepsilon^2 + \dots) + a_s A^{2/3} + a_c Z^2 A^{-1/3} \\ &\simeq (-\frac{2}{5}a_s A^{2/3} + \frac{1}{5}a_c Z^2 A^{-1/3})\varepsilon^2 \end{aligned}$$

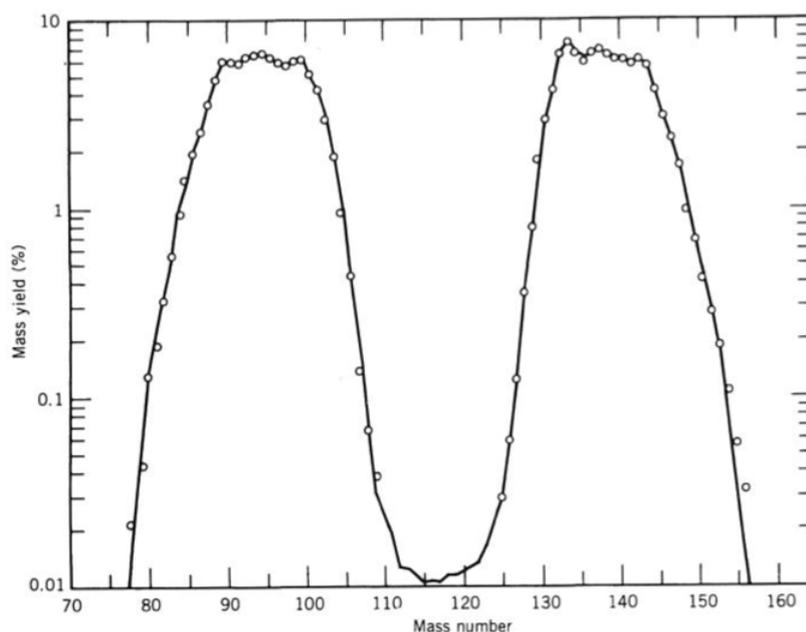
quindi se $\frac{1}{5}a_c Z^2 A^{-1/3} > \frac{2}{5}a_s A^{2/3}$ allora $\Delta E > 0$ e quindi **guadagno** energia dall'allungamento e trovo le condizioni per la fissione spontanea usando i valori conosciuti per a_s e a_c , ho che per avere fissione spontanea $\frac{Z^2}{A} > 47$.

4.9.1 Caratteristiche della fissione

Una tipica reazione di fissione indotta da neutroni è la seguente:



che è possibile già per neutroni incidenti a basse energie. I prodotti della fissione non sono determinati in maniera univoca, ma seguono una distribuzione delle masse. Ad esempio vediamo la distribuzione dei frammenti di fissione dell' ^{235}U :



La probabilità di fissione in frammenti $A_1 \simeq A_2$ è meno probabile di un fattore 600. Ad ogni frammento pesante deve corrispondere un frammento più leggero. Una spiegazione per questa distribuzione di massa non c'è!

Nel caso di fissioni indotte da particelle molto energetiche la distribuzione di massa indica che i frammenti con $A_1 \simeq A_2$ sono molto favoriti.

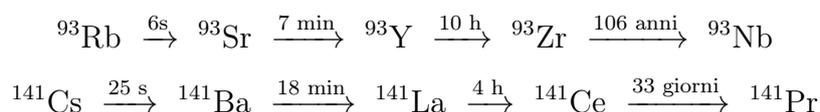
I neutroni emessi sono **neutroni pronti** o **ritardati**. I neutroni pronti vengono emessi da fissione indotta nel caso in cui $A_1 \simeq 95$ e $A_2 \simeq 140$, ad esempio, dove si condividono 92 protoni con prodotti: $^{95}_{37}\text{Rb}$ e $^{140}_{55}\text{Cs}_{85}$ che sono ricchissimi di neutroni ed emettono, nel processo, uno o più neutroni che fissionano istantaneamente ($t \leq 10^{-16}\text{s}$).

Il numero medio di neutroni pronti, ν , è caratteristico di ogni particolare processo di fissione.

I neutroni ritardati, invece, sono emessi a seguito di decadimenti β dei frammenti.

L'intensità dei neutroni ritardati è circa di 1 ogni 100 fissioni, ma sono necessari per controllare i reattori nucleari.

I prodotti iniziali della fissione sono altamente radioattivi e decadono in isobari stabili emettendo molti β e γ :



questi prodotti costituiscono le scorie dei reattori nucleari.

4.9.2 Energia nella fissione

Quando ^{235}U cattura un neutrone e forma uno stato composto $^{236}\text{U}^*$, l'**energia di eccitazione** è:

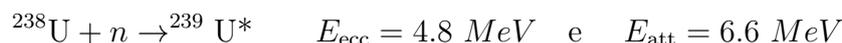
$$m(^{236}\text{U}^*) = m(^{235}\text{U}) + m_n = 235.043924u + 1.008665u = 236.052589u$$

$$E_{\text{ecc}} = [m(^{236}\text{U}^*) - m(^{236}\text{U})]c^2 = (236.052589u - 236.045563u) \times 931.502 \frac{\text{MeV}}{u} = 6.5 \text{ MeV}$$

L'energia di attivazione necessaria per superare la barriera di fissione per l' ^{236}U è 6.2 MeV.

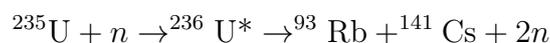
Quindi l' ^{235}U può essere fissionato anche solo aggiungendo un neutrone con energia nulla. Infatti la sezione d'urto osservata per la fissione dell' ^{235}U con neutroni termici (a bassa energia) è molto alta.

Per la reazione:



quindi per fissionare l' ^{238}U ho bisogno di neutroni con energia di qualche MeV.

Vediamo ora quanto è l'energia rilasciata nella fissione. Se considero:



usando le masse $m(^{93}\text{Rb}) = 92.92172u$ e $m(^{141}\text{Cs}) = 140.919449u$ il Q-valore è di 181 MeV.

Il neutrone porta via un impulso piccolo $m_n v_n \simeq 0$, quindi $m_1 v_1 \simeq m_2 v_2$ per i 2 frammenti, siccome per la conservazione dell'impulso, gli impulsi dei prodotti devono essere uguali e opposti, allora il rapporto tra le energie cinetiche sarà l'inverso del rapporto delle masse:

$$\frac{E_{k_1}}{E_{k_2}} = \frac{\frac{1}{2}m_1 v_1^2}{\frac{1}{2}m_2 v_2^2} \simeq \frac{1}{2} \frac{m_2}{m_1}$$

Invece, per la fissione dell' ^{235}U , l'energia media dei neutroni pronti è di $\langle E_n \rangle \simeq 2 \text{ MeV}$ e si hanno circa 2.5 neutroni prodotti per fissione.

Quindi $E_{n, \text{TOT}} \simeq 5 \text{ MeV}$, circa il 2% dell'energia portata via dai frammenti (che infatti sopra avevamo trascurato).

Le altre energie prodotte nella fissione sono:

- $E_{\gamma, \text{pronti}} \simeq 8 \text{ MeV}$ (prodotti entro $t \leq 10^{-14} \text{ s}$)
- $E_{\gamma, \text{decadimenti}} \simeq 7 \text{ MeV}$
- $E_{\beta, \text{decadimenti}} \simeq 19 \text{ MeV}$

4.10 L'Esplosione di Chernobyl

4.10.1 Reazioni di fissione controllate e cosa può andare storto in un reattore

L'uranio naturale è costituito dal 0.72% di ^{235}U e il 99.28% di ^{238}U , un evento di fissione dell'uranio produce in media 2.5 neutroni e ognuno di essi produce un'altra fissione con più prodotti e così via. Questa è una **reazione a catena**. Ogni fissione produce circa 200 MeV di energia cinetica dei frammenti, sotto forma di calore, e radiazione.

Perché una reazione continui, dovrei avere $n(t)/n(0) \geq 1$.

Nonostante si abbia $\langle n \rangle$ per fissione $\simeq 2.5$, questi neutroni sono più veloci e per essi la sezione d'urto di fissione è piccola, perché mi servono neutroni termici.

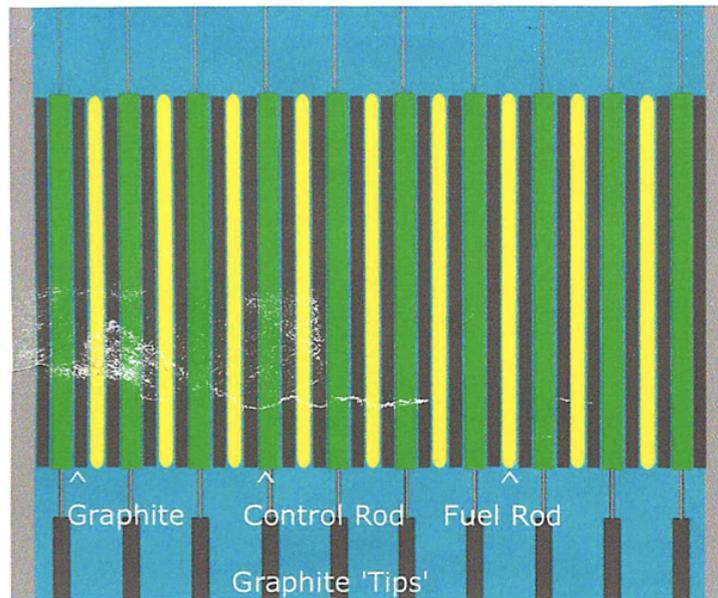
Quindi è necessario **moderare** la loro velocità fino alla velocità termica.

Un modo per far perdere loro velocità è fargli perdere energia con collisioni elastiche con nuclei.

Una scelta classica di moderatore è il carbonio sotto forma di blocchi di grafite.

Questa scelta fu effettuata anche dal reattore RMBK (High-power channel type) di Chernobyl.

La **pila di Fermi** a Chernobyl era fatta in questo modo:



Una pila di Fermi è un reticolo di blocchi di uranio (combustibile) alternati alla grafite (moderatore) e fu inventata da Fermi nel 1942.

Nel dettaglio, i neutroni sono caratterizzati da una costante temporale τ che include il tempo necessario per moderarli ($\simeq 10^{-6}s$) e il tempo di diffusione ad energie termiche prima dell'assorbimento ($\simeq 10^{-3}s$).

Se considero un fattore di riproduzione dei neutroni k , definito come il cambio netto di neutroni da una generazione all'altra, e considero di avere N neutroni al tempo t , kN neutroni al tempo $t + \tau$, k^2N al tempo $t+2\tau$ e così via, quindi per un intervallo breve dt l'aumento sarà:

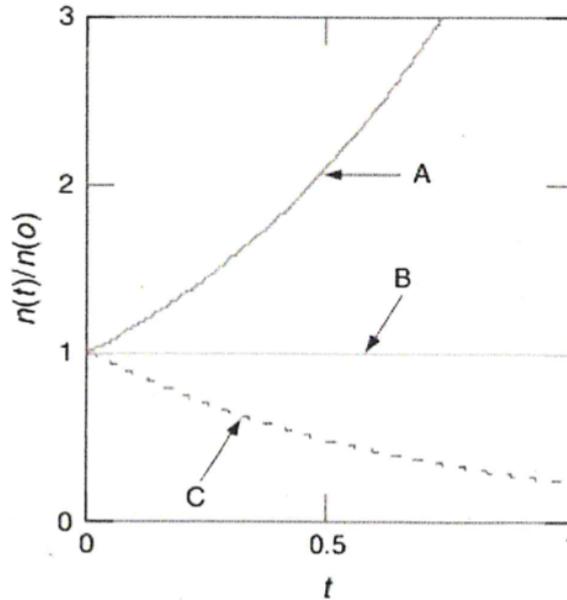
$$dN = (kN - N) \frac{dt}{\tau} \quad \rightarrow \quad N(t) = N_0 e^{(k-1)t/\tau}$$

- se $k=1 \rightarrow N$ costante e ho l'operabilità ideale del reattore
- se $k < 1 \rightarrow N(t)$ decade esponenzialmente
- se $k > 1 \rightarrow N(t)$ cresce esponenzialmente con una costante temporale caratterizzata da $\tau/(k - 1)$

Quindi si hanno tre tipi di pila:

- se $k=1 \rightarrow$ pila **critica** (B)
- se $k < 1 \rightarrow$ pila **subcritica** (C)
- se $k > 1 \rightarrow$ pila **supercritica** (A)

Per avere energia rilasciata costante dovrei avere una pila super critica:



Anche se $k=1.01$ allora $\tau/(k-1) \simeq 0.15s$ e la crescita sarebbe di un fattore $e^{10} (\simeq 22000)$ in 1s.

Nella pratica si controlla il numero di neutroni inserendo nella pila un materiale come il Boro o il Cadmio sotto forma di **barre di controllo**, controllate meccanicamente che possono essere rilasciate o rapidamente inserite. Le barre di controllo a Chernobyl erano fatte di Boro.

Il reattore RBMK contiene anche acqua come **raffreddante** del nocciolo, usata per rimuovere il calore.

Infatti senza di essa il nocciolo si scioglierebbe (**meltdown**).

Il momento importante: **il test**.

Il 25 aprile 1986 a Chernobyl si vuole testare l'impianto di raffreddamento.

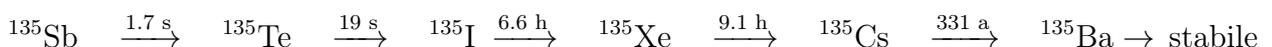
Nel caso di un incidente, il reattore deve fermarsi, ma l'impianto di raffreddamento deve continuare a funzionare, perché il reattore continua a produrre calore visto che i frammenti della fissione sono radioattivi e decadono emettendo energia anch'essi.

Per tenere attive le pompe dell'acqua ci sono dei generatori a gasolio, che ci mettono circa 1 minuto ad attivarsi e quindi nel frattempo mi serve un'altra fonte di energia. Quindi si era ideato un sistema per cui per tenere attive le pompe dell'acqua si utilizzava l'energia prodotta dalle turbine che erano a loro volta attivate dal vapore stesso, ma il loro funzionamento non era mai stato testato.

Per questo motivo era stato deciso di spegnere il reattore 4, ma la sua potenza era invece ancora alta, $\simeq 1600$ MW.

Uno dei prodotti della fissione che ha giocato un ruolo fondamentale in ciò che successe è lo ^{135}Xe che si può produrre direttamente dalla fissione dell' ^{235}U nello 0.2% dei casi. Lo ^{135}Xe è anche prodotto dal decadimento dello ^{135}I (che ha resa di produzione del 6.4%).

La catena di decadimento dei frammenti con massa 135 è:



Sb e Te decadono in tempi brevissimi, quindi si considera il decadimento dello ^{135}I come la principale attività della sequenza.

Nell'arco di ore ho un decadimento di ^{135}Xe che ha una sezione d'urto di assorbimento dei neutroni termici molto grande (2.7×10^6 b).

Questo implica che diminuisce il numero di neutroni termici disponibili alla fissione e quindi devo avere un sistema di correzione per mantenere la potenza costante.

Questo effetto dello ^{135}Xe o di altri isotopi è detto **avvelenamento da prodotto di fissione**.

Il sistema di controllo aggiusta la quantità di grafite per avere una reazione stabile rimuovendo la base.

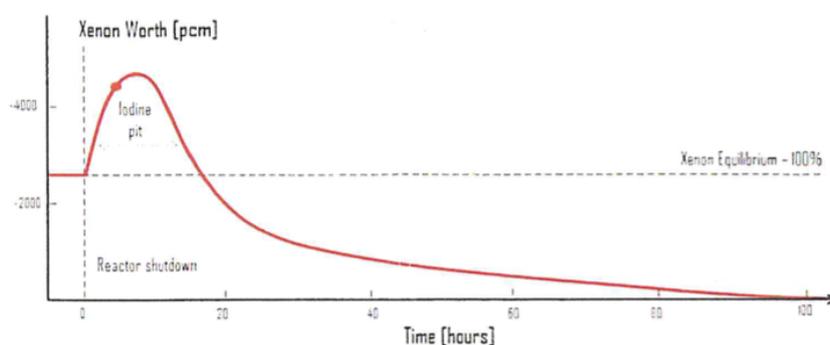
Se faccio scendere la potenza del reattore, come fecero durante il test, la produzione di Xe diminuisce, ma non ho resa di assorbimento.

Ciò implica che i neutroni diminuiscono (o anche: $^{135}\text{Xe} + n \rightarrow ^{136}\text{Xe}$ stabile).

Ciò causò una diminuzione della potenza fino a 30 MW e avvenne a causa di un cambio di turno dei dipendenti.

Questa potenza era troppo bassa per fare il test che era pianificato a 700 MW.

A questo punto ci si trova bloccati nella buca dello xeno:



Ci si ritrova senza neutroni. Un fattore importante è che anche l'acqua usata come raffreddamento assorbe neutroni.

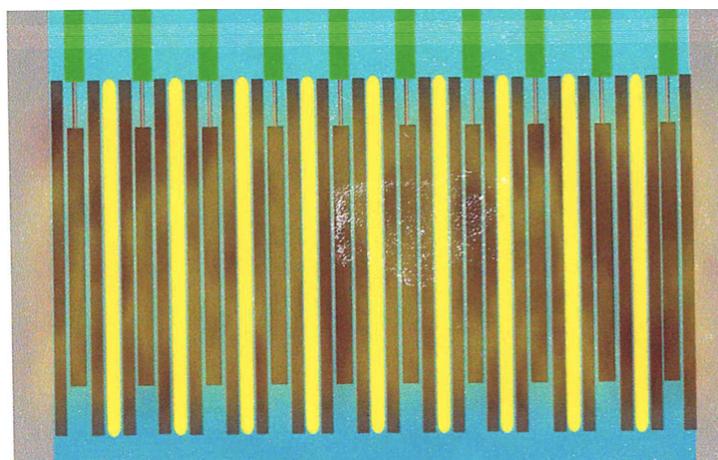
In questa situazione ne assorbe più del solito perché siamo in assenza di bolle d'aria, perché l'acqua è fredda, ed esse non assorbono ($n + p \rightarrow \alpha + \gamma$: cattura di n nell'acqua).

Il problema fu che sotto insistenza del supervisore per fare il test, l'operatore cercò di riportare il reattore a 700 MW.

L'obiettivo era ridurre l'assorbimento di neutroni rimuovendo sempre di più le barre di controllo di Boro.

Ma, nel rimuovere le barre, lo spazio si riempie di acqua e poi di grafite (moderatore) aumentando così la reattività del sistema.

Lasciarono inserite solo circa 10 barre di controllo su 200.

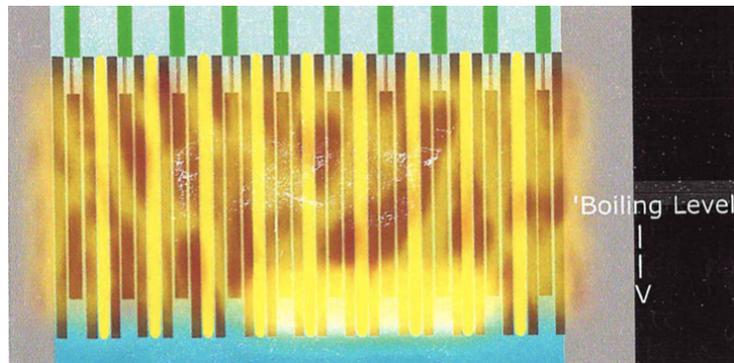


Gli operatori erano comunque tranquilli perché c'era il reinserimento delle barre d'emergenza in caso di problemi.

Iniziarono così il test con pochissime barre di controllo a 200 MW di potenza.

L'assorbimento senza il Boro viene fatto solo dall'acqua, ma a causa del poco vapore prodotto, l'acqua accumulò molta energia termica riducendo il raffreddamento e portando l'acqua a bollire.

Le bolle d'aria non assorbono i neutroni e la reazione accelerò. La potenza crebbe rapidamente, l'acqua bolliva sempre di più, assorbiva meno, e le bolle d'aria si trovarono anche vicino al nocciolo.

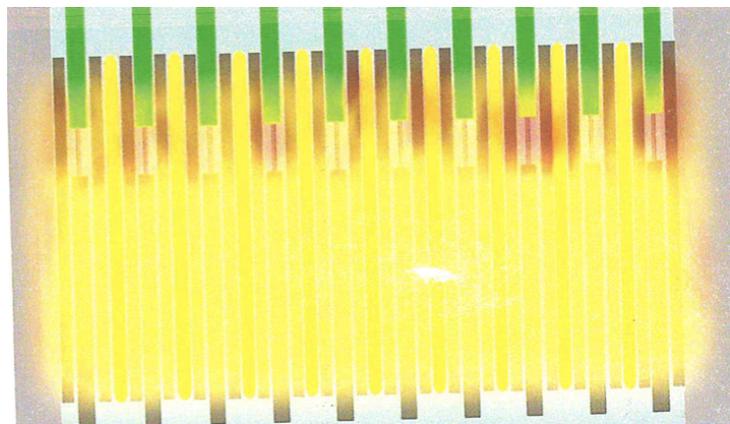


A questo punto l'operatore si accorse che qualcosa non andava e premette il pulsante AZ-5 che doveva portare la potenza a zero.

Per portare la potenza a zero, il sistema inseriva le barre il più velocemente possibile, ma lo faceva comunque a circa 40 cm/s.

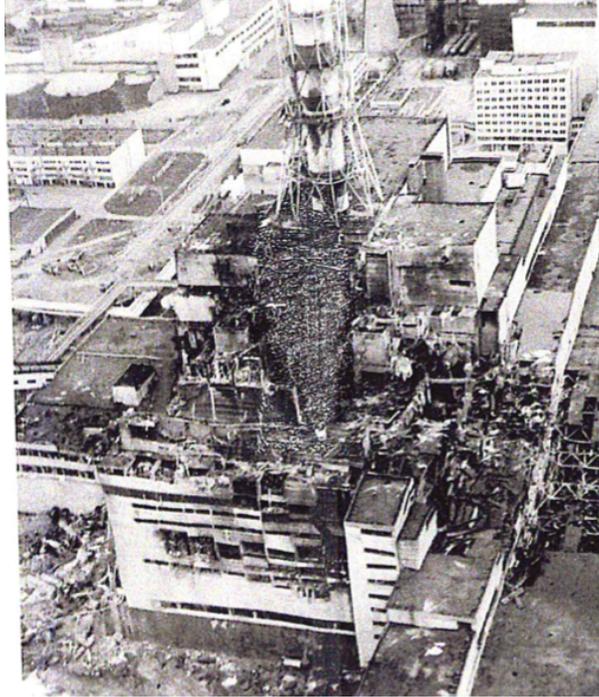
Il nocciolo era lungo 7m, quindi ci volevano circa 18s per completare l'operazione.

Per inserire le barre di controllo, però, devono prima uscire le barre di grafite.



La reattività nella parte bassa del nocciolo aumentò troppo. Per alcuni secondi la reazione che era già fuori controllo venne aumentata da questa procedura.

Fu così che dopo 5s ci fu un'esplosione che fece saltare persino il tetto del reattore.



L'esplosione poteva essere dovuta a diversi fattori:

1. vapore nei tubi dell'acqua
2. acqua che si dissocia in ^2H e O creando combustione
3. vera e propria esplosione nucleare

Non è chiaro quale fu il meccanismo che portò a questa esplosione. Diversi calcoli portano a diverse conclusioni.

Ma il sistema registrò 33 GW di potenza. Tuttavia i calcoli dimostrano che si arrivò fino a 300 GW.

Attualmente gli RBMK sono ancora operativi in Russia con alcune migliorie:

- non ci sono più colonne d'acqua nella parte bassa dei canali che porterebbero ad assorbimento di neutroni
- spegnimento con AZ-5 in 12 s anziché 18 s.

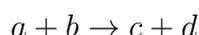
Capitolo 5

La diffusione di particelle

Gli esperimenti di diffusione sono usati per studiare le interazioni tra particelle e per ottenere informazioni sulla natura dei nuclei atomici e dei nucleoni costituenti.

In un tipico esperimento di diffusione, ho un oggetto in esame: il **bersaglio** (particella b) che viene bombardato da un fascio di particelle a con energia definita (**proiettili**).

Tra bersaglio e proiettili avverranno una serie di reazioni di tipo:



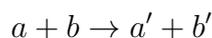
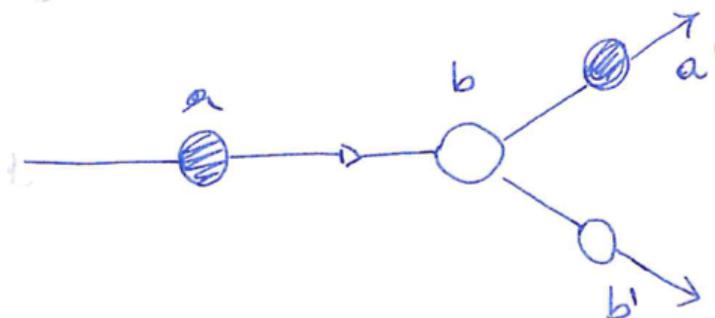
dove c e d sono i prodotti della reazione. Con opportuni sistemi di rivelazione misuro il numero di particelle prodotte, energia, massa ed angoli di emissione.

I fasci prodotti possono essere di diverso tipo: e^- , p, n, ioni pesanti, π , k, μ , \dots con energia che può raggiungere anche l'ordine di 10^{12} eV. Il bersaglio, invece, può essere solido, liquido o gassoso.

In un anello di accumulazione il bersaglio è un altro fascio di particelle.

L'esempio più famoso di anello di accumulazione è il Large Hadron Collider (LHC) del CERN (centro europeo per le ricerche nucleari) di Ginevra, dove attualmente l'energia massima di collisione è $E_{pp} = 13.6$ TeV.

5.0.1 Diffusione elastica



le particelle prodotte nella reazione sono le stesse presenti prima dell'interazione.

L'energia totale è sempre conservata, ma nella diffusione elastica anche l'energia cinetica è conservata.

Il bersaglio b rimane nel suo stato fondamentale ma assorbe quantità di moto nel rinculo, quindi varia la sua energia cinetica.

L'angolo di diffusione e l'energia per a' e b' sono correlati in maniera univoca.

Per studiare piccole distanze quindi bisogna avere un'altra risoluzione nello studio della struttura dei bersagli, occorre adoperare fasci di particelle con grande energia (come abbiamo visto nella prima lezione).

Per una particella con impulso \bar{p} , la lunghezza d'onda di De Broglie ridotta, $\lambda = \frac{h}{p}$, è:

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{hc}{\sqrt{2mc^2 E_{cin} + E_{cin}^2}} \simeq \begin{cases} \frac{h}{\sqrt{2mE_{cin}}} & E_{cin} \ll mc^2 \\ \frac{hc}{E_{cin}} & E_{cin} \gg mc^2 \end{cases}$$

se voglio analizzare un oggetto con una risoluzione spaziale Δx devo usare una lunghezza d'onda al più dell'ordine di Δx : $\lambda \leq \Delta x$.

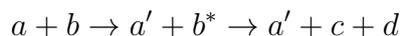
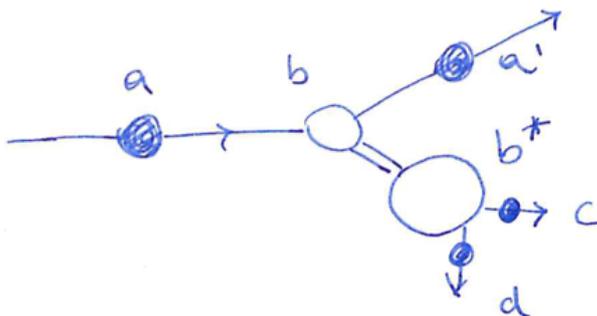
Quindi per il principio d'indeterminazione di Heisenberg:

$$p \geq \frac{h}{\Delta x} \quad \rightarrow \quad pc \geq \frac{hc}{\Delta x} \simeq \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\Delta x}$$

quindi per studiare il nucleo atomico ($R \simeq \text{fm}$) allora necessito di fasci con $p \simeq 10 - 1000 \text{ MeV}/c$.

Per studiare nucleoni $R \simeq 0.8 \text{ fm} \rightarrow p \geq 100 \text{ MeV}/c$, per i quark dentro ai nucleoni $p \simeq$ diversi GeV/c .

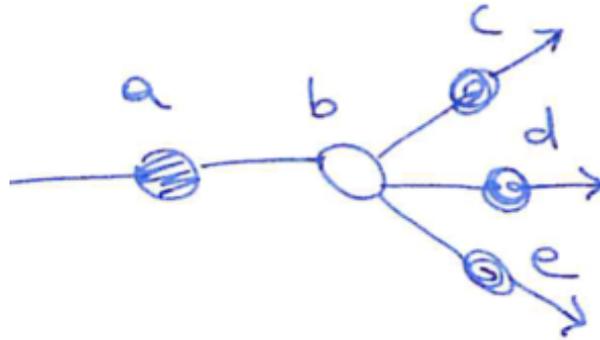
5.0.2 Diffusione anelastica



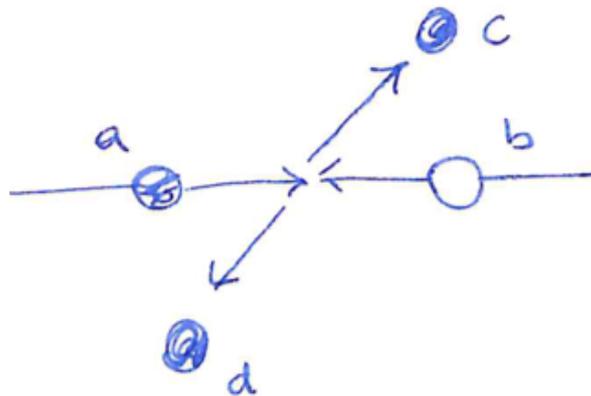
Parte dell'energia cinetica viene trasferita da a al bersaglio b e lo porta in uno stato eccitato b^* che torna allo stato fondamentale emettendo una particella leggera (γ oppure un mesone π) o decade dando origine a due o più particelle differenti (c, d, \dots).

Se in una reazione rivedo solo a' allora la reazione è **inclusiva**, mentre se rivedo tutti i prodotti di reazione è **esclusiva**.

Il proiettile può scomparire completamente nella reazione come nel caso della produzione anelastica di nuove particelle:



e, analogamente, questo succede per la collisione tra fasci di particelle:



tutta l'energia di a va a finire nell'eccitazione del bersaglio o nella produzione di particelle.

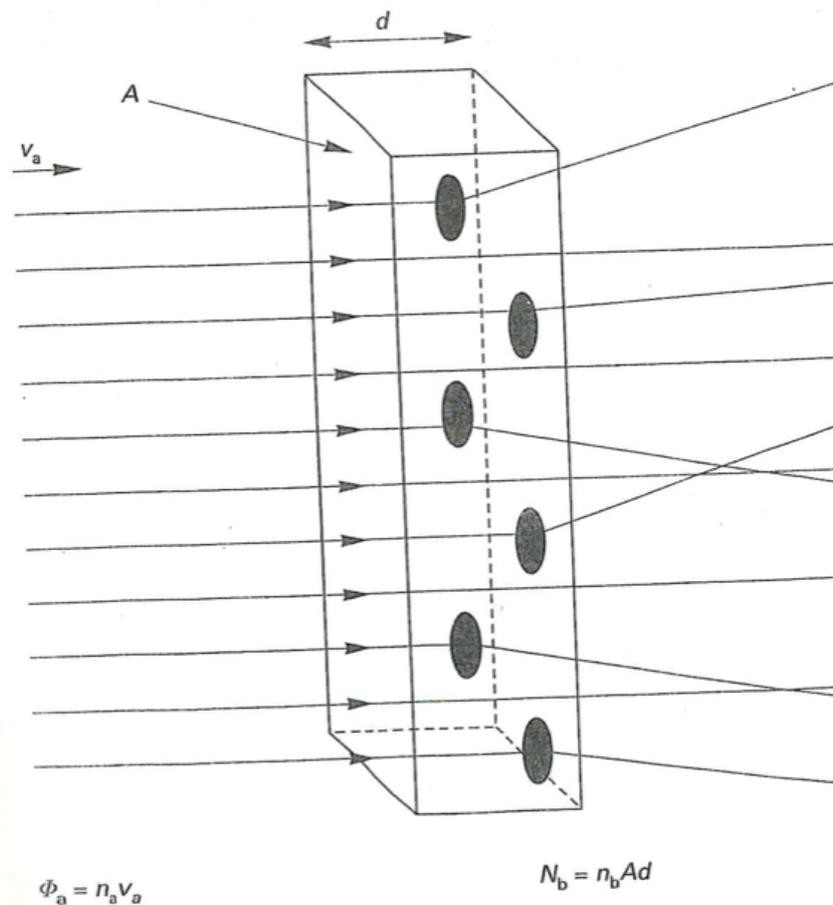
5.1 Sezioni d'urto

Gli esperimenti di diffusione ci permettono di estrarre importanti informazioni sulla forma del potenziale di interazione sull'intensità dell'accoppiamento fra le particelle incidenti a e il bersaglio b .

La quantità più importante per la descrizione e l'interpretazione di queste reazioni è la **sezione d'urto**, σ , che misura la probabilità che avvenga una reazione tra le due particelle coinvolte.

5.1.1 La sezione d'urto geometrica

In un esperimento ideale, ho un bersaglio di spessore d , con N_b centri di diffusione di tipo b , con densità di particelle n_b .



Ogni particella del bersaglio ha una sezione geometrica di area σ_b da determinare sperimentalmente.

Si bombarda il bersaglio con un fascio molto energetico di particelle a puntiformi.

Una reazione avverrà ogni volta che una particella del fascio a urta una particella del bersaglio b .

Si assume che le particelle del fascio siano rimosse dal fascio quando hanno reagito.

Il tasso di conteggio totale \dot{N} definito come numero di reazioni per unità di tempo = $\dot{N}_{a, \text{dopo}} - \dot{N}_{a, \text{prima}}$ quindi è una misura diretta della sezione d'urto geometrica associata ai centri diffusori, σ_b .

Se A è la sezione trasversale e la densità delle particelle è n_a , ricavo che il flusso Φ_a (numero di proiettili a che colpiscono il bersaglio per unità di area e di tempo) è:

$$\Phi_a = \left(\frac{\dot{N}_a}{A} \right) = n_a \cdot v_a \quad [\Phi] = [A]^{-1} \times [T] \quad (5.1)$$

il numero totale di particelle bersaglio b nell'area è $N_b = n_b \cdot A \cdot d$, quindi la frequenza è:

$$\dot{N} = \Phi_a \cdot N_b \cdot \sigma_b \quad (5.2)$$

se e solo se i centri diffusori non si sovrappongono. L'area che ciascun centro diffusore ha disponibile per a , è la **sezione d'urto geometrica**:

$$\sigma_b = \frac{\dot{N}}{\Phi_a \cdot N_b} = \frac{\text{numero di reazioni/tempo}}{(\text{numero di particelle } a/\text{tempo} \times \text{area}) \times \text{numero centri diffusori } b}$$

se invece di avere fasci a costanti ed omogenei (reattore) ho distribuzione dei centri diffusori omogeneo (esperimenti agli acceleratori di particelle):

$$\sigma_b = \frac{\text{numero di interazioni/tempo}}{\text{particelle } a/\text{tempo} \times \text{centri diffusori/area}}$$

5.1.2 Sezione d'urto totale

Questo approccio semplicistico ci dà con buona approssimazione la sezione d'urto totale. Ma in alcuni casi la probabilità di interazione è molto diversa a seconda dell'energia in gioco.

In questo caso:

$$\sigma_{\text{TOT}} = \frac{\text{numero di reazioni/tempo}}{(\text{particelle } a/\text{tempo}) \times (\text{centri diffusori/area})}$$

è la **sezione d'urto totale** determinata conoscendo Φ_a e N_b/A .

Si possono anche definire le sezioni d'urto per interazione **elastica** σ_{el} e **anelastica** σ_{anel} , dove σ_{anel} può essere diversa a seconda dei diversi canali di reazione.

$$\sigma_{\text{TOT}} = \sigma_{\text{el}} + \sigma_{\text{anel}}, \quad \text{con } [\sigma] = [A] = \text{barn} = b = 10^{-28} m^2$$

Ad esempio:

- sezione d'urto protone-protone $\sigma_{pp}(10 \text{ GeV}) \simeq 40 \text{ mb}$
- sezione d'urto neutrino-protone $\sigma_{\nu p}(10 \text{ GeV}) \simeq 70 \text{ fb}$
- sezione d'urto protone-protone $\sigma_{pp}(13 \text{ TeV}) \simeq 110 \text{ mb}$
- sezione d'urto protone-protone elastica $\sigma_{pp,el}(13 \text{ TeV}) \simeq 30 \text{ mb}$
- sezione d'urto protone-protone anelastica $\sigma_{pp,anel}(13 \text{ TeV}) \simeq 80 \text{ mb}$

5.1.3 Luminosità

La quantità $\mathcal{L} = \Phi_a \cdot N_b$ è detta **luminosità** con $[\mathcal{L}] = [A]^{-1} \times [T]^{-1}$

$$\Phi_a = \frac{\dot{N}_a}{A} = n_a \times v_a \quad \rightarrow \quad \mathcal{L} = \dot{N}_a \times n_b \times d = n_a \times v_a \times N_b$$

Ma vediamo cosa succede negli anelli di accumulazione. Ho un anello di circonferenza U in cui inietto j pacchetti di particelle, ognuno costituito da N_a e N_b particelle che circolano in senso opposto con velocità v .

Le particelle, guidate da campi magnetici, collidono in un punto di intersezione $\frac{j \times v}{U}$ volte al secondo.

Quindi:

$$\mathcal{L} = \frac{N_a \times N_b \times j \times \frac{v}{U}}{A}$$

con $A \equiv$ sezione trasversale dei pacchetti nel punto di interazione.

Se le particelle sono distribuite con una distribuzione gaussiana con deviazione standard σ_x orizzontale e σ_y verticale:

$$A = 4\pi\sigma_x \times \sigma_y$$

. Per ottenere una luminosità alta, devo focalizzare i fasci nella zona di interazione. Ad LHC il diametro dei fasci è dell'ordine dei micrometri. Si può anche definire la luminosità integrata $\int \mathcal{L} dt$.

Il numero di reazioni osservate durante un certo tempo di misura è: $\int \mathcal{L} dt \times \sigma_{\text{TOT}}$
 Quindi con $\sigma_{\text{TOT}} \simeq 110 \text{ mb}$ e $\int \mathcal{L} dt \simeq 180 \text{ fb}^{-1}$ nelle interazione protone-protone ad LHC:

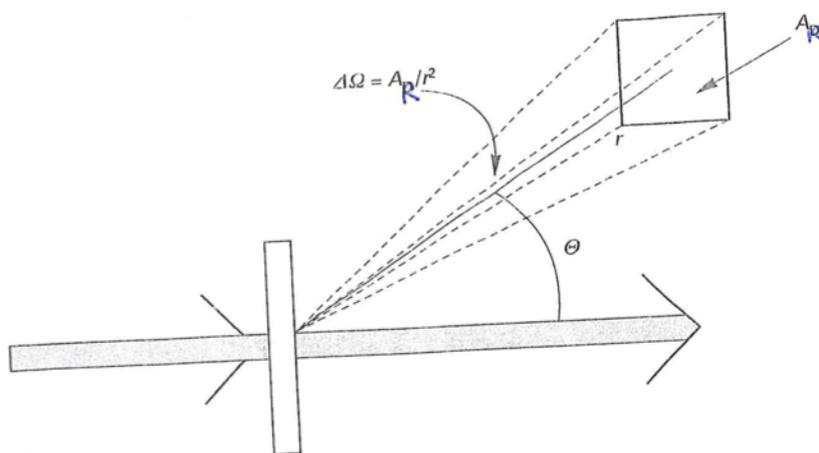
$$N \simeq 21 \times 10^{15} \quad \text{reazioni totali avvenute.}$$

5.1.4 Sezioni d'urto differenziali

Per via della risoluzione sperimentale, solo una frazione di tutte le possibili reazioni sono accessibili sperimentalmente.

Considero un rivelatore di area A_R ad una distanza r ed angolo θ dalla direzione del fascio.

Esso coprirà un angolo solido $\Delta\Omega = A_R/r^2$



$\dot{N} \equiv$ numero di reazioni nel tempo che vedrà il rivelatore sarà proporzionale alla sezione d'urto differenziale:

$$\dot{N}(E, \theta, \Delta\Omega) = \mathcal{L} \cdot \frac{d\sigma(E, \theta)}{d\Omega} \cdot \Delta\Omega$$

se posso misurare l'energia E' delle particelle diffuse allora posso determinare la sezione d'urto doppiamente differenziale:

$$\frac{d^2\sigma(E, E', \theta)}{d\Omega dE'}$$

quindi la σ_{TOT} è data dall'integrale su tutto l'angolo solido e su tutte le energie:

$$\sigma_{\text{TOT}}(E) = \int_0^{E'_{\text{max}}} \int_{4\pi} \frac{d^2\sigma(E, E', \theta)}{d\Omega dE'} d\Omega dE'$$

5.2 La regola d'oro

Vediamo come dedurre teoricamente la sezione d'urto. Il tasso di conteggi \dot{N} dipende dalle caratteristiche del potenziale d'interazione che sono contenute nell'operatore di Hamilton \mathcal{H}_{int} .

Questo operatore trasforma la funzione d'onda iniziale ψ_i nella funzione d'onda dello

stato finale ψ_f .

L'elemento di matrice della transizione è:

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* \mathcal{H}_{\text{int}} \psi_i dV$$

e rappresenta l'**ampiezza di probabilità** per la transizione in esame.

\dot{N} dipenderà anche dal numero di stati finali disponibili per la reazione.

Ogni particella occupa nello **spazio delle fasi** un volume pari a $h^3 = (2\pi\hbar)^3$ secondo il principio di indeterminazione.

Considero una particella diffusa in un volume V e in un intervallo di impulsi da p' a $p' + dp'$, quindi nello spazio degli impulsi, *i.e.* calotta sferica con raggio p' e spessore dp' :

$$4\pi p'^2 dp'$$

allora il numero di stati finali è:

$$dn(p') = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{(2\pi\hbar)^3} dp'$$

L'energia e l'impulso di una particella sono connessi da

$$dE' = v' dp'$$

e la densità di stati finali nell'intervallo di energia dE' sarà:

$$\rho(E') = \frac{dn(E')}{dE'} = \frac{V \cdot 4\pi p'^2}{v' \cdot (2\pi\hbar)^3}$$

Il legame tra il tasso di reazioni, l'elemento di matrice della transizione e la densità degli stati finali è espresso dalla **seconda regola d'oro di Fermi**.

Una sua derivazione può essere trovata nei testi di meccanica quantistica.

Quindi se il tasso di reazioni W (normalizzato a una particella del bersaglio e una del fascio) può essere scritto:

$$W = \frac{2\pi}{\hbar} |\mathcal{M}_{fi}| \cdot \rho(E')$$

Quindi da (5.1) e (5.2) ottengo:

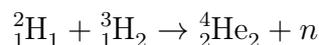
$$W = \frac{\dot{N}(E)}{N_b \cdot N_a} = \frac{\sigma \cdot v_a}{V}$$

con $V = \frac{N_a}{n_a}$ volume spaziale occupato dal fascio di particelle.

La sezione d'urto sarà quindi:

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar \cdot v_a} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \cdot \rho(E') \cdot V$$

Esercizio 9. Deutoni con un'energia $E_{\text{cin}} = 5 \text{ MeV}$ vengono fatti incidere perpendicolarmente su un bersaglio di trizio, di densità $\mu_{3\text{H}} = 0.2 \text{ mg/cm}^2$ per studiare la reazione:



Quanti neutroni al secondo passano attraverso un rivelatore che presenta una superficie $S=20 \text{ cm}^2$ e si trova ad una distanza $R=3 \text{ m}$ dal bersaglio e ad un angolo $\theta = 30^\circ$ rispetto alla direzione del fascio di deutoni incidenti, sapendo che la sezione d'urto differenziale assume per quest'angolo il valore di 13 mb/sr e la corrente di deutoni che incide sul bersaglio è $I_{2\text{H}} = 2\mu\text{A}$?

Soluzione 9. In analogia con la formula per la sezione d'urto geometrica $\sigma_b = \frac{\dot{N}}{\Phi_a \cdot N_b}$, il tasso di reazioni deve rispettare la relazione $\dot{N} = \sigma \dot{N}_{2\text{H}} n_{3\text{H}}$ dove $\dot{N}_{2\text{H}}$ è la corrente dei deutoni e $n_{3\text{H}}$ è il numero di centri diffusori per unità di area presentati dal bersaglio di trizio al fascio incidente.

Il tasso di neutroni in un qualunque elemento di angolo solido $d\Omega$ deve quindi rispettare la seguente relazione:

$$d\dot{N} = \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \dot{N}_{2\text{H}} n_{3\text{H}} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \frac{S}{R^2} \frac{I_{2\text{H}}}{e} \frac{\mu_{3\text{H}}}{m_{3\text{H}}} N_A$$

dove

- e è la carica elementare = $1.6 \times 10^{-19} C$
- $m_{3\text{H}}$ è la massa molare del trizio = 3.01605 g/mol
- N_A è il numero di Avogadro = $6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Quindi:

$$d\dot{N} = 14.4 \times 10^2 /s = 1440 \text{ neutroni/s}$$

Capitolo 6

La forma geometrica dei nuclei

Nel seguito ci si occuperà di studiare la dimensione e la forma dei nuclei. Queste informazioni potrebbero essere ottenute mediante diffusione di protoni o particelle α sui nuclei in esame, come fece Rutherford che determinò che $R_N < 10^{-14}\text{m}$ utilizzando fasci di particelle α .

Si riscontrano però delle difficoltà:

- i proiettili stessi non sono puntiformi $\rightarrow \sigma$ per la diffusione rifletterà anche la struttura del proiettile e non solo quella del bersaglio
- l'interazione nucleare tra proiettile e bersaglio non è del tutto compresa teoricamente ed ha una dinamica complessa.

Per risolvere questi due punti, si può utilizzare la diffusione di elettroni. Gli elettroni, per quanto ne sappiamo, sono puntiformi (non hanno struttura interna).

Oltretutto, l'interazione tra un elettrone e un nucleo, un nucleone o un quark avviene tramite lo scambio di un fotone virtuale che si può calcolare molto accuratamente nell'ambito dell'elettrodinamica quantistica.

I processi di scambio di un fotone sono manifestazioni dell'interazione elettromagnetica con costante di accoppiamento $\alpha \simeq 1/137 \ll 1$ allora le correzioni di ordine superiore al primo sono trascurabili.

6.1 La cinematica della diffusione di elettroni

Nella diffusione di elettroni si usano particelle relativistiche, quindi si deve usare la notazione quadri-vettoriale.

- $x = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, \vec{x})$ quadri-vettore spazio temporale, con componente 0 che corrisponde al tempo
- $p = (p_0, p_1, p_2, p_3) = (E/c, \vec{p})$ quadri-vettore impulso, con componente 0 che corrisponde all'energia

Il quadrato del quadri-impulso è il prodotto scalare tra p (invariante di Lorentz):

$$p^2 = p \cdot p = \frac{E}{c} \cdot \frac{E}{c} - p_1 p_1 - p_2 p_2 - p_3 p_3 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2$$

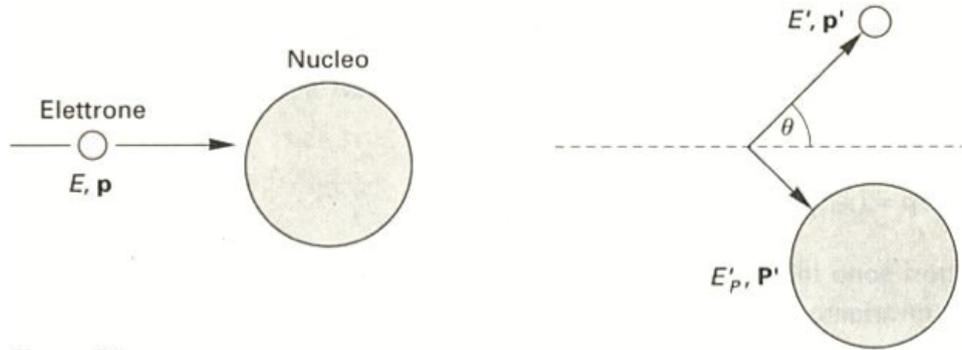
e $p^2 = m^2 c^2$, con m massa a riposo, siccome si può sempre trovare un sistema di riferimento in cui la particella è a riposo con $\bar{p} = 0$ e $E = mc^2$, e:

$$m = \frac{\sqrt{p^2}}{c} \quad \text{è la massa invariante}$$

Dalle relazioni precedenti ottengo:

$$E^2 - \bar{p}^2 c^2 = m^2 c^4 \quad \rightarrow \quad E \simeq |\bar{p}|c \quad \text{se} \quad E \gg mc^2$$

Consideriamo la cinematica della diffusione elastica di elettroni su nuclei:



se considero l'urto di un elettrone di quadri-impulso p su una particella di quadri-impulso P , ho che per la conservazione di energia ed impulso:

$$p + P = p' + P' \quad \rightarrow \quad (p + P)^2 = p^2 + 2pP + P^2 = p'^2 + 2p'P' + P'^2$$

e le masse invariante m_e e M sono inalterate in una diffusione elastica, quindi:

$$p^2 = p'^2 = m_e^2 c^2 \quad P^2 = P'^2 = M^2 c^2 \quad \rightarrow \quad p \cdot P = p' \cdot P'$$

sperimentalmente si rivela l' e^- diffuso e non la particella che rincula, quindi:

$$p \cdot P = p' \cdot (p + P - p') = p'p + p'P - m_e^2 c^2 \quad (6.1)$$

se considero un sistema di riferimento nel laboratorio, dove la particella di quadri-impulso P è a riposo prima dell'urto, allora:

$$p = \left(\frac{E}{c}, \bar{p} \right), \quad p' = \left(\frac{E'}{c}, \bar{p}' \right), \quad P = \left(\frac{Mc^2}{c}, 0 \right), \quad P' = \left(\frac{E'_P}{c}, P' \right)$$

quindi da (6.1):

$$\begin{aligned} (p \cdot P)c^2 &= (p' \cdot P')c^2 \\ &= (p'p + p'P - m_e^2 c^2)c^2 \\ &= E'E - \bar{p}\bar{p}'c^2 + E'Mc^2 - m_e^2 c^4 \end{aligned}$$

Ad energie relativistiche $E \simeq |\bar{p}|c$ posso trascurare $m_e^2 c^4$, quindi:

$$E \cdot Mc^2 = E'E \cdot (1 - \cos\theta) + E'Mc^2$$

esplicitando la relazione tra i vettori \bar{p} e \bar{p}' in funzione dell'angolo θ .

Quindi, nel sistema di riferimento del laboratorio:

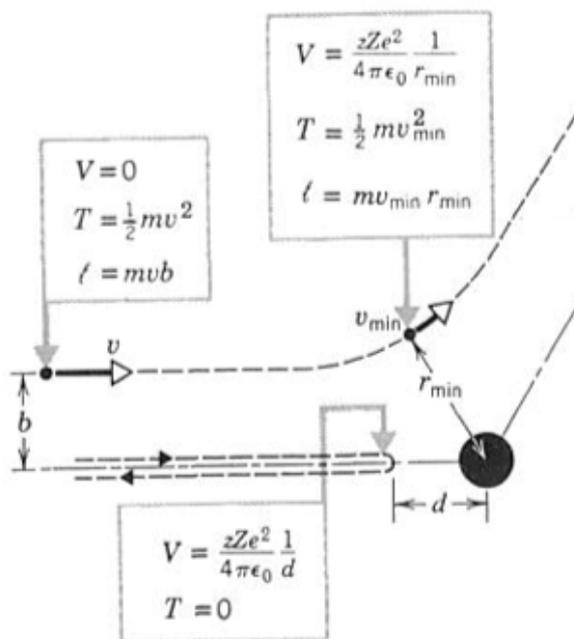
$$E' = \frac{E}{1 + \frac{E}{Mc^2} \cdot (1 - \cos\theta)} \quad \text{con } \theta \text{ angolo di diffusione}$$

6.2 La sezione d'urto di Rutherford - calcolo classico

Consideriamo ora la sezione d'urto del processo di diffusione di un elettrone su un nucleo atomico di carica Ze .

Il processo di diffusione può essere elastico o anelastico. La diffusione Coulombiana elastica è detta **diffusione di Rutherford**.

Vediamo la geometria della diffusione:



Come in tutti i casi di orbite sottoposte ad una forza $\propto \frac{1}{r^2}$, la particella diffusa segue una traiettoria iperbolica e può essere calcolata allo stesso modo di come si determina ad esempio la traiettoria di una cometa diffusa dal sole.

La particella si avvicina al bersaglio nucleare lungo una linea retta a distanza b dal nucleo in assenza di forza repulsiva, b è detto **parametro d'impatto**.

Definiamo l'angolo di diffusione con θ . Lontano dal nucleo, la particella incidente ha potenziale di Coulomb trascurabile.

La sua energia totale coincide quindi con la sua energia cinetica incidente $T_a = \frac{1}{2}mv_0^2$.

Il suo momento angolare rispettivamente al nucleo bersaglio è $|\vec{r} \times m\vec{v}| = mv_0b$ a grandi distanze.

Avvicinandosi al nucleo bersaglio, la particella raggiunge una distanza minima di separazione r_{\min} (che dipende da b).

Nel caso di una collisione frontale ($b=0$) questo valore diventa in assoluto il minimo possibile.

A questo punto, ha scambiato la sua energia cinetica iniziale con l'energia potenziale di Coulomb:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{zZe^2}{d} \quad (6.2)$$

dove ze è la carica del proiettile e Ze quella del bersaglio.

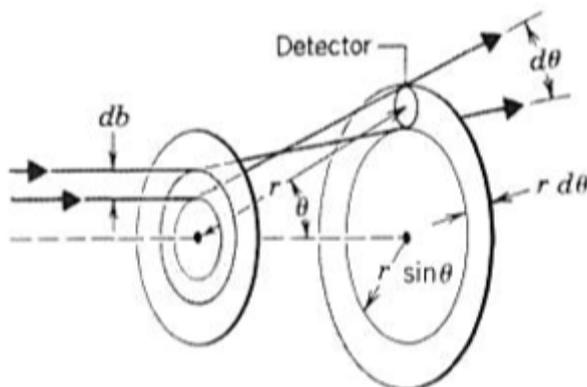
La distanza d è detta la **distanza di massimo avvicinamento** (distance of closest approach).

In punti intermedi della traiettoria, l'energia è parzialmente cinetica e parzialmente potenziale.

Per la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{zZe^2}{r}$$

A causa della simmetria della forza di Coulomb la diffusione ha simmetria cilindrica attorno all'asse del fascio e la sezione d'urto è indipendente da Φ , angolo azimutale:



le particelle che entrano nell'anello tra b e $b+db$ sono distribuite uniformemente in un anello di larghezza angolare $d\theta$, un rivelatore si trova a distanza r dalla pellicola di diffusione.

Se il mio bersaglio ha n nuclei per unità di volume, e assumiamo che i centri di diffusione non si sovrappongono (*i.e.* il bersaglio è una pellicola di spessore x), allora il numero di nuclei per unità di area è $n \cdot x$ e la frazione df di particelle incidenti che attraversano l'anello di area $2\pi b db$ è:

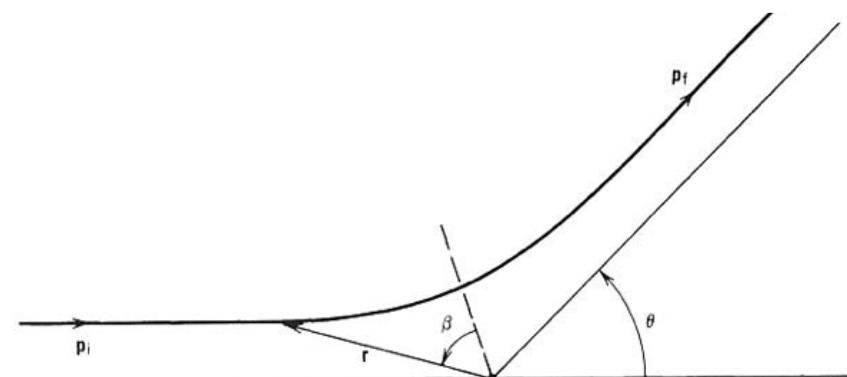
$$df = nx(2\pi b db) \tag{6.3}$$

la frazione con parametri d'impatto $< b$ è

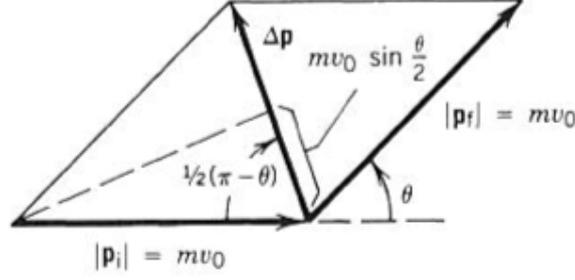
$$f = nx\pi b^2$$

. Il momento angolare lineare delle particelle diffuse cambia solamente direzione, allora lontano dalla diffusione, il momento angolare incidente iniziale e finale valgono entrambi mv_0 (questo perché assumiamo che il bersaglio è così massivo da non rinculare).

Vediamo la traiettoria iperbolica di una particella diffusa. Le coordinate istantanee sono \bar{r} e β .



La variazione nel vettore impulso è $\Delta\bar{p}$ nella direzione della linea tratteggiata, che divide a metà $\pi - \eta$:



Come si vee dalla figura, Δp vale:

$$\Delta p = 2mv_0 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2mv_0 \cos\left(\frac{\pi - \theta}{2}\right) \quad (6.4)$$

nella direzione della bisettrice di $\pi - \theta$, assumendo che $|\bar{p}_i| = |\bar{p}_f|$ e quindi l'angolo tra \bar{p}_i e $\Delta \bar{p}$ è $1/2(\pi - \theta)$.

Secondo la seconda legge di Newton nella forma $F = \frac{dp}{dt}$, allora è uguale all'impulso netto della forza di Coulomb in quella direzione:

$$\Delta p = \int dp = \int F dt = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dt}{r^2} \cos\beta \quad (6.5)$$

dove β è l'angolo tra la bisettrice e il vettore istantaneo \bar{r} che localizza la particella.

Lontano dalla diffusione all'istante iniziale dove $t=0$, l'angolo β ha valore $-(\frac{\pi-\theta}{2})$, nella posizione finale ($t = \infty$), β ha valore $+(\frac{\pi-\theta}{2})$.

La velocità istantanea \bar{v} può essere scritta in funzione della sua componente radiale (lungo \bar{r} e tangenziale:

$$\bar{v} = \frac{dr}{dt} \hat{r} + r \frac{d\beta}{dt} \hat{\beta}$$

dove \hat{r} e $\hat{\beta}$ sono vettori unitari lungo la direzione radiale e tangenziale rispettivamente.

Solo la componente tangenziale contribuisce al momento angolare vicino al nucleo:

$$l = |m\bar{r} \times \bar{v}| = mr^2 \frac{d\beta}{dt}$$

lontano dal nucleo, il momento angolare ha valore $mv_0 b$, quindi per la conservazione del momento angolare:

$$mv_0 b = mr^2 \frac{d\beta}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{dt}{r^2} = \frac{d\beta}{v_0 b}$$

e sostituendo in (6.5) ottengo:

$$\begin{aligned} \Delta p &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 v_0 b} \int_{-(\frac{\pi-\theta}{2})}^{+(\frac{\pi-\theta}{2})} \cos\beta d\beta \\ &= \frac{zZe^2}{2\pi\epsilon_0 v_0 b} \cos\frac{\theta}{2} \end{aligned}$$

e combinando con (6.4): $b = \frac{d}{2} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right)$ dove d è la distance of closest approach in (6.2).

Cambiando quest'ultimo risultato per b con (6.3):

$$|df| = \pi n x \frac{d^2}{4} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \csc^2\left(\frac{\theta}{2}\right) d\theta = \pi n x \frac{d^2}{4} \cot\left(\frac{\theta}{2}\right) \frac{1}{\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} d\theta \quad (6.6)$$

e il tasso a cui le particelle incidenti raggiungono l'anello per unità di angolo solido è

$$r(\theta, \Phi) = \frac{I_a |df|}{d\Omega} 4\pi$$

dove I_a è il tasso al quale le particelle incidenti colpiscono il bersaglio (quindi $I_a |df|$ è il numero di esse che lo colpiscono da b a $b+db$).

Con $d\Omega = 2\pi \sin\theta d\theta$ per la geometrica ad anello *i.e.* $\sin\theta d\theta d\Phi$ integrato su Φ , il risultato è:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \right)^2 \left(\frac{1}{4T_a} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

che è la **sezione d'urto di Rutherford**

La dipendenza da Z^2 , T_a^{-2} e $\sin^{-4}(\frac{\theta}{2})$ sono tutti stati provati sperimentalmente da Geiger e Madsen (1911-1913) nel laboratorio di Rutherford, quando si scoprì l'esistenza del nucleo.

Infatti usando (6.2) e (6.6):

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega} &= \frac{1}{nx} \frac{df}{d\Omega} \\ &= \left(\frac{zZe^2}{8\pi\epsilon_0 T_a} \right)^2 \cdot \frac{\cot\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2 \cdot \sin\theta \cdot \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{zZe^2}{8\pi\epsilon_0 T_a} \right)^2 \cdot \frac{\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2\sin^3\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)} \\ &= \left(\frac{zZe^2}{16\pi\epsilon_0 T_a} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4\left(\frac{\theta}{2}\right)} \quad \square \end{aligned}$$

Il trattamento che abbiamo utilizzato per la diffusione di Rutherford è basato esclusivamente su concetti di fisica classica, senza usare effetti quantistici.

Sarà da tenere conto il principio d'indeterminazione per cui se ho un'incertezza Δb sul parametro d'impatto avrò una corrispondente incertezza Δp nell'impulso $\simeq \hbar/\Delta b$.

Quindi la derivazione classica ha senso solo se $\Delta b \ll b$ e $\Delta p \ll p_{\text{trasverso}}$:

$$b\Delta p_{\text{trasverso}} \gg \Delta b\Delta p \geq \hbar \quad \rightarrow \quad \frac{b\Delta p_{\text{trasverso}}}{\hbar} \gg 1$$

Considero due casi limite per testare la validità di questo approccio classico:

1. **diffusione a 90°**: per cui $b = \frac{d}{2} = 14$ fm e $\Delta p_{\text{trasverso}} = mv_0 = 250$ MeV/c (per particelle α di 8 MeV incidenti su Au).
In questo caso: $\frac{b\Delta p_{\text{trasverso}}}{\hbar} \simeq 18$ allora siamo lontani dal limite quantistico
2. **diffusione ad angoli piccolissimi $\theta \simeq 1^\circ$** : $b = 1600$ fm e $\Delta p_{\text{trasverso}} \simeq mv_0 \tan\theta \simeq 4$ MeV/c allora $\frac{b\Delta p_{\text{trasverso}}}{\hbar} \simeq 32$ allora siamo ancora lontani dal limite quantistico.

In realtà nella forza di Coulomb $\simeq \frac{1}{r^2}$ nel calcolo quantistico della sezione d'urto non ho alcun fattore \hbar , e quindi nel limite classico per cui $\hbar \rightarrow 0$ ho lo stesso identico valore.

Se aumento l'energia della particella incidente raggiungerà il punto in cui la distanza di massimo avvicinamento diminuisce fino al raggio nucleare e quindi il proiettile e il bersaglio sentono la loro forza nucleare \rightarrow a questo punto la formula per la sezione d'urto di Rutherford che considera solo l'interazione di Coulomb fallirà la sua stima della sezione d'urto.

La separazione inter-nucleare a cui la formula di Rutherford fallisce ci dà una stima del raggio nucleare.

6.3 La sezione d'urto di Rutherford - calcolo quantistico

Vedremo come si ottiene la stessa equazione in meccanica quantistica utilizzando la regola d'oro di Fermi.

Consideriamo la diffusione su una distribuzione di carica non puntiforme.

Come nel calcolo classico, consideriamo effetti di rinculo trascurabili *i.e.* bersaglio pesante.

Data la costante di struttura fine $\alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137}$, se $Z\alpha \ll 1 \rightarrow$ uso **approssimazione di Born**: le funzioni d'onda dell'elettrone ψ_i entrante e ψ_f uscente sono considerate come onde piane:

$$\psi_i = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{\hbar}}, \quad \psi_f = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\frac{\vec{p}'\cdot\vec{r}}{\hbar}}$$

in questo caso il potenziale a distanza infinita è trascurabile e quindi le particelle del fascio iniziale e finale sono libere.

Si considera inoltre un volume grande rispetto alla dimensione del centro diffusore, così grande che i livelli discreti nel volume possono essere considerati come un continuo.

Il fascio di elettroni ha una densità di particelle per unità di volume pari a n_a .

Se il volume è grande a sufficienza allora la condizione di normalizzazione è:

$$\int_V |\psi_i|^2 dV = n_a \cdot V, \quad V = \frac{N_a}{n_a}$$

Come abbiamo visto quando parliamo della regola d'oro, il tasso di reazioni W è pari al prodotto della sezione d'urto per la velocità delle particelle del fascio, diviso per il volume di normalizzazione che si deve scegliere per ogni singola particella del fascio:

$$\frac{\sigma v_a}{V} = W = \frac{2\pi}{\hbar} |\langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle|^2 \frac{dn}{dE_f}$$

con $E_f \equiv$ energia totale (cinetica + massa a riposo) nello stato finale.

$$dE_f = dE' = dE$$

siccome trascuro gli effetti di rinculo del bersaglio e la massa a riposo è costante.

Sempre dalla discussione sulla regola d'oro, ricavo che la densità degli stati finali nello spazio delle fasi, n , è

$$dn(|\vec{p}'|) = \frac{4\pi |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'| \cdot V}{(2\pi\hbar)^3}$$

Quindi la sezione d'urto per diffusione di un elettrone nell'elemento di angolo solido $d\Omega$ è:

$$d\sigma \cdot N_a \cdot \frac{1}{V} = \frac{2\pi}{\hbar} \left| \langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle \right|^2 \frac{V |\vec{p}'|^2 d|\vec{p}'|}{(2\pi\hbar)^3 dE_f} d\Omega$$

sostituendo v_a con la velocità della luce, c (in buona approssimazione) e per energia dell'elettrone elevata, $|\vec{p}'| \simeq E'/c$, allora:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{V^2 \cdot E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} \left| \langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle \right|^2 \quad (6.7)$$

L'Hamiltoniana d'interazione di una carica e in un campo elettrico rappresentato dal potenziale $\Phi(r)$ è $\mathcal{H}_{\text{int}} = e\Phi$.

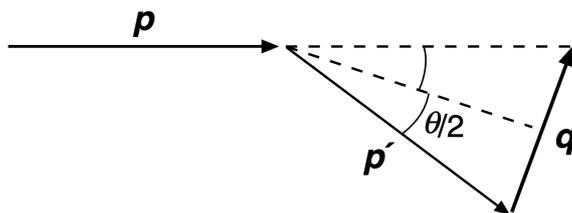
L'elemento di matrice è quindi:

$$\mathcal{M}_{fi} = \langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle = \frac{e}{V} \int e^{-i\bar{p}' \cdot \bar{r} / \hbar} \Phi(\bar{r}) e^{i\bar{p} \cdot \bar{r} / \hbar} d\bar{r}$$

Se l'impulso trasferito $\bar{q} = \bar{p} - \bar{p}'$ allora:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{e}{V} \int \Phi(\bar{r}) e^{i\bar{q} \cdot \bar{r} / \hbar} d\bar{r}$$

Inoltre si può vedere che:



$$|\bar{q}| = 2 \cdot |\bar{p}| \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad |\bar{p}'| = |\bar{p}| \quad (1 - \cos\theta) = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

allora:

$$|\bar{q}|^2 = |\bar{p}'|^2 + |\bar{p}|^2 - 2|\bar{p}||\bar{p}'|\cos\theta = 2|\bar{p}|^2(1 - \cos\theta) = 4|\bar{p}|^2 \sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (6.8)$$

Nel caso della diffusione di carica non puntiforme, ma con simmetria sferica, il potenziale è:

$$V(\bar{r}) = \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r} - \bar{r}'|} dr'$$

con $\rho(\bar{r}')$ densità di carica.

Per poter calcolare $\frac{d\sigma}{d\Omega}$ è necessario calcolare l'elemento di matrice \mathcal{M}_{fi} . Per poterlo fare prima però è necessario calcolare il seguente integrale passando per prima cosa in coordinate sferiche con angolo polare α compreso tra \bar{q} e \bar{x}

$$\begin{aligned} \int \frac{e^{i\bar{q} \cdot \bar{r}}}{r} d\bar{r} &= \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin\alpha d\alpha \int_0^\infty \frac{r^2}{r} e^{iqr \cos\alpha} dr \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\alpha) \int_0^\infty \frac{r^2}{r} e^{iqr \cos\alpha} dr \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 d(\cos\alpha) e^{iqr \cos\alpha} \int_0^\infty r dr \\ &= 2\pi \int_0^\infty r \frac{\hbar}{iqr} (e^{i\frac{qr}{\hbar}} - e^{-i\frac{qr}{\hbar}}) dr \\ &= 4\pi \left(\frac{\hbar}{q}\right)^2 \int_0^\infty \sin x dx, \quad (*) \quad x = \frac{qr}{\hbar} \end{aligned}$$

messo così l'integrale diverge, ma si può usare un trucco ricorrendo all'integrazione su cammini complessi: ovvero inserisco un esponenziale $e^{-\lambda x}$ che integro tra 0 e ∞ sfruttando poi l'integrazione su cammini complessi ottengo il risultato

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-\lambda x} \sin x dx &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty [e^{(i-\lambda)x} - e^{-(i+\lambda)x}] dx \\ &= -\frac{1}{2i} \left(\frac{1}{i-\lambda} + \frac{1}{i+\lambda} \right) = \frac{1}{1+\lambda^2}\end{aligned}$$

questa trucco potrebbe avere problemi dal punto di vista matematico perciò come si fa per gli integrali generalizzati vediamo i valori ai suoi estremi (punti che potrebbero creare problemi)

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{1+\lambda^2} = 1 \qquad \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{1+\lambda^2} = 0$$

Avendo fatto questo conto l'elemento di matrice è quindi:

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{fi} &= \langle \psi_f | \mathcal{H}_{\text{int}} | \psi_i \rangle \\ &= \frac{e}{V} \int e^{-i\frac{\bar{p}'r}{\hbar}} V(\bar{r}) e^{i\frac{\bar{p}r}{\hbar}} d\bar{r} \\ (1) &= \frac{e}{V} \int V(\bar{r}) e^{i\frac{\bar{q}r}{\hbar}} d\bar{r} \\ (2) &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i\frac{\bar{q}r}{\hbar}} d\bar{r} \int \frac{\rho(\bar{r}')}{|\bar{r}-\bar{r}'|} d\bar{r}' \\ (3) &= \frac{zZe^2}{4\pi\epsilon_0 V} \int e^{i\frac{\bar{q}D}{\hbar}} \frac{1}{D} d\bar{D} \int \rho(\bar{r}') e^{i\frac{\bar{q}r'}{\hbar}} d\bar{r}' \\ (4) &= \frac{zZe^2}{\epsilon_0 V} \frac{\hbar^2}{|\bar{q}|^2} \int \rho(\bar{r}') e^{i\frac{\bar{q}r'}{\hbar}} d\bar{r}'\end{aligned}$$

(1) con l'**impulso trasferito** $\bar{q} \equiv \bar{p} - \bar{p}'$ (2) ponendo $\bar{D} = \bar{r} - \bar{r}'$ ci calcoliamo

(3) usando il trucco matematico di prima, ci si pone un dubbio però: ha senso? Stiamo considerando un potenziale che tende a 0 con andamento $1/r$, quindi avrei problemi nell'estremo di integrazione 0, ma come visto prima in 0 non ho problemi e lo possiamo interpretare nella realtà con le apparecchiature che schermano il potenziale facendo andare l'integrale a 0 più rapidamente di $1/r$. Il caso è applicabile per qualsiasi sfera di raggio R perché siccome $R \propto V^{1/3}$ con V volume, se faccio tendere $R \rightarrow \infty$ allora si ha che $\lambda \simeq 1/R$ dunque $\lambda \rightarrow 0$

(4) l'integrale che sostituisco è

$$\int e^{i\frac{\bar{q}D}{\hbar}} \frac{1}{D} d\bar{D} = 4\pi \left(\frac{\hbar}{q} \right)^2 \int_0^\infty \sin x dx$$

con

$$F(\bar{q}) = \int \rho(\bar{r}') e^{i\frac{\bar{q}r'}{\hbar}} d\bar{r}' \quad (6.9)$$

che è la trasformata di Fourier della distribuzione della densità di carica elettrica ed è chiamato **fattore di forma** della distribuzione di carica.

Questo fattore contiene tutte le informazioni riguardanti la distribuzione spaziale di carica

dell'oggetto in esame.

Nel calcolo della sezione d'urto di Rutherford si assume che la distribuzione di carica sia puntiforme, per cui:

$$\mathcal{M}_{fi} = \frac{zZe^2 \hbar^2}{\varepsilon_0 V |\vec{q}|^2}$$

da cui ottengo la sezione d'urto da (*) e (6.8):

$$\begin{aligned} \left(\frac{dr}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} &= \frac{V^2 E'^2}{(2\pi)^2 (\hbar c)^4} |\mathcal{M}_{fi}|^2 \\ &= \left(\frac{zZe^2}{16\pi\varepsilon_0} \right)^2 \frac{4E'^2}{p^4 c^4} \frac{1}{\sin^4 \left(\frac{\theta}{2} \right)} \end{aligned}$$

Nel limite relativistico: $E' = |\vec{p}'| \cdot c$ (con $|\vec{p}'| = |\vec{p}|$); si ottiene la formula relativistica della diffusione di Rutherford:

$$\left(\frac{dr}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{zZe^2}{8\pi\varepsilon_0 E'} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}}$$

Invece nel limite non relativistico, per una particella di carica ze che si muove lentamente con impulso $p = mv$ e $E_{\text{cin}} = \frac{mv^2}{2}$, avendo posto $E' = mc^2 \gamma$ con $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \simeq 1$, allora si ottiene la formula di Rutherford classica:

$$\left(\frac{dr}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} = \left(\frac{zZe^2}{4\pi\varepsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{(4E_{\text{cin}})^2} \cdot \frac{1}{\sin^4 \frac{\theta}{2}} \quad (6.10)$$

Come si può vedere, la formula iniziale (6.10) non contiene alcun \hbar , per cui il calcolo classico e quantistico coincidono.

6.4 La sezione d'urto di Mott

Abbiamo considerato il caso in cui gli spin dell'elettrone e del bersaglio non sono stati considerati.

In realtà ad energie relativistiche la sezione d'urto di Rutherford è alterata da effetti di spin.

La **sezione d'urto di Mott** descrive la diffusione di elettroni relativistici e include gli effetti dovuti allo spin dell'elettrone:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \left[1 - \beta^2 \sin^2 \left(\frac{\theta}{2} \right) \right], \quad \beta = \frac{v}{c}$$

se trascuro il rinculo del bersaglio.

Quindi, ad energie relativistiche la sezione d'urto di Mott diminuisce più rapidamente di quella di Rutherford al crescere dell'angolo di diffusione.

Nel limite $\beta \rightarrow 1$:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Mott}} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{Rutherford}} \cdot \cos^2 \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

6.5 I fattori di forma nucleari

Come visto nella (6.9) l'estensione spaziale del nucleo è descritta dal fattore di forma, che viene indicato come $F(\vec{q}^2)$.

Il valore assoluto del fattore di forma è determinato sperimentalmente dal rapporto tra la sezione d'urto misurata e quella di Mott:

$$|F(\vec{q}^2)|^2 = \frac{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{sp}}{\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott}}$$

Infatti i due valori non coincidono e $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{sp}$ solo se $|\vec{q}| \rightarrow 0$.

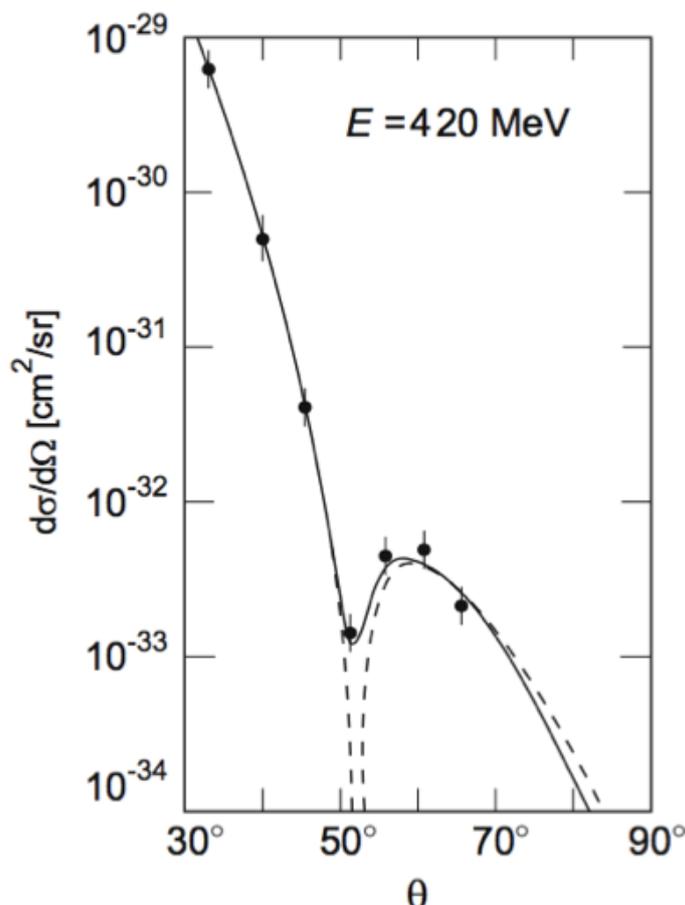
Per valori più grandi di impulso trasferito $|\vec{q}|$, $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{Mott} < \left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{sp}$ perché i nuclei e i nucleoni hanno estensione spaziale non nulla, fatto che non viene considerato nella sezione d'urto di Mott.

Per misurare i fattori di forma, si misura la sezione d'urto ad energia fissata del fascio, ma per diversi angoli di diffusione e quindi diversi $|\vec{q}|$, si divide poi per il valore calcolato della sezione d'urto di Mott.

6.5.1 Esempi di fattori di forma

Misura del fattore di forma del ^{12}C utilizzando la diffusione di elettroni presso l'acceleratore lineare della Stanford University in California.

In figura si vede la sezione d'urto differenziale misurata con energia del fascio fissa di 420 MeV e a 7 angoli di diffusione differenti.



La rapida diminuzione della sezione d'urto al crescere dell'angolo di diffusione è dovuta alla dipendenza $\frac{1}{|\bar{q}|^4}$ dell'impulso trasferito.

La linea tratteggiata corrisponde alla diffusione di un'onda piana su una sfera omogenea con superficie diffusa (approssimazione di Born).

La figura di diffrazione ha un minimo per $\theta \simeq 51^\circ$ o equivalentemente per $\frac{|\bar{q}|}{\hbar} \simeq 1.8 \text{ fm}^{-1}$. Come abbiamo visto, il fattore di forma è definito come la trasformata di Fourier della distribuzione di carica $\rho(\bar{x})$, per effetti di rinculo trascurabili e in approssimazione di Born:

$$F(\bar{q}^2) = \int e^{i\frac{\bar{q}\bar{x}}{\hbar}} \rho(\bar{x}) d^3x$$

Nei casi a simmetria sferica ρ dipende solo dal raggio $r = |\bar{x}|$, integrando sull'intero angolo solido:

$$F(\bar{q}^2) = 4\pi \int \rho(r) \frac{\sin\left(\frac{|\bar{q}|r}{\hbar}\right)}{\frac{|\bar{q}|r}{\hbar}} r^2 dr$$

dove il fattore di normalizzazione è dato da:

$$\begin{aligned} 1 &= \int \rho(\bar{x}) d^3x \\ &= \int_0^\infty \int_{-1}^{+1} \int_0^{2\pi} \rho(r) r^2 d\Phi d\cos\theta dr \\ &= 4\pi \int_0^\infty \rho(r) r^2 dr \end{aligned}$$

Quindi la distribuzione radiale di carica può essere ottenuta invertendo la trasformata di Fourier del fattore di forma, utilizzando per esso una parametrizzazione in termini di \bar{q}^2 ricavata sperimentalmente:

$$\rho(r) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int F(\bar{q}^2) e^{-i\frac{\bar{q}\bar{x}}{\hbar}} d^3q$$

ma $F(\bar{q}^2)$ può essere misurato solo in un intervallo limitato di valori dell'impulso trasferito $|\bar{q}|$ (energia del fascio è finita ad esempio).

Normalmente si scelgono diverse parametrizzazioni della $\rho(r)$ e da queste si determinano le predizioni per $F(\bar{q}^2)$, variando poi i parametri liberi della parametrizzazione di $\rho(r)$ finché non trovo un buon accordo tra la predizione di $F(\bar{q}^2)$ e quello misurato.

Si può però calcolare analiticamente $F(\bar{q}^2)$ se $\rho(r)$ è descrivibile con funzioni radiali semplici.

1. se $\rho(r)$ puntiforme = $\delta(r)/4\pi \rightarrow F(\bar{q}^2)$ costante = 1.

2. se $\rho(r)$ esponenziale = $(a^3/8\pi)e^{-ar} \rightarrow F(\bar{q}^2)$ dipolare = $\left(\frac{a^2\hbar^2}{1+\bar{q}^2}\right)^2$

3. se $\rho(r)$ gaussiana = $(a^2/2\pi)^{3/2} e^{-a^2r^2/2} \rightarrow F(\bar{q}^2)$ gaussiano = $e^{-\bar{q}^2/2e^2\hbar^2}$

4. se $\rho(r)$ sfera omogenea = $\begin{cases} 3/4\pi R^3 & \text{per } r \leq R \\ 0 & \text{per } r > R \end{cases} \rightarrow F(\bar{q}^2) = 3\alpha^{-3}(\sin\alpha - \alpha\cos\alpha)$
quindi $F(\bar{q}^2)$ è oscillante con $\alpha = |\bar{q}|R/\hbar$.

Tutti i nuclei ad eccezione di quelli più leggeri hanno $F(\bar{q}^2)$ oscillante.

5. se $\rho(r)$ sfera a superficie diffusa $\rightarrow F(\bar{q}^2)$ è oscillante.

$\rho(r)$	$ F(\mathbf{q}^2) $	Example
pointlike	constant	Electron
exponential	dipole	Proton
gauss	gauss	${}^6\text{Li}$
homogeneous sphere	oscillating	-
sphere with a diffuse surface	oscillating	${}^{40}\text{Ca}$

$r \rightarrow$ $|\mathbf{q}| \rightarrow$

Si può vedere che:

- $\rho(r)$ diminuisce non troppo rapidamente con l'aumentare di $r \rightarrow F(\bar{q}^2)$ varia gradualmente con \bar{q}^2
- più estesa è $\rho(r) \rightarrow$ più rapidamente diminuisce $F(\bar{q}^2)$ con \bar{q}^2
- se l'oggetto è piccolo $\rightarrow F(\bar{q}^2)$ decresce meno rapidamente
- nel limite del bersaglio puntiforme (e^-) $\rightarrow F(\bar{q}^2) = 1$ costante

La diffusione su bersagli con bordi netti produce figure di diffrazione ben definite con caratteristici massimi e minimi.

Per il caso della sfera omogenea il minimo di diffrazione è: $\frac{|\bar{q}| \cdot R}{h} \simeq 4.5$.

Per l'esempio 6.5.1, il minimo di $\frac{d\sigma}{d\omega}$ e quindi quello di $F(\bar{q}^2)$ è $\frac{|\bar{q}|}{h} \simeq 1.8 \text{ fm}^{-1}$ quindi $R_{C^{12}} \simeq 4.5 \frac{h}{|\bar{q}|} \simeq 2.5 \text{ fm}$.

Capitolo 7

La forza nucleare

7.1 Proprietà della forza nucleare

Alcune proprietà le possiamo già dedurre:

1. A corto raggio, è più forte della forza di Coulomb, La forza nucleare supera la repulsione Coulombiana dei protoni.
2. A lungo raggio, all'ordine del raggio atomico, diventa trascurabile e le interazioni tra nuclei in una molecola possono essere comprese solo usando la forza di Coulomb.
3. Alcune particelle sono immuni dalla forza nucleare, come ad esempio gli elettroni.

Allora sperimentalmente si trovano diverse altre proprietà:

4. **Indipendenza dalla carica:** la forza nucleare non dipende dal fatto che ci sia interazione tra neutroni o tra protoni, in prima approssimazione. Ciò significa che le tre forze nucleari nn, pp e np sono identiche dopo aver corretto per l'effetto della forza di Coulomb nel caso pp.

5. La forza nucleare dipende dal fatto che gli spin dei nucleoni siano paralleli o anti-paralleli.

Questo si deduce dall'osservazione che non si trova stato legato di singoletto del deutone e dal fatto che ci sono differenze tra le sezioni d'urto di singoletto e tripletto.

Questi effetti di spin devono essere tenuti in considerazione nel potenziale con un termine aggiuntivo che dipende dallo spin dei singoli nucleoni \bar{s}_1 e \bar{s}_2 .

Sperimentalmente si ottiene che il potenziale internucleare è invariante per **parità** ($\bar{r} \rightarrow -\bar{r}$) e **tempo** ($t \rightarrow -t$).

Il momento angolare è invariante per operazioni di inversione di parità poiché è un vettore assiale.

L'invarianza per inversione temporale ha invece alcune implicazioni. Invertendo il tempo, tutte le operazioni sono invertite.

Termini come \bar{s}_1 , \bar{s}_2 o anche combinazioni lineari: $A\bar{s}_1 + B\bar{s}_2$ nel potenziale violerebbero l'invarianza per inversione temporale e quindi non possono far parte del potenziale nucleare. Termini come \bar{s}_1^2 , \bar{s}_2^2 o $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2$ sono invarianti e sono quindi permessi.

Il primo termine che coinvolge gli spin di entrambi i nucleoni è $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2$, lo valutiamo per stati di singoletto e tripletto e per far ciò valutiamo lo spin totale $\bar{S} = \bar{s}_1 + \bar{s}_2$:

$$\bar{S}^2 = \bar{S} \cdot \bar{S} = (\bar{s}_1 + \bar{s}_2) \cdot (\bar{s}_1 + \bar{s}_2) = \bar{s}_1^2 + \bar{s}_2^2 + 2\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2$$

quindi: $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 = \frac{1}{2}(\bar{S}^2 - \bar{s}_1^2 - \bar{s}_2^2)$

In meccanica quantistica, il valore atteso $\bar{s}^2 = \hbar^2 s(s+1)$

$$\langle \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \rangle = \frac{1}{2}[S(S+1) - s_1(s_1+1) - s_2(s_2+1)]^2$$

con spin dei nucleoni $s_1 = s_2 = \frac{1}{2}$, per il tripletto di spin $S=1$:

$$\langle \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \rangle = \frac{1}{2}\left[1(1+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]\hbar^2 = \frac{1}{4}\hbar^2$$

e per il singoletto $S=0$:

$$\langle \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 \rangle = \frac{1}{2}\left[0(0+1) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right) - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\right]\hbar^2 = -\frac{3}{4}\hbar^2$$

quindi una componente $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2 V_s(\bar{r})$ può essere inclusa nel potenziale e darà effetti diversi a seconda degli stati di singoletto e tripletto:

$$V(r) = -\left(\frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{\hbar^2} - \frac{1}{4}\right)V_1(r) + \left(\frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{\hbar^2} + \frac{3}{4}\right)V_3(r)$$

6. La forza nucleare include un termine repulsivo, che mantiene i nucleoni ad una certa distanza di separazione.

Questo fatto segue da alcune osservazioni qualitative sulla densità nucleare.

Aggiungendo più e più nucleoni, il nucleo cresce pur sempre mantenendo la sua densità centrale costante e quindi qualcosa fa sì che i nucleoni non si sovrappongono. Per tenere in conto del core repulsivo (nocciolo repulsivo) si deve quindi modificare il potenziale.

Se scelgo ancora un potenziale quadrato per semplificare i conti, allora:

$$\begin{cases} V(r) = +\infty & r < R_{\text{nocciolo}} \\ V(r) = -V_0 & R_{\text{nocciolo}} \leq r \leq R \\ V(r) = 0 & r > R \end{cases} \quad (7.1)$$

e si può aggiustare R_{Nocciolo} fino ad ottenere un valore adeguato, $R_{\text{nocciolo}} \simeq 0.5 \text{ fm}$ funziona bene.

7. La forza nucleare ha una componente non centrale che non conserva il momento angolare orbitale, che è una costante del moto per potenziali centrali.

Il fatto che esiste un potenziale non centrale deriva dall'osservazione del momento di quadrupolo nello stato fondamentale del deutone.

Una funzione d'onda di tipo $s(l=0)$ ha simmetria sferica e il momento di quadrupolo elettrico svanirebbe.

Funzioni d'onda con stati misti di l devono originare da potenziali non centrali.

Per un nucleone singolo la scelta di una certa direzione spaziale è arbitraria, infatti un nucleone non distingue nord, sud, destra e sinistra.

L'unica direzione di riferimento è il suo spin e quindi solo le componenti della forma $\bar{s}_1 \cdot \bar{r}$ o $\bar{s}_1 \times \bar{r}$ che relazionano \bar{r} ad \bar{s} contribuiscono.

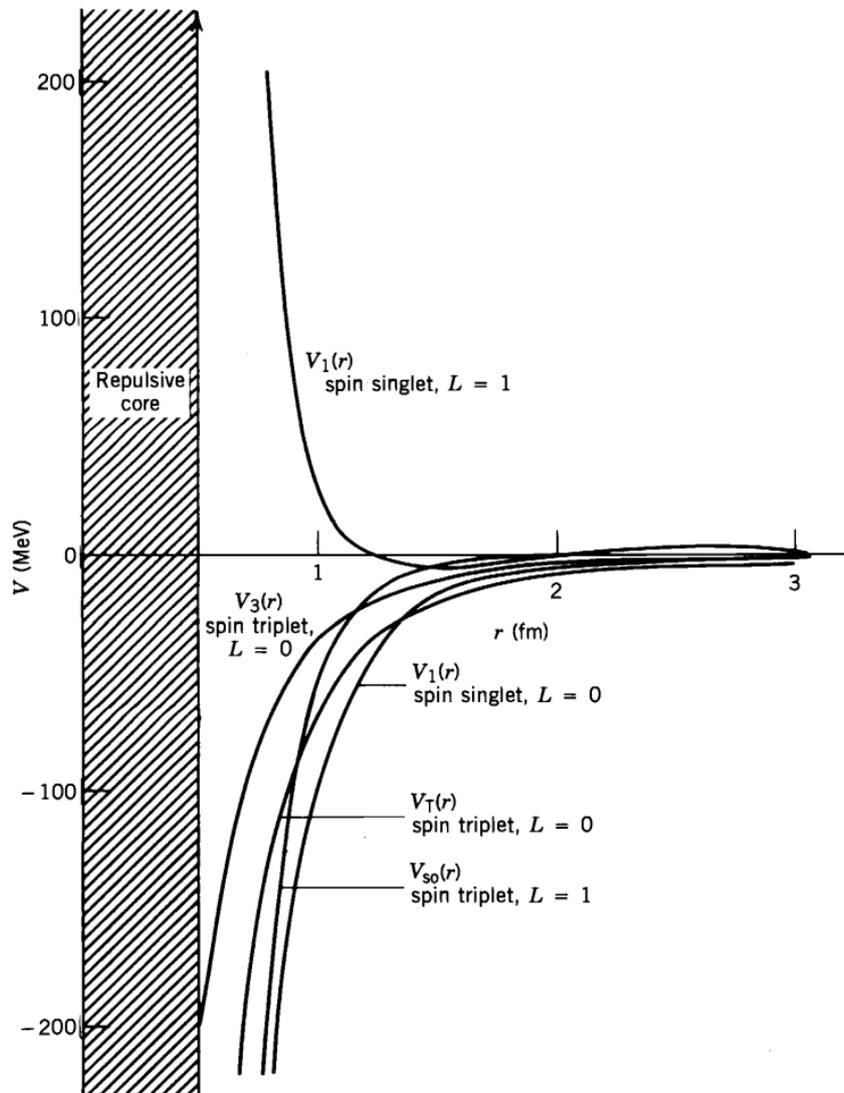
Per soddisfare l'invarianza per parità devo avere termini pari \bar{r} , quindi per due nucleoni devo avere termini:

$$(\bar{s}_1 \cdot \bar{r})(\bar{s}_2 \cdot \bar{r}) \quad \text{o} \quad (\bar{s}_1 \times \bar{r})(\bar{s}_2 \times \bar{r})$$

Il secondo termine può essere scritto in termini del primo con il termine addizionale $\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2$, già incluso in $V(r)$.

Quindi il termine tensoriale aggiuntivo sarà della forma $V_T(r)S_{12}$, con $V_T(r)$ che dà alla forza la dipendenza radiale e $S_{12} = 3(\bar{s}_1 \cdot \bar{r})(\bar{s}_2 \cdot \bar{r})/r^2 - \bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2$, che dà il carattere tensoriale della forza che vale in media 0 se sommo su tutti gli angoli.

A questo punto si possono definire una serie di potenziali fenomenologici $V(r)$ che sono in buon accordo con le osservazioni sperimentali e possono essere usati nei calcoli per nuclei più complessi.



In questo esempio, sono inclusi i potenziali attrattivi che contribuiscono all'onda s , sia di singoletto che tripletto e il potenziale repulsivo dell'onda p ($l = 1$).

E' incluso anche il termine tensoriale attrattivo. Tutti i potenziali hanno un termine repulsivo a $r = 0.49$ fm.

7.2 Il modello della forza di scambio

I potenziali fenomenologici discussi nelle sezioni precedenti hanno aiutato notevolmente nel comprendere le proprietà misurate dell'interazione nucleare.

Ovviamente, aggiungendo più termini ai potenziali le predizioni dell'interazione sarebbero migliorate.

Ad esempio, si sarebbe potuto includere un termine di secondo ordine nella dipendenza dal momento $\propto l^2$, oppure avremmo potuto scrivere potenziali diversi per ogni l e così via.

In questo modo però avremmo perso di vista l'obiettivo principale che è la comprensione dell'interazione nucleo-nucleo.

L'obiettivo principale è quindi quello di postulare un meccanismo fisico che sia in accordo con i potenziali che abbiamo visto essere in accordo con quelli calcolati precedentemente.

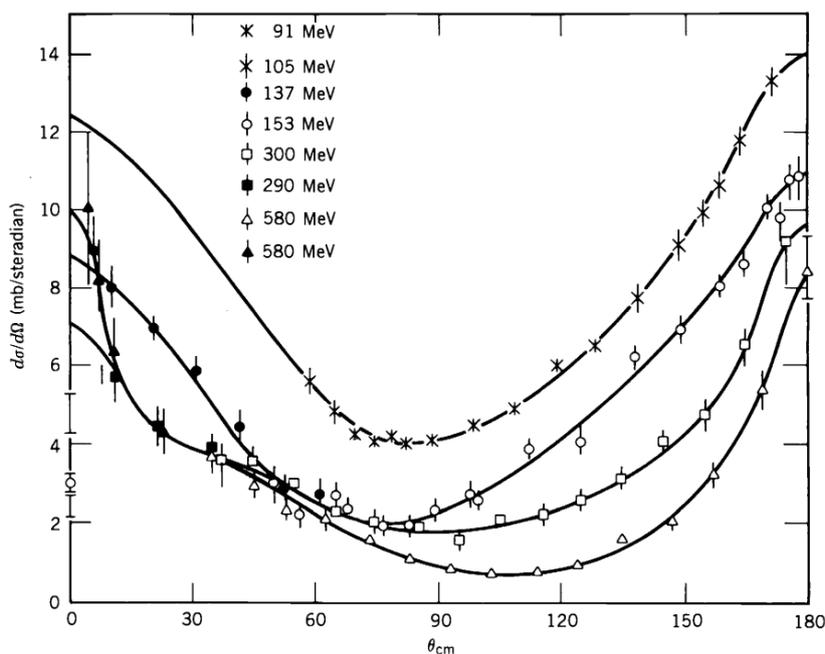
Un meccanismo funzionante è quello della **forza di scambio**.

Questo meccanismo trova due fattori a suo favore:

1. la saturazione della forza nucleare. Questo fatto trova evidenza nella costante della densità nucleare e della energia di legame per nucleone mano a mano che ho nuclei più pesanti.

Un nucleone attrae solo un piccolo numero di nucleoni vicini e ha carattere repulsivo a corte distanze.

2. lo scattering np ad alte energie. Se osservo questo scattering, vedo la sezione d'urto differenziale neutrone-protone e ho un picco a 0° gradi in avanti e un picco indietro a 180° .



C'è il picco a 0° che indica un piccolo impulso trasferito tra il proiettile e il bersaglio.

Per piccoli angoli di deflessione $\sin \theta \simeq \theta = \frac{\Delta p}{p}$, con p l'impulso della particella incidente e Δp l'impulso trasverso aggiunto durante la collisione.

Se F è la forza media che agisce in un tempo Δt , allora $\Delta p = F \Delta t$.

La forza $F = -\frac{dV}{dr}$, quindi la forza media deve essere dell'ordine di V_0/R , con V_0 la

profondità del potenziale e R il suo raggio.

Il tempo della collisione $\Delta t \simeq R/v$ con v velocità del proiettile, quindi:

$$\theta \simeq \frac{\Delta p}{p} \simeq \frac{F\Delta t}{p} \simeq \frac{1}{p} \frac{V_0 R}{R v} = \frac{V_0}{pv} = \frac{V_0}{2E_{\text{cin}}}$$

con E_{cin} = energia cinetica del proiettile.

Per le energie mostrate nella figura precedente ($E \simeq 100 - 600 \text{ MeV}$) si ottengono angoli $\theta \leq 10^\circ$.

Certamente non è atteso un picco a 180° . La spiegazione più ovvia è da trovarsi nel fatto che è una forza di scambio: il neutrone che si muove in avanti, diventa un protone che si muove all'indietro, mentre il protone diventa un neutrone.

Quindi qualcosa viene scambiato tra i nucleoni e scambia le loro caratteristiche.

Secondo la meccanica quantistica tutti gli scambi energetici devono avvenire in quanti discreti.

I campi classici sono continui, invece, quindi per avere un accordo tra la teoria dei campi e la meccanica quantistica i campi devono essere quantizzati.

Quindi il primo oggetto emette quanti di campo, il secondo oggetto può quindi assorbire questi quanti di campo.

I due oggetti interagiscono quindi con i quanti di campo scambiati e indirettamente tra loro.

Se un neutrone di spin $\frac{1}{2}$ diventa un protone di spin $\frac{1}{2}$ allora la particella scambiata deve avere spin intero 0 o 1 e deve avere carica elettrica.

Inoltre se voglio applicare lo stesso formalismo alle interazioni nn e pp le particelle scambiate devono avere anche un tipo neutro.

Facciamo allora una stima della massa della particella di scambio. Se un nucleone, N , emette una particella x che viene poi assorbita da un secondo nucleone:

$$N_1 \rightarrow N_1 + x \quad x + N_2 \rightarrow N_2$$

com'è possibile che un nucleone emetta una particella di energia $m_x c^2$ pur rimanendo un nucleone, senza violare la conservazione dell'energia? Non è possibile!

A meno che l'emissione e l'assorbimento avvengono in un periodo di tempo Δt in cui non si può sapere se c'è stata una violazione di energia.

I nostri limiti per misurare l'energia sono legati al principio di indeterminazione, se $\Delta t < \frac{\hbar}{m_x c^2}$ non siamo a conoscenza di un'eventuale violazione di energia per un'energia pari a $\Delta E = m_x c^2$.

Il range massimo di una forza è determinato dalla distanza massima che la particella x può attraversare in un tempo Δt .

Se si muove ad una velocità $\simeq c$ allora il range R sarà:

$$R = c\Delta t = \frac{\hbar c}{m_x c^2} = \frac{200 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{m_x c^2}$$

Per forze nucleari del range di 1 fm, devo avere particelle con energia di massa $\simeq 200 \text{ MeV}$.

Queste particelle che esistono solo per un istante Δt e violano la conservazione dell'energia sono dette **virtuali**.

Possiamo osservare la forza che risulta da queste particelle virtuali, ma non le particelle stesse durante lo scambio.

Le particelle di scambio che trasportano la forza nucleare sono chiamate **mesoni**.

Il più leggero dei mesoni, il **pione** (π), è responsabile della maggior parte del potenziale nucleare a raggio più lungo (1 – 1.5 fm).

Per soddisfare tutti i bisogni delle interazioni nucleari ci devono essere almeno tre pioni con cariche +1, 0 –1.

I pioni hanno spin 0 e energia a riposo 139.6 MeV (per π^\pm) e 135.0 MeV (per π^0).

A raggi più corti (0.5 – 1 fm) lo scambio di due pioni è probabilmente responsabile del legame nucleare.

A distanze più corte (0.25 fm) lo scambio di mesoni ω ($mc^2 = 783 \text{ MeV}$) può contribuire al core repulsivo, mentre lo scambio di mesoni ρ ($mc^2 = 769 \text{ MeV}$) potrebbe dare la parte spin orbita dell'interazione.

Il pione singolo scambiato tra due nucleoni identici deve essere un π^0 :

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + n_2 \rightarrow n_2$$

o

$$p_1 \rightarrow p_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2$$

Lo scambio di un pione carico non funzionerebbe:

$$n_1 \rightarrow p_1 + \pi^- \quad \text{ma } \pi^- + n_2 \rightarrow ?$$

$$p_1 \rightarrow n_1 + \pi^+ \quad \text{ma } \pi^+ + p_2 \rightarrow ?$$

perché non ci sono nucleoni con carica -1 o +2 (ci sono stati eccitati, ma non contribuiscono agli esperimenti alle basse energie che abbiamo visto precedentemente).

Ma l'interazione neutrone-protone può avvenire con pioni carichi e neutri:

$$n_1 \rightarrow n_1 + \pi^0 \quad \pi^0 + p_2 \rightarrow p_2$$

$$n_1 \rightarrow p_1 + \pi^- \quad \pi^- + p_2 \rightarrow n_2$$

la teoria della forza nucleare con mesoni di scambio fu teorizzata da Yukawa nel 1935.

Lo scambio di mesoni può essere caratterizzata da un potenziale della forma $\frac{e^{-r/R}}{r}$, dove R è il range della forza. $R = \frac{\hbar}{m_\pi c^2} = 1.5 \text{ fm}$ per pioni.

Le forze sono basate quindi sullo scambio di mesoni che possono essere prodotti in laboratorio e studiati.

I fisici delle particelle osservano una grande varietà di mesoni da collisioni ad alta energia negli acceleratori.

I fisici nucleari possono poi scegliere da questa lista di mesoni candidati a contribuire ai vari dettagli della interazione nucleare.

In ogni caso, a distanze più ridotte dove la struttura dei nucleoni non può più essere trascurata una descrizione in termini di scambio di mesoni non è più accurata.

La parte repulsiva del potenziale è descritta nell'ambito di un modello a quark.

A grandi distanze di separazione i dati sperimentali sono riprodotti in maniera eccellente dai modelli con scambio di pioni.

A distanze intermedie bisogna ricorrere ad ottimizzazioni. Si vede come è possibile risalire alla natura della forza nucleare quindi a partire dai costituenti fondamentali della materia.

Tuttavia non è possibile descrivere quantitativamente la forza nucleare perché si dovrebbe conoscere la probabilità che le coppie quark-antiquark che costituiscono i mesoni si

trasformino in mesoni all'interno del nucleo.

Questi calcoli sono teoricamente impossibili dato che la costante di accoppiamento α_s è molto grande per piccoli impulsi trasferiti. Per questo motivo i modelli fenomenologici basati sullo scambio di mesoni sono tutt'oggi il modo migliore per descrivere quantitativamente la forza nucleare.

Oggi i fisici delle particelle sono concentrati principalmente in 2 direzioni:

1. da una parte cercano di capire se il modello standard delle particelle elementari nella sua forma attuale sia davvero una teoria fondamentale o solo una teoria *efficace*, in base alla risoluzione sperimentale (esperimenti a scopo generale del CERN, *i.e.* ATLAS & CMS).
2. dall'altra sono impegnati a migliorare la comprensione dei sistemi complessi regolati dall'interazione forte.

Capitolo 8

Fisica nucleare relativistica

8.1 La storia dell'Universo

Lo studio della cosmologia e della fisica delle particelle ha portato a scoperte incredibili nelle decadi passate, per entrambe le discipline.

Nel seguito verranno illustrate le idee presenti sull'evoluzione dell'Universo, mostrando quali sono le conseguenze per la fisica delle particelle moderna.

Si userà il modello cosmologico standard, secondo il quale l'Universo è iniziato in una forma molto calda e densa.

Questa palla di fuoco si è poi espansa e la sua temperatura e densità sono diminuite fino a quelle di oggi.

Quindi particelle elementari, leptoni, quark, nucleoni, nuclei, atomi, molecole, stelle e galassie si formarono a partire da questo plasma caldo.

Questo modello di formazione dell'universo è confermato da due osservazioni sperimentali importanti: la continua espansione dell'Universo e la radiazione cosmica di fondo.

Intanto a 10^{10} anni fa, l'Universo era concentrato in una regione spaziale infinitesima, con densità e temperatura molto alte.

Al $t = 0$ avvenne il Big Bang e da questo si possono dividere gli step successivi in due fasi:

1. **Universo molto primordiale:** le condizioni dell'Universo erano estreme, quindi le fasi di questo periodo sono ipotetiche e vanno prese *cum grano salis*.
2. **Universo primordiale:** l'Universo era riempito con un plasma di quark e gluoni (QGP).
Dopo questo momento possiamo accedere a ciò che avvenne grazie agli esperimenti alle alte energie

8.1.1 Universo molto primordiale

- a) **Epoca di Planck:** $t < 10^{-43}s$. Oltre la scala di energia dell'ordine della massa di Planck (10^{19} GeV) l'Universo poteva essere dominato dalla gravità quantistica.
- b) **Epoca della grande unificazione:** $t < 10^{-36}s$. In quest'epoca si crede che tutte le (anti)particelle e i bosoni di Gauge si potessero trasformare le une nelle altre liberamente: quindi si crede non ci fosse alcuna differenza tra quark e leptoni dunque l'intensità delle forze poteva essere la stessa quindi forza elettromagnetica, debole e forte potevano essere unificate.

- c) **Epoca elettrodebole:** $t < 10^{-32}s$. La temperatura del sistema scende fino al punto in cui si ha una transizione di fase e la forza forte si disaccoppia da quella debole. Si crede che da quel momento l'interazione forte tra quark e leptoni smetta di avvenire.
- d) **Fine dell'epoca elettrodebole:** $t < 10^{-12}s$. Fino a questo momento si crede che i bosoni fossero privi di massa.

8.1.2 Universo primordiale

- a) **Epoca dei quark e transizione di fase elettrodebole:** a $t \simeq 10^{-12}s$ la temperatura del sistema è di circa $10^{16}k$ che corrispondono a $kT = 1000 GeV$, con $k = 8.617 \times 10^{-5} eV/k$ costante di Boltzmann che ci permette di connettere la temperatura assoluta di un sistema, T , alla sua energia termica, tramite la relazione $E = kT$.

Tutte le particelle che conosciamo possono essere prodotte a 1000 GeV e tutte le specie di particelle dovrebbero esistere in concentrazioni equilibrate.

Ad esempio sia le reazioni di produzione di leptoni:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma + \gamma \rightarrow e^+ + e^- \\ \gamma + \gamma \rightarrow \mu^+ + \mu^- \\ \gamma + \gamma \rightarrow \tau^+ + \tau^- \end{array} \right. \quad \text{devono avvenire con lo stesso tasso di produzione.}$$

In realtà da calcoli sulla radiazione dei buchi neri, si ottenne che la densità di fotoni alla temperatura odierna di 2.7 K è $N_\gamma \simeq 4 \times 10^8 \gamma/m^3$, mentre la densità di nucleoni è $N \simeq 0.4 \text{ nucleoni}/m^3 \simeq 10^{-9}N_\gamma$.

Siccome non ci sono meccanismi che distruggono i nucleoni nelle scale temporali dell'Universo, il modello cosmologico deve tenere in considerazione di questo sbilanciamento tra fotoni e nucleoni.

Sappiamo anche che l'Universo è costituito quasi esclusivamente da materia, con una piccola componente di antimateria.

Ma a $t \leq 10^{-5} - 10^{-6}$ i fotoni avevano abbastanza energia da creare coppie di nucleoni e antinucleoni: $\gamma \rightarrow p + \bar{p}, n + \bar{n}$.

Anche se i quark nudi fossero stati formati, ci aspetteremmo lo stesso numero di nucleoni e antinucleoni.

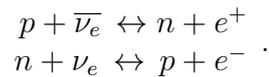
L'equilibrio tra materia e antimateria dovrebbe essere sbilanciato da meccanismi di violazione CP.

Potrebbe essere che nel periodo precedente particelle molto massive avessero prodotto quark e antiquark in maniera sbilanciata.

L'epoca che va da $t \simeq 10^{-12} - 10^{-5}s$ si chiama **epoca dei quark** e nel periodo iniziale per lo meno i protoni erano liberi e non potevano legarsi.

- b) **Epoca degli adroni: formazione degli adroni e plasma di quark e gluoni:** questa epoca va da $t \simeq 10^{-5} - 1s$. Un'altra transizione di fase avvenne quando l'universo era a circa $t \simeq 1\mu s$ con $kT < 1 GeV$ a densità di energia minore dell'energia critica, $\varepsilon \equiv 1 \frac{GeV}{fm^3}$ e temperatura minore di quella critica, $T_{critica} \simeq 170 MeV$. Prima di questo momento quark e gluoni erano liberi nel plasma di quark e gluoni. Con il diminuire della densità di energia e della temperatura gli adroni cominciarono a formarsi.

Le interazioni deboli avvengono in entrambe le direzioni:



con n e p in egual numero. A $t \simeq 10^{-2} s$, $kT \simeq 10 \text{ MeV}$, rimangono solo gli e^- con $\mu : mc^2 \simeq 105 \text{ MeV}$ e $\tau : mc^2 \simeq 1780 \text{ MeV}$ quindi non ne posso produrre di nuovi perché gli altri sono già decaduti.

I neutrini di tutte le specie vengono creati tramite interazioni deboli neutre.

Siccome $m_n > m_p$ ho: $N_n/N_p \simeq 0.88$ da calcoli statistici. Da $t \simeq 1 s$ ($kT \simeq 1 \text{ MeV}$) le interazioni tra neutrini smettono di essere importanti e quindi da quel momento i neutrini si espandono nell'Universo.

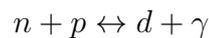
$e^+ + e^- \rightarrow 2\gamma$ è possibile, quindi ho una buona produzione di fotoni.

A questo punto si chiude l'epoca delle interazioni tra particelle e inizia quella delle interazioni nucleari.

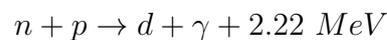
- c) **Epoca della nucleosintesi primordiale degli elementi:** $t \simeq 10 - 10^3 s$. Protoni e neutroni sono legati all'interno di piccoli nuclei atomici.

Congelamento chimico: dopo il decadimento degli adroni non stabili la composizione chimica dell'Universo rimane stabile fino alla formazione delle stelle.

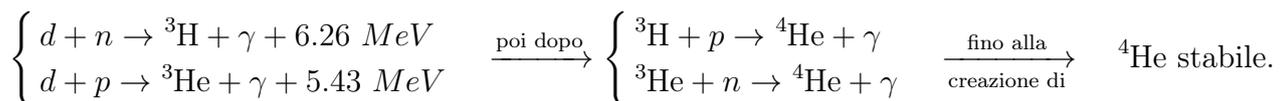
La creazione del deutone era in equilibrio con la sua fotodissociazione:



con il diminuire dei γ con $E_\gamma > 2.22 \text{ MeV}$ (energia di legame del deutone) l'equilibrio si rompe e d viene prodotto in abbondanza:



con conseguenti altre reazioni nucleari:



Il 24% della massa dell'universo è costituita da ${}^4\text{He}$. Si crede che in questa epoca si formarono solo nuclei fino al ${}^7\text{Li}$, i nuclei più pesanti furono creati più avanti all'interno delle stelle.

La fase di nucleosintesi finì circa 30 minuti dopo il Big Bang quando la temperatura divenne così bassa da far sì che la barriera di Coulomb proibisse ulteriori processi di fusione.

- d) **Formazione di atomi neutri:** $t=10s - 380000$ anni. Atomi neutri sono formati da elettroni e nuclei atomici.

A partire da questo momento l'Universo diventa da carico a neutro quindi i fotoni possono attraversare la materia senza essere catturati e l'Universo diventa trasparente alla radiazione elettromagnetica.

Congelamento termico: $T \simeq 3000k$.

Con l'espansione dell'universo, la lunghezza d'onda dei fotoni aumenta (spostamento verso il rosso). Questi fotoni sono rivelati oggi sotto forma di radiazione cosmica di fondo.

e) **Formazione delle prime stelle e galassie:** $t=10^8 - 10^9$ anni

f) **Oggi:** $t \simeq 13.8 \times 10^9$ anni

Concludendo: prima di 380000 anni fa l'Universo era opaco alla radiazione elettromagnetica e quindi non possiamo vederlo \rightarrow lo dobbiamo ricreare in laboratorio per studiare quello che è successo.

In particolare si vuole studiare il plasma di quark e gluoni che è uno stato di quark e gluoni slegati.

Quello che si fa in laboratorio è simulare una transizione di fase dal plasma di quark e gluoni alla materia adronica usando interazioni tra ioni pesanti.

In Natura questa transizione avviene abbassando la temperatura per creare adroni. In laboratorio, invece, si varia la densità della materia ad alta energia/temperatura.

8.2 Cromodinamica quantistica

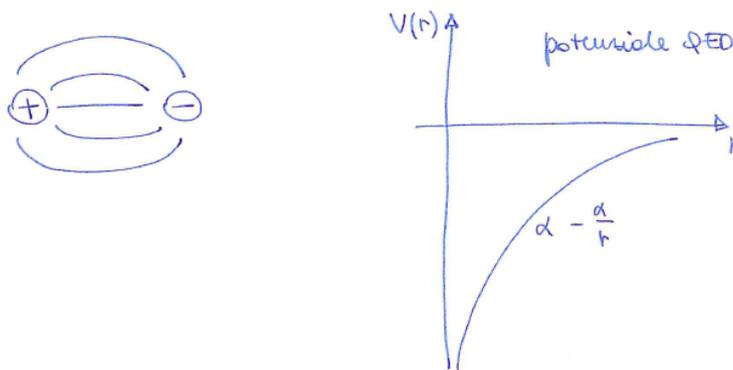
Nella materia ordinaria, i quark e i gluoni sono legati in adroni con carica di colore neutra:

$$\begin{cases} \text{mesoni} & M = q_i \bar{q}_j \quad \text{e} \quad \bar{M} = \bar{q}_i q_j \\ \text{barioni} & B = q_i q_j q_k \quad \text{e} \quad \bar{B} = \bar{q}_i \bar{q}_j \bar{q}_k \end{cases}$$

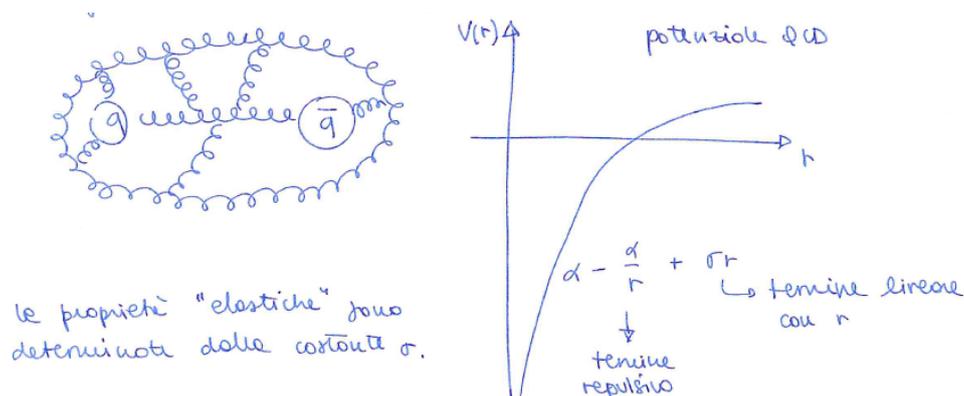
con $i, j, k=1, \dots, 6$

La cromodinamica quantistica (QCD) è basata sul gruppo di simmetria SU(3) che ci dà delle rappresentazioni di tripletto per avere le configurazioni esatte per avere M e B.

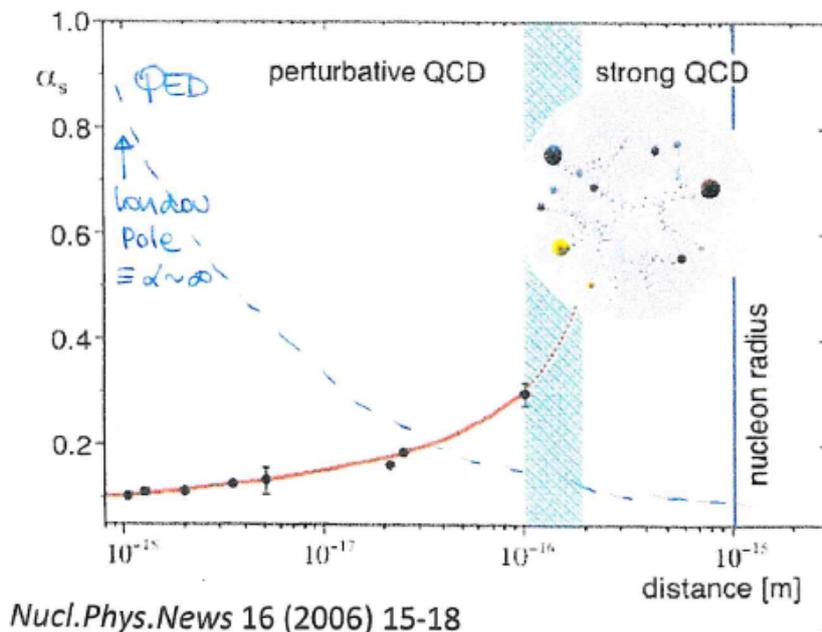
Come si confrontano l'elettrodinamica quantistica (QED) e la QCD? La QED regola le interazioni elettromagnetiche dove è la carica elettrica a giocare un ruolo fondamentale.



Nella QCD ho un termine aggiuntivo che rappresenta i tubi di flusso di colore tra q e \bar{q}



Vediamo le costanti di accoppiamento in funzione della distanza. I punti rappresentano i valori sperimentali e Tevatron ed LHC.



Una piccola distanza rappresenta un grande impulso trasferito, e viceversa.

$$\alpha_s(Q^2) \propto \frac{1}{\ln(Q^2/\Lambda^2)}$$

dove Λ è una costante che definisce la scala ($\alpha_s(m_{Z_0}) \simeq 0.1 \rightarrow \Lambda \simeq 200 \text{ MeV}$)

Sia Q^2 l'impulso trasferito:

- grande Q^2 e piccolo r :
 - collisioni hard \rightarrow QCD perturbativa, si possono usare calcoli precisi fatti per la QED
 - quark sono liberi: **Libertà asintotica** (ciò che avviene nel QGP)
- piccolo Q^2 e r che cresce:
 - collisioni soft \rightarrow si devono utilizzare metodi numerici complicati
 - forza attrattiva cresce
 - quark non possono essere separati: **confinamento** \rightarrow non si possono osservare quark liberi, i quali sono legati negli adroni.

8.3 Collisioni relativistiche tra ioni pesanti

Questo tipo di collisione è una collisione tra due nuclei ad alta energia. Può avvenire al bersaglio fisso o in un collisore.

Durante una collisione di questo tipo, migliaia di particelle nuove vengono prodotte.

Ci sono due possibili opzioni possibili:

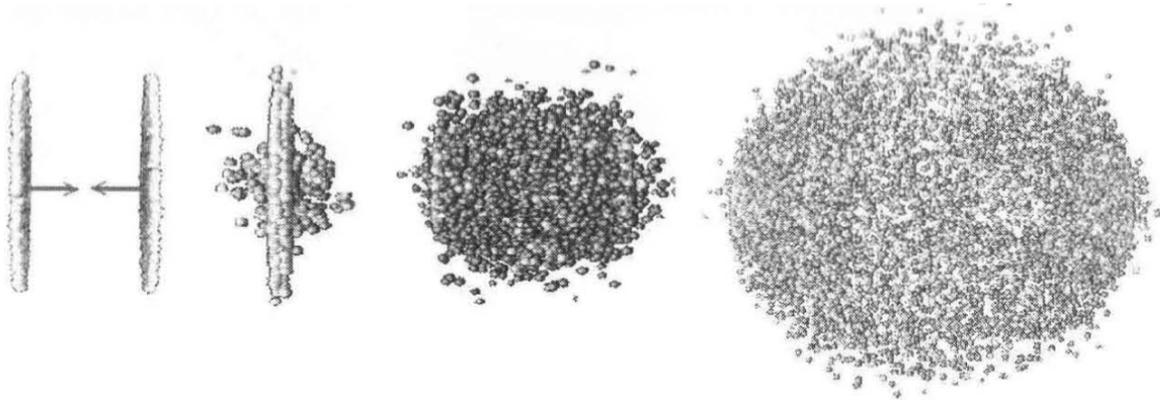
1. i prodotti della collisione derivano da una semplice sovrapposizione di collisione nucleo-nucleo

2. nascono nuovi fenomeni: abbiamo indicazione che questo è quello che succede.

I primi studi su queste collisioni iniziarono negli anni 50. Con l'emergere di nuove idee iniziò a farsi strada l'idea che avviene una transizione di fase in uno stadio in cui quark e gluoni erano liberi invece che combinati all'interno di adroni.

Questo stato della materia ad alte temperature e densità fu chiamato plasma di quark e gluoni (quark-gluon plasma, QGP) ed è lo stesso che si crede si sia formato nei primi microsecondi dopo il Big Bang (Shuryak, 1978).

Si schematizza qui di seguito, come nuclei contratti per contrazione di Lorentz, prima, collisione frontale e creazione della palla di fuoco, e a seguito la palla di fuoco si raffredda fino a raggiungere l'equilibrio termico.



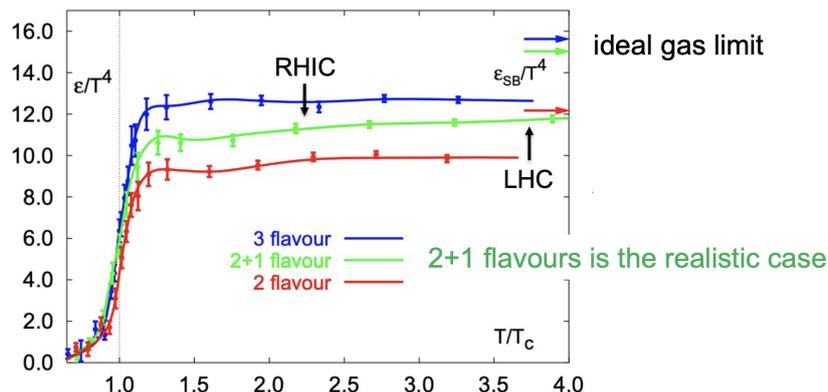
8.4 Transizione di fase della QCD

Come si è visto in precedenza, nella QCD per impulsi trasferiti piccoli, Q^2 , le collisioni sono soffici e per descrivere la teoria ho bisogno di calcoli numerici complessi, un esempio sono i calcoli numerici di QCD al reticolo (lattice QCD, LQCD).

A queste scale ci sono diverse complicazioni nei conti:

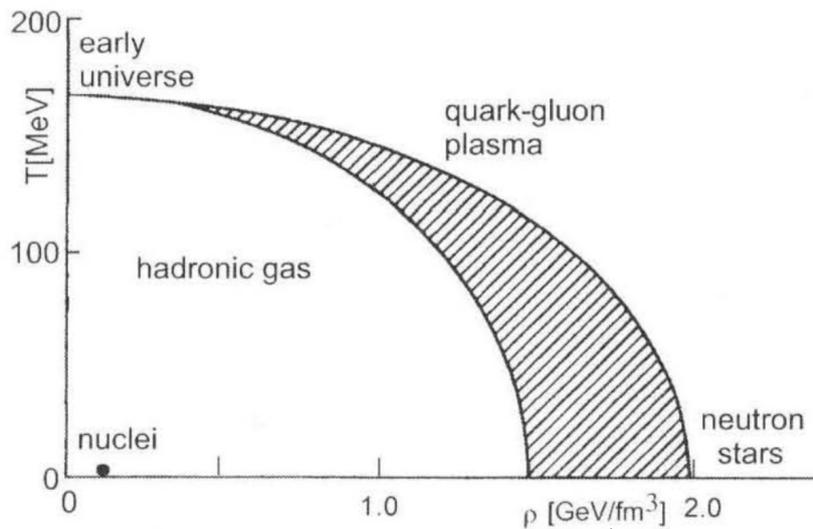
- un grande numero di campi coinvolti
- termini di interazione soft
- α_s diventa grande e non posso più usare espansione in termini di α_s

Secondo questi calcoli di LQCD uno vede che nel raggiungere una temperatura critica $T \simeq T_c \simeq 150 - 180$ MeV la densità di energia ε aumenta di un ordine di grandezza:



- sotto 1: temperatura bassa, densità barionica bassa → gas a bassa densità di adroni confinati
- temperatura aumenta: gli adroni più leggeri (pioni) sono eccitati termicamente
- sopra 1: entrano in gioco moltissimi gradi di libertà (colore, anti-quark, spin,...) ε , pressione e T sono proporzionali ai gradi di libertà in gioco quindi una rapida crescita di ε di circa un ordine di grandezza in un range di temperature molto breve. ε/T^4 non raggiunge ε_{SB}/T^4 che è il limite di Stefan Boltzmann per un gas ideale. Infatti, come si osserva sperimentalmente, il QGP è un liquido quasi perfetto, non un gas.

Guardiamo il diagramma di fase per la materia nucleare ottenuta tramite calcoli LQCD:



i nuclei in condizioni normali hanno $\rho = \rho_0 = \rho_N$ e $kT = 0$. Anche una stella di neutroni ha $kT = 0$, ma ha densità tra $3 \cdot \rho_N$ e $10 \cdot \rho_N$.

Per comprendere la linea della transizione di fase immaginiamo nucleoni ad una densità nucleare normale ρ_N .

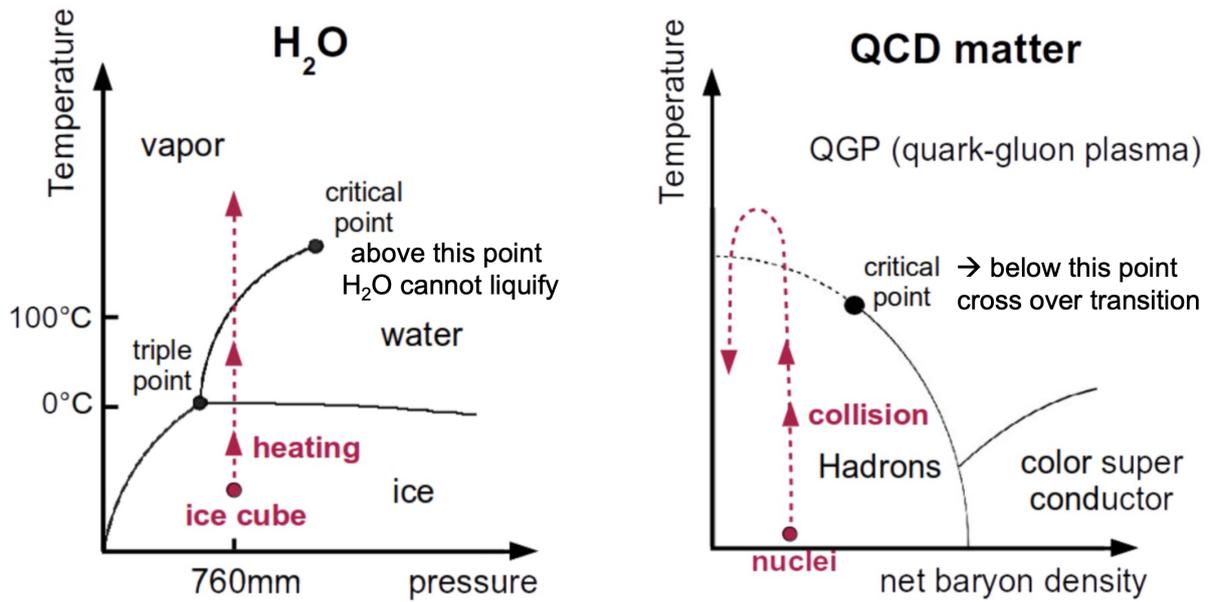
A questo punto comprimo i nucleoni freddi fino ad una densità 20 volte più grande, a questo punto i nucleoni inizierebbero a sovrapporsi e smetterebbero di esistere come particelle distinte.

In queste condizioni, i quark e i gluoni si muoverebbero liberi all'interno del nucleo.

Si può invece seguire una traiettoria lungo la temperatura (aumentando la temperatura e non la densità).

Così facendo si raggiungerebbe $T \simeq 170$ MeV dove le interazioni tra nucleoni singoli avrebbero un'energia sufficiente per aumentare la densità adronica, producendo pioni, e le frequenze di collisioni fino al punto da rendere impossibile assegnare un quark o un gluone ad un adrone in particolare. Questo stato è il QGP.

Qui sotto si può vedere come avvengono le transizioni di fase per l'acqua e per la materia nucleare:

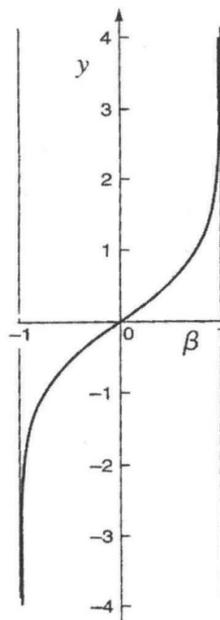


8.5 Calcolo della Densità di Energia

Prima di stimare la densità di energia definiamo alcune quantità utili:

Rapidità :
$$y = \tanh^{-1} \beta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1 + \beta}{1 - \beta} \right)$$

con $\beta = \frac{v}{c}$.



se β è piccolo: $y \simeq \beta$

se $\beta \rightarrow 1$: $y \rightarrow \infty$

Si può anche scrivere che:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_L}{E - p_L} \right)$$

con $p_L \equiv$ impulso longitudinale

Oppure anche:

$$y = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{E + p_L}{m_T} \right)$$

con $m_T \equiv \sqrt{m^2 + p_T^2}$ **massa trasversa**, $m \equiv$ massa a riposo, $p_T \equiv$ impulso trasverso, per una particella ultrarelativistica $E \simeq p$.

Se θ è l'angolo di emissione della particella $\cos \theta = \frac{p_L}{p} \rightarrow E \pm p_L = E(1 \pm \cos \theta)$ e uno può approssimare la rapidità con la **pseudorapidità**:

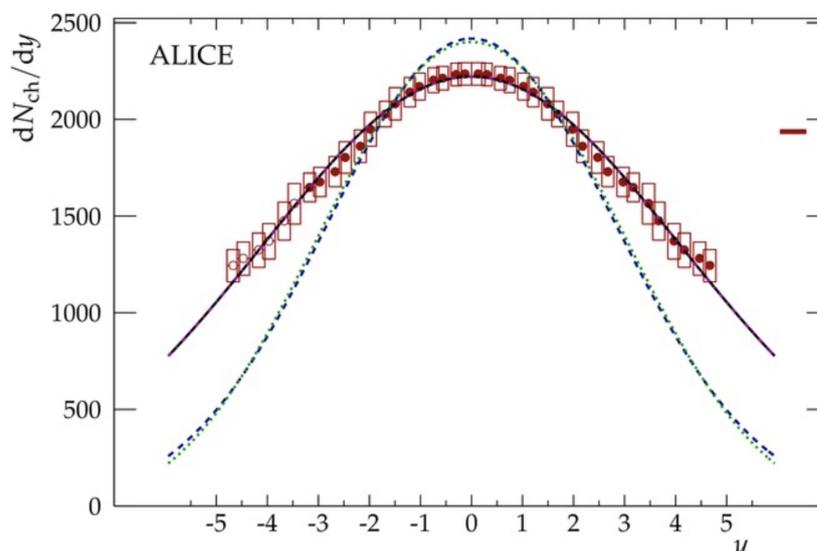
$$\eta = -\ln \tan \left(\frac{\theta}{2} \right)$$

la quale ha il vantaggio di permetterci di misurare distribuzioni di particelle nel centro di massa misurando solo angoli nel sistema di laboratorio.

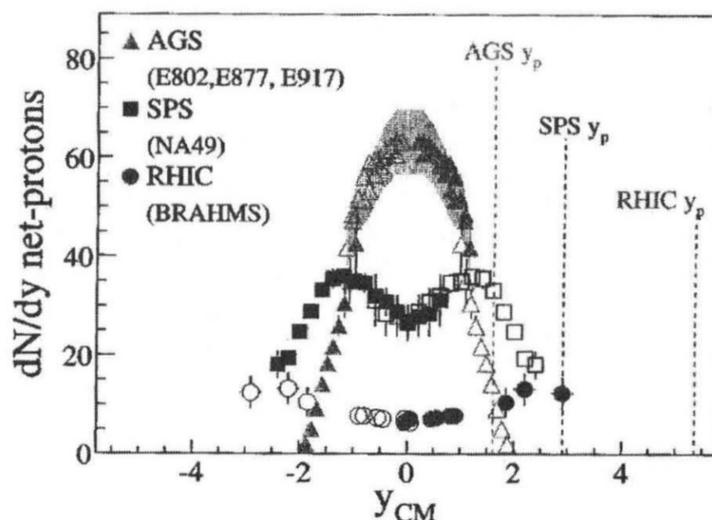
La stima della densità di energia non è semplice. Bjorken sviluppò una relazione tra densità di energia trasversa E_T e la densità di energia iniziale, ε .

Si devono fare tre ipotesi:

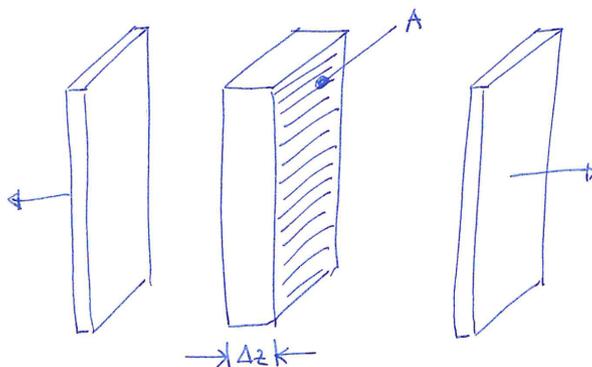
1. rapidamente dopo la collisione il sistema deve raggiungere l'equilibrio termico localmente grazie al fatto che ε (ma anche l'entropia e la densità di particelle) sono alte abbastanza.
2. c'è un plateau nella distribuzione di particelle prodotte a rapidità centrale (misurato sperimentalmente)



3. nella rapidità centrale solo le nuove particelle sono prodotte mentre i barioni si trovano nelle code delle distribuzioni (misurato sperimentalmente)



Stimiamo quindi la densità di energia iniziale, ε , dei due nuclei collidenti.
La regione di studio è una fetta longitudinale di larghezza Δz e area trasversa A :



questa regione contiene particelle con velocità β nell'intervallo:

$$0 \leq \beta_z \leq \frac{\Delta z}{\tau_f}$$

dove τ_f è il tempo di formazione delle particelle.

Il numero di particelle in quella regione è:

$$\Delta N = \int_0^{\frac{\Delta z}{\tau_f}} \frac{dN}{d\beta_z} d\beta_z \simeq \frac{dN}{d\beta_z} \cdot \frac{\Delta z}{T_f} \quad \text{se } \beta_z \rightarrow 0, y \simeq \beta_z$$

$$\Delta N \simeq \frac{dN}{dy} \cdot \frac{\Delta z}{\tau_f} \quad \text{con } \frac{dN}{dy} \text{ una quantità misurabile}$$

$$\langle \varepsilon(\tau_f) \rangle = \frac{E}{V} \simeq \frac{\Delta N \cdot \langle m_T \rangle}{\Delta z \cdot A}$$

siccome $E = m_T \cosh y \simeq m_T$ se $y \simeq 0$:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon(\tau_f) \rangle &= \frac{\Delta z}{\tau_f} \cdot \frac{dN}{dy} \cdot \frac{\langle m_T \rangle}{\Delta z \times A} \\ &= \frac{1}{\tau_f \cdot A} \cdot \langle m_T \rangle \cdot \frac{dN}{dy} \end{aligned}$$

$$\langle \varepsilon(\tau_f) \rangle = \frac{1}{\tau_f \cdot A} \cdot \frac{dE_T}{dy} \quad \text{formula della densità di energia di Bjorken}$$

Calcoliamo ora per una collisione Pb-Pb al LHC:

- $\tau_f \simeq 1 \frac{fm}{c}$ tempo di formazione del QGP
- $A \equiv$ sovrapposizione trasversa dei 2 nuclei se sono identici di raggio R : $A = \pi R^2$ con $R \simeq 7$ fm
- $\langle m_T \rangle \equiv$ valore medio della massa trasversa delle particelle prodotte, misurato come:
 $\langle m_T \rangle \simeq 1 \frac{GeV}{c}$
- $\frac{dN}{dy} \equiv$ densità delle particelle prodotte per unità di rapidità, misurato $\frac{dN}{dy} \simeq 2000$
- $\varepsilon_{Bj} \simeq \frac{1}{1 \frac{fm}{c} \cdot 150 fm^2} \cdot 1 \frac{GeV}{c} \cdot 2000 \simeq 13 \frac{GeV}{fm^3}$

eccede: $\varepsilon_{critica} \simeq 1 \frac{GeV}{fm^3}$ per la transizione di fase a QGP.

I nuovi fenomeni che si osservano nel QGP sono molteplici, ad esempio:

- soppressione di getti di particelle, il mezzo, il QGP, attenua la loro produzione (fenomeno detto jet quenching)
- fenomeni di tipo collettivo originati dalla moltitudine di particelle prodotte e dalle correlazioni tra loro (flusso radiale, flusso ellittico, etc...)
- innalzamento della produzione di particelle con quark strani come conseguenza all'adronizzazione.

Alcuni di questi fenomeni hanno tutt'oggi origine sconosciuta.