## ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 16 – 18 giugno 2000

# Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo-invariante ha risposta impulsiva $h(t)=\frac{1}{2}\sqrt{t}\,u(t)$. Al suo ingresso vien posto un segnale $x(t)$ la cui trasformata di Fourier è $X(\omega)=cos(2\omega)$. Ricavare il segnale presente all'uscita del sistema.

# Soluzione

Allo spettro $X(\omega)=cos(2\omega)$ corrisponde il segnale

$$x(t)=\frac{1}{2}\delta(t+2)+\frac{1}{2}\delta(t-2)$$

Pertanto, essendo nota la risposta impulsiva del sistema, risulta che il segnale di uscita è

$$y(t)=\frac{1}{4}\left[\sqrt{t+2}\,u(t+2)+\sqrt{t-2}\,u(t-2)\right]$$

Esercizio N.2

Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale $x[n]$ così definito:

$$x[n]=\begin{cases}1 & |n|\le N_1\\ 0 & |n|>N_1\end{cases}$$

Sfruttando il risultato ottenuto e le proprietà della trasformata di Fourier, si disegni con cura il segnale tempo discreto $y[n]$ che ha la seguente trasformata:

$$Y(\Omega)=\frac{e^{j2\Omega}-e^{-j3\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}\left\{\frac{sin\left(\frac{5}{2}\Omega\right)}{sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right\}$$

# Soluzione

1) Trasformata di $x[n]$:

Si tratta del segnale riportato in figura I.

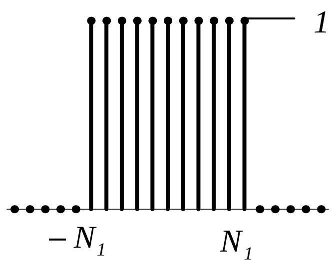


Fig. I

Esso ha la seguente trasformata:

$$X(\Omega)=\sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\Omega n}=e^{j\Omega N_1}\sum_{n=0}^{2N_1} e^{-j\Omega n}=e^{j\Omega N_1}\frac{1-e^{j\Omega(2N_1+1)}}{1-e^{-j\Omega}}$$

$$=\frac{e^{j\Omega N_1}e^{-j\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}}{e^{-j\frac{\Omega}{2}}}\frac{e^{j\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}-e^{-j\Omega\left(N_1+\frac{1}{2}\right)}}{e^{j\frac{\Omega}{2}}-e^{-j\frac{\Omega}{2}}}=\frac{sin\left\{\left(N_1+\frac{1}{2}\right)\Omega\right\}}{sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$

2) Nell'espressione di $Y(\Omega)$ appare questa funzione con $N_1=2$. Essa è moltiplicata da due esponenziali che, nel dominio di *n* rappresentano due traslazioni, nonché da un termine che fa pensare a una sommatoria corrente di una funzione a valor medio nullo (nella $Y(\Omega)$non vi sono infatti impulsi centrati nell'origine). La funzione da sommare è quella che ha la seguente trasformata:

$$Y'(\Omega)=\left(e^{j2\Omega}-e^{-j3\Omega}\right)\left\{\frac{sin\left(\frac{5}{2}\Omega\right)}{sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}\right\}$$

e che ha, in funzione di n, l'andamento riportato in fig. II. Come si può notare, si tratta di una funzione a media nulla, la cui somma corrente,soluzione dell'esercizio, è quella riportata in figura III.

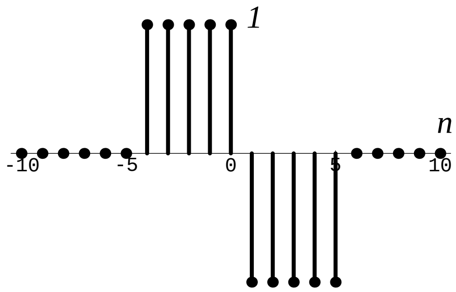


Fig. II

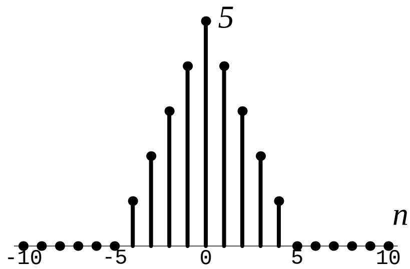


Fig. III

Esercizio N. 3

Il segnale $x(t)$ ha una banda limitata alla frequenza $\omega_M$. Esso modula in ampiezza la portante sinusoidale $c(t)=cos\,\omega_0 t$, $(\omega_M<<\omega_0)$. La modulazione è di tipo DSB-SC. Il segnale modulato passa attraverso un sistema LTI che ha la risposta in frequenza mostrata in figura 1.

Con riferimento alla frequenza $\omega_0$, esprimere in funzione di $x(t)$e della sua trasformata di Hilbert $\hat{x}(t)$ la parte in fase e la parte in quadratura del segnale all'uscita del sistema LTI.

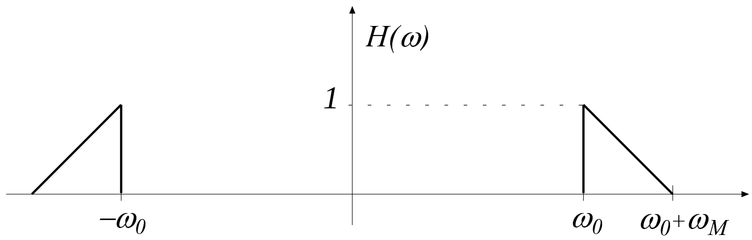

Fig. 1

## Soluzione

Si osserva innanzitutto che il filtro passa banda elimina la banda laterale inferiore del segnale modulato. Quindi, ai fini dell'espressione del segnale $y(t)$ all'uscita del filtro, conviene immaginare che al suo ingresso vi sia un segnale SSB-SC, espresso da:

$$x_{SSB}(t) = x(t)\cos\omega_0 t - \hat{x}(t)\sin\omega_0 t$$

La risposta in frequenza è esprimibile (almeno entro la banda di interesse) dalla seguente equazione di una retta:

$$H(\omega) = \begin{cases} -\dfrac{1}{\omega_M}\omega + \dfrac{\omega_M + \omega_0}{\omega_M} & \text{per } \omega_0 \le \omega \le \omega_M + \omega_0 \\ \dfrac{1}{\omega_M}\omega + \dfrac{\omega_M + \omega_0}{\omega_M} & \text{per } -\omega_0 \ge \omega \ge -\omega_M - \omega_0 \end{cases}$$

Questo sistema può essere sostituito (sempre entro la banda di interesse) da quello rappresentato in Fig. IV

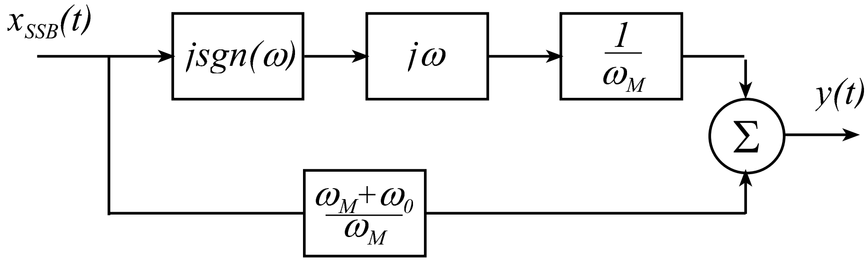


Fig. IV

Il primo blocco del ramo superiore esegue, a meno del segno, la trasformata di Hilbert del segnale di ingresso. Per una proprietà della trasformata di Hilbert la sua uscita sarà: $-x(t)\sin\omega_0 t - \hat{x}(t)\cos\omega_0 t$. Il secondo blocco è un derivatore e pertanto alla sua uscita sarà presente il segnale:

$$-\frac{dx(t)}{dt}\sin\omega_0 t - \frac{d\hat{x}(t)}{dt}\cos\omega_0 t - \omega_0 x(t)\cos\omega_0 t + \omega_0\hat{x}(t)\sin\omega_0 t$$

Tenendo conto anche dei due blocchi con risposta in frequenza costante, si avrà:

$$y(t) = \frac{1}{\omega_M}\left\{-\frac{dx(t)}{dt}\sin\omega_0 t - \frac{d\hat{x}(t)}{dt}\cos\omega_0 t - \omega_0 x(t)\cos\omega_0 t + \omega_0\hat{x}(t)\sin\omega_0 t\right\} +$$

$$+\frac{\omega_M + \omega_0}{\omega_M}\left\{x(t)\cos\omega_0 t - \hat{x}(t)\sin\omega_0 t\right\}$$

Pertanto:

$$y(t) = -\frac{1}{\omega_M}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\sin\omega_0\, t + \frac{d\hat{x}(t)}{dt}\cos\omega_0\, t\right\} + \{x(t)\cos\omega_0\, t - \hat{x}(t)\sin\omega_0\, t\}$$

Possiamo quindi concludere che:

$$y_c(t) = -\frac{1}{\omega_M}\frac{d\hat{x}(t)}{dt} + x(t)$$

$$y_s(t) = -\frac{1}{\omega_M}\frac{dx(t)}{dt} - \hat{x}(t)$$

Esercizio N. 4

Nella figura 2 è indicato un sistema costituito da un tratto di linea, un preamplificatore ed un amplificatore. Sono pure indicate le cifre di rumore dei due amplificatori, i loro guadagni di potenza disponibile, nonché la temperatura alla quale si trova la linea e la sua attenuazione di potenza disponibile.

Si calcoli la cifra di rumore del sistema.

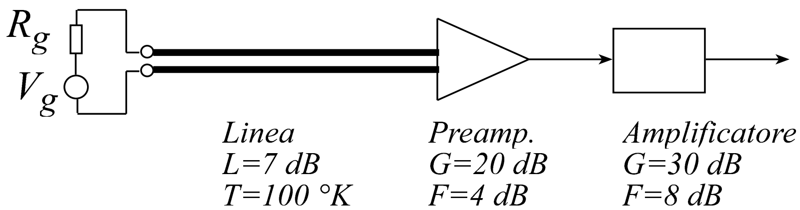


Fig. 2

## Soluzione

Per prima cosa si ricavi la cifra di rumore della linea: a tal fine, poiché essa non si trova a temperatura ambiente (300 °K), conviene ricavare la sua temperatura equivalente di rumore. Con riferimento a una banda B risulta:

$$K\left(T + T_{eq}\right)\frac{1}{L}B = KTB \Rightarrow T_{eq} = T(L-1) = 100\times(5-1) = 400°K$$

Il corrispondente fattore di rumore sarà:

$$F_{linea} = 1 + \frac{T_{eq}}{T_0} = 2.333$$

E' possibile ora usare la formula di composizione della cifra di rumore:

$$F_{sist} = F_{linea} + \left(F_{preamp} - 1\right)L + \frac{\left(F_{amp} - 1\right)L}{G_{preamp}} = 2.33 + (2.5-1)\times 5 + \frac{(6.3-1)\times 5}{100} = 10.177$$