

# Raccolta Esami Introduzione alla Fisica Nucleare e Subnucleare

Modulo Fisica Nucleare - Prof. Zaccolo

# Introduzione alla Fisica Nucleare e Subnucleare

Primo appello a.a. 2021/22

Prova scritta 25/06/2021

## Esercizio 1

Il tempo di dimezzamento del protoattinio-231 può essere determinato a partire dal tasso di produzione della disintegrazione  $\alpha$  ( $^{231}\text{Pa} \rightarrow \alpha + ^{227}\text{Ac}$ ) tramite tecniche di calorimetria.

Un campione di  $^{231}\text{Pa}$  metallico purissimo viene immerso in un volume di azoto liquido tale da fermare tutte le particelle  $\alpha$  prodotte. Il metallo si riscalda come conseguenza dell'emissione  $\alpha$  e l'azoto liquido evapora completamente. Si misura, quindi, il tasso di evaporazione generato dal calore e la sua potenza corrispondente.

Il cubetto di  $^{231}\text{Pa}$  utilizzato pesa 142,1 g e la potenza misurata è pari a 0,205 W.

Calcolare la vita media del  $^{231}\text{Pa}$  sapendo che l'energia di decadimento delle sue particelle  $\alpha$  è 5,061 MeV. Nel calcolo dell'energia rilasciata considerare anche il contributo del rinculo del nucleo prodotto.

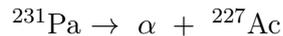
Fattori di conversione:

$$1 \text{ MeV} = 1,60206 \times 10^{-13} \text{ J}$$

$$1 \text{ u} = 1,66 \times 10^{-24} \text{ g}$$

## Soluzione 1

Il decadimento da considerare è il seguente:



Come prima cosa si calcola l'energia di rinculo dell'attinio-227:

$$E_{Ac} = \frac{p_{Ac}^2}{2M_{Ac}} = \frac{p_{\alpha}^2}{2M_{Ac}} = \frac{2M_{\alpha}E_{\alpha}}{2M_{Ac}} = \frac{4}{227}E_{\alpha}$$

quindi l'energia rilasciata per decadimento sarà:

$$E = E_{Ac} + E_{\alpha} = \frac{231}{227}E_{\alpha} = \frac{231}{227} \times 5,061 \text{ MeV} = 5,150 \text{ MeV}$$

Il tasso di decadimento è derivabile quindi dalla potenza e dell'energia rilasciata per decadimento:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{0,205 \text{ W}}{5,150 \text{ MeV} \times 1,60206 \times 10^{-13} \text{ J/MeV}} = 2,485 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$$

Il numero di  $^{231}\text{Pa}$  nel campione è:

$$N = \frac{142,1 \text{ g}}{231 \text{ u} \times 1,66 \times 10^{-24} \text{ g/u}} = 3,71 \times 10^{23}$$

Il tempo di dimezzamento sarà:

$$T_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda} = \frac{N \ln 2}{dN/dt} = \frac{3,71 \times 10^{23} \ln 2}{2,485 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}} = 1,035 \times 10^{12} \text{ s} = 3,28 \times 10^4 \text{ anni}$$

---

## Introduzione alla Fisica Nucleare e Subnucleare

Secondo appello a.a. 2021/22

Prova scritta 01/07/2022

### Esercizio 1

1. Determinare spin, parità e isospin predetti dal modello a shell per gli stati fondamentali dei seguenti nuclidi:  ${}^{15}_6\text{C}$ ,  ${}^{15}_7\text{N}$  e  ${}^{15}_8\text{O}$ ?
2. Ordinare la triade di isobari del punto 1. partendo da quello con la massa più bassa a quello con la massa più alta, giustificando la risposta.
3. Indicare come è possibile stimare abbastanza accuratamente la differenza in energia tra i due isobari con massa più bassa della triade al punto 1.  
Si consideri:

$$R = 1.21 \cdot A^{1/3} \text{ fm}$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\alpha \cdot \hbar c}{e^2} = \frac{197}{137 \cdot e^2} \text{ MeV} \cdot \text{ fm}$$

### Soluzione 1

1. L'isospin dello stato fondamentale di un nucleo è  $I = (Z - N)/2$ , dove  $Z$  e  $N$  sono i protoni e neutroni dentro al nucleo rispettivamente. Nel modello a shell lo spin e la parità sono determinati a partire dall'ultimo nucleone spaiato, quindi:  
 ${}^{15}_6\text{C}$ :  $J^P = (\frac{5}{2}^+)$ , siccome ha un neutrone spaiato in  $1d_{5/2}$ ,  $I = 3/2$   
 ${}^{15}_7\text{N}$ :  $J^P = (\frac{1}{2}^-)$ , siccome ha un protone spaiato in  $1p_{1/2}$ ,  $I = 1/2$   
 ${}^{15}_8\text{O}$ :  $J^P = (\frac{1}{2}^-)$ , siccome ha un neutrone spaiato in  $1p_{1/2}$ ,  $I = 1/2$ .
2. Ordinando i nuclidi da quello con la massa minore a quello con la massa maggiore ottengo:  ${}^{15}_7\text{N}$ ,  ${}^{15}_8\text{O}$ ,  ${}^{15}_6\text{C}$ .  
 ${}^{15}_7\text{N}$  e  ${}^{15}_8\text{O}$  appartengono allo stesso doppietto di isospin. La loro differenza in massa nasce da due fattori: la differenza in energia Coulombiana e la differenza in massa tra neutrone e protone.  
La differenza in energia di Coulomb è la causa dell'ordinamento. Infatti, l' ${}^{15}_8\text{O}$  ha un protone in più rispetto ad  ${}^{15}_7\text{N}$  quindi ha energia di

Coulomb più alta.

Una maggiore repulsione Coulombiana implica una minore energia di legame, risultando in una massa più alta.

Il  ${}^6_6\text{C}$  invece ha molti meno protoni e molti più neutroni, quindi si trova lontano dalla fascia dei nuclei stabili.

Per questo motivo ha energia di legame minore e massa più alta.

3. Considerando i due nuclidi con massa più bassa della triade sopra,  ${}^7_7\text{N}$  e  ${}^8_8\text{O}$ , posso approssimarli a sfere di carica uniforme, ognuna con energia Coulombiana elettrostatica pari a:

$$E_c = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3Q^2}{5R}$$

con  $R$  raggio nucleare.

La differenza in energia sarà quindi:

$$\begin{aligned} [M({}^{15}_8\text{O}) - M({}^{15}_7\text{N})]c^2 &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3}{5R} (Q_O^2 - Q_N^2) - [M_n - M({}^1_1\text{H})]c^2 = \\ &= \frac{197}{137 \cdot e^2} \text{MeV} \cdot \text{fm} \frac{3}{5 \cdot 1.21 \cdot 15^{1/3} \text{fm}} e^2 (8^2 - 7^2) - 0.78 \text{MeV} = \\ &= 3.56 \text{MeV} \end{aligned}$$

---

## Introduzione alla Fisica Nucleare e Subnucleare

**Terzo appello a.a. 2021/22**

**Prova scritta 01/09/2022**

### Esercizio 1

Una pellicola di  ${}^{11}\text{B}$  di massa 0.09 g viene irradiata con neutroni termici e forma  ${}^{12}\text{B}$ . La sezione d'urto di cattura neutronica del  ${}^{11}\text{B}$  è 5.5 mb. Il  ${}^{12}\text{B}$  decade  $\beta^-$  in un elemento stabile, il  ${}^{12}\text{C}$ , con un tempo di dimezzamento di 0.02 s.

La pellicola viene esposta ad un flusso di neutroni stabile di  $3 \times 10^{12}$  neutroni/s·cm<sup>2</sup>.

Trovare dopo quanto tempo si raggiunge l'equilibrio (i.e. quando la popolazione di  ${}^{12}\text{B}$  è stabile e non cambia nel tempo) e l'attività all'equilibrio (decadimenti  $\beta$  al secondo).

Costante di Avogadro =  $6.023 \times 10^{23}$

$[Bq] = [s]^{-1}$

## Soluzione 1

Chiamiamo  $N_1(t)$  la popolazione di  $^{11}\text{B}$  e  $N_2(t)$  quella di  $^{12}\text{B}$ , inizialmente si ha:

$$N_1(0) = \frac{0.09}{11} \times 6.023 \times 10^{23} = 4.93 \times 10^{21}$$

e

$$N_2(0) = 0$$

Durante l'irradiazione con neutroni,  $N_1(t)$  cambia secondo:

$$\frac{dN_1(t)}{dt} = -\sigma\phi N_1(t)$$

con  $\sigma$  sezione d'urto di cattura neutronica e  $\phi$  flusso di neutroni, quindi:

$$N_1(t) = N_1(0)e^{-\sigma\phi t}$$

$N_2(t)$  cambia invece secondo:

$$\frac{dN_2(t)}{dt} = -\frac{dN_1(t)}{dt} - \lambda N_2(t) = N_1(0)\sigma\phi e^{-\sigma\phi t} - \lambda N_2(t)$$

con  $\lambda$  costante del decadimento  $\beta$  del  $^{12}\text{B}$ . Integrando ottengo:

$$N_2(t) = \frac{\sigma\phi}{\lambda - \sigma\phi} (e^{-\sigma\phi t} - e^{-\lambda t}) N_1(0)$$

All'equilibrio si avrà:  $\frac{dN_2(t)}{dt} = 0$  da cui si ottiene il tempo  $t$  al quale si raggiunge l'equilibrio:

$$t = \frac{1}{\lambda - \sigma\phi} \ln\left(\frac{\lambda}{\sigma\phi}\right)$$

Siccome  $\lambda = \frac{\ln 2}{0.02s} = 34.7s^{-1}$  e  $\sigma\phi = 0.55 \times 10^{-26} \times 3 \times 10^{12} = 1.65 \times 10^{-14}s^{-1}$  allora:

$$t \sim \frac{1}{\lambda} \ln\left(\frac{\lambda}{\sigma\phi}\right) = 1.02s$$

L'attività all'equilibrio vale:

$$A = \lambda N_2(t) \sim \frac{\lambda\sigma\phi N_1(t)}{\lambda - \sigma\phi} \sim \sigma\phi N_1(t) = 8.13 \times 10^7 Bq.$$

---

# Introduzione alla Fisica Nucleare e Subnucleare

Quarto appello a.a. 2021/22  
Prova scritta 28/09/2022

## Esercizio 1

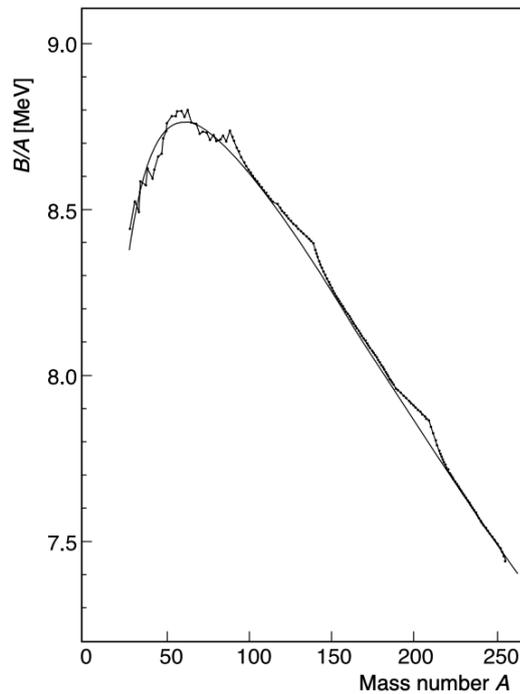
Enunciare la formula semiempirica per l'energia di legame.

Spiegare i vari termini, evidenziando, inoltre, le ragioni per cui l'energia di legame diminuisce ad alto  $A$  e come questo influisce sulla probabilità di avere fissione nucleare.

Considerando la fissione di un nucleo con numero di massa  $A_0$  (e massa  $M_0$ ) in due nuclei con  $A_1$  ( $M_1$ ) e  $A_2$  ( $M_2$ ), scrivere quando vale l'energia rilasciata, i.e. il  $Q$ -valore.

Chiamando  $\epsilon(A) = B/A$  l'energia media di legame per nucleone esprimere  $Q$  in funzione di  $\epsilon(A)$  e  $A$ .

A partire solamente dai valori approssimati in figura, stimare il  $Q$ -valore per la fissione spontanea  ${}^{242}\text{Pu} \rightarrow {}^{134}\text{Te} + {}^{108}\text{Mo}$ .



## Soluzione 1

La formula semiempirica per l'energia di legame di un nucleo è:

$$B(A, Z) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c Z(Z-1)A^{-1/3} - a_a (N-Z)^2 4A^{-1} + \delta$$

L'energia media per nucleone è quindi:

$$\epsilon = B/A = a_v - a_s A^{-1/3} - a_c Z(Z-1)A^{-4/3} - a_a (N-Z)^2 4A^{-2} + \delta A^{-1}$$

Il termine di volume è una costante. Il termine di superficie ha un contributo negativo che in valore assoluto decresce al crescere di  $A$ . Il termine Coulombiano ha anche un contributo negativo il cui valore assoluto cresce con  $A$  siccome  $Z$  e  $A$  crescono analogamente. Il termine asimmetrico ha anche un contributo negativo e il suo valore assoluto cresce con  $A$  siccome  $Z/A$  decresce se  $A$  cresce. Il termine di accoppiamento è invece diverso per medesimo  $A$ , ma normalmente decresce al crescere di  $A$ .

Mettendo insieme tutti i termini, si nota che l'energia di legame cresce con  $A$  all'inizio, fino a raggiungere un massimo per  $A \sim 50$  e poi decresce gradualmente.

In particolare,  $A$  cresce partendo da 0, la curva cresce rapidamente fino a 30 presentando diverse fluttuazioni. In questo caso le interazioni tra nucleoni non raggiungono la saturazione e non ci sono troppi nucleoni all'interno del nucleo quindi l'energia di legame media cresce rapidamente con  $A$ . Ma a causa del basso numero di nucleoni, i termini di accoppiamento e asimmetria influiscono sull'energia media causando le fluttuazioni.

Quando  $A > 30$ , l'energia di legame media supera gli 8 MeV. All'aumentare di  $A$  la curva decresce. In questo caso, il numero di nucleoni è sufficiente per far saturare le forze tra nucleoni e quindi anche  $B/A$ . All'aumentare del numero di nucleoni l'energia di legame media decresce ulteriormente a causa del termine Coulombiano.

Nella fissione nucleare un nucleo pesante si dissocia in due nuclei più leggeri. Dalla curva si osserva che i prodotti della fissione hanno energia di legame media più alta, questa energia in eccesso viene liberata e quindi il processo può avvenire.

Il  $Q$ -valore per la fissione di un nucleo è pari a:

$$Q = M_0 c^2 - M_1 c^2 - M_2 c^2$$

Siccome la massa di un nucleo con numero di massa  $A$  è:

$$M = Z m_p + (A - Z) m_n - B/c^2$$

e  $Z_0 = Z_1 + Z_2$ ,  $A_0 = A_1 + A_2$ , allora  $M_0 = M_1 + M_2 + (B_1 + B_2)/c^2 - B_0/c^2$ , quindi:

$$Q = M_0 c^2 - M_1 c^2 - M_2 c^2 = B_1 + B_2 - B_0$$

Siccome  $B = \epsilon(A) \times A$  allora:

$$Q = A_1\epsilon(A_1) + A_2\epsilon(A_2) - A_0\epsilon(A_0)$$

Se  $A_{Pu} = 242$ , nella fissione ottengo  $A_{Te} = 134$  e  $A_{Mo} = 108$  e dalla figura ricavo che  $\epsilon(134) \simeq 8.4$  MeV,  $\epsilon(108) \simeq 8.6$  MeV e  $\epsilon(242) \simeq 7.6$  MeV, allora:

$$Q = 134\epsilon(134) + 108\epsilon(108) - 242\epsilon(242) \simeq 215\text{MeV}$$

---

## Introduzione alla Fisica Nucleare e Subnucleare

**Quinto appello a.a. 2021/22**  
**Prova scritta 16/01/2023**

### Esercizio 1

Si considerino le seguenti coppie di nuclidi con le corrispondenti masse atomiche misurate in unità di massa atomica, u:

1.  ${}^7_3\text{Li}$ ,  $m = 7,0160$  u;  ${}^7_4\text{Be}$ ,  $m = 7,0170$  u
2.  ${}^{14}_7\text{N}$ ,  $m = 14,0031$  u;  ${}^{14}_8\text{O}$ ,  $m = 14,0086$  u
3.  ${}^{38}_{17}\text{Cl}$ ,  $m = 37,9680$  u;  ${}^{38}_{18}\text{Ar}$ ,  $m = 37,9627$  u

ricordando che la massa dell'elettrone è 0.00055 u indicare quale dei due nuclidi della coppia è instabile, il suo modo di decadimento, e l'energia approssimata rilasciata durante la disintegrazione giustificando, numericamente, la risposta.

### Soluzione 1

Siccome per le coppie di isobari  $A$  differisce solamente di una unità, l'unico decadimento possibile è il  $\beta$ .

Se  $M_x$ ,  $M_y$  ed  $m_e$  rappresentano le masse del nucleo madre, del nucleo figlia e dell'elettrone, rispettivamente, allora l'energia rilasciata dal decadimento è la seguente:

$$E(\beta) = [M_x(Z, A) - M_y(Z + 1, A)m_e]c$$

esprimendo la relazione in unità di massa atomica:

$$E(\beta^-) = [M_x(Z, A) - Zm_e - M_y(Z+1, A) + (Z+1)m_e - m_e]c^2 = [M_x(Z, A) - M_y(Z+1, A)]c^2$$

dove  $M$  indica la massa atomica. Quindi il decadimento  $\beta^-$  avviene se e solo se  $M_x > M_y$ .

In maniera simile, nel decadimento  $\beta^+$  abbiamo:

$$E(\beta^+) = [M_x(Z, A) - M_y(Z - 1, A) - 2m_e]c^2$$

quindi può avvenire se e solo se  $M_x - M_y > 2m_e = 0.0011$  u.

Allo stesso modo, per la cattura elettronica:

$$E(EC) = [M_x(Z, A) - M_y(Z - 1, A)]c^2 - W_i$$

dove  $W_i$  è l'energia di legame di un elettrone nella sua  $i$ -esima shell. Quindi per avvenire:  $M_x - M_y > W_i/c^2$

Se  $\Delta = M(Z + 1, A) - M(Z, A)$ , allora:

1. Nella prima coppia, l'elemento instabile è il Berillio-7.  $\Delta = 0.001 < 0.0011$  u quindi il decadimento avviene per cattura elettronica:  ${}^7_4\text{Be} + e^- \rightarrow {}^7_3\text{Li} + \nu_e$
2. Nella seconda coppia l'elemento instabile è l'Ossigeno-8.  $\Delta = 0.0055$  u, quindi il decadimento è di tipo  $\beta^+$ :  ${}^{14}_8\text{O} \rightarrow {}^{14}_7\text{N} + e^+ + \nu_e$ .
3. Nella terza coppia l'elemento instabile è il Cloro-38.  $\Delta = -0.0053$  u, quindi il decadimento è di tipo  $\beta^-$ :  ${}^{38}_{17}\text{Cl} \rightarrow {}^{38}_{18}\text{Ar} + e^- + \bar{\nu}_e$ .

## Introduzione alla Fisica Nucleare e Subnucleare

Sesto appello a.a. 2021/22

Prova scritta 03/02/2023

### Esercizio 1

Un protone ed un neutrone possono subire cattura radioattiva a riposo:  $p + n \rightarrow d + \gamma$  producendo un deutone, uno stato legato di protone e neutrone, ed un raggio gamma.

1. Calcolare l'energia del fotone emesso in questa cattura.
2. Stimare, valutando il rapporto  $E_d/E_\gamma$ , l'ordine di grandezza dell'effetto del rinculo.

$m_p = 1.00783$  u,  $m_n = 1.00867$  u,  $m_d = 2.01410$  u,  $1 \text{ u} = 1.66 \times 10^{-24} \text{ g} = 931 \text{ MeV}$ .

### Soluzione 1

L'energia rilasciata dalla cattura radioattiva è pari a:

$$Q = (m_p + m_n - m_d)c^2 = 1.00783 + 1.00867 - 2.01410u = 2.234MeV \quad (1)$$

Questa energia include l'energia cinetica del fotone e il rinculo del deutone. Per la conservazione del momento totale:

$$\overline{p}_\gamma = -\overline{p}_d \rightarrow p_\gamma^2 = p_d^2 \quad (2)$$

quindi

$$\frac{E_d}{E_\gamma} = \frac{p_d^2}{2m_d} \frac{1}{p_\gamma^2 c^2} = \frac{p_\gamma^2 c^2}{2m_d c^2} \frac{1}{p_\gamma^2 c^2} = \frac{1}{2m_d c^2} = \frac{1}{2 \times 2.01410 \times 931} \sim 10^{-3} \quad (3)$$

Quindi il rinculo del deutone non contribuisce significativamente all'energia del fotone emesso.