ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 13 - 15 dicembre 2000
(riservato agli studenti fuori corso)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta(t-\tau)$ con il segnale

$$h(t,\tau) = \sin(\omega_0\, t + \pi\tau)\, u(t-\tau)$$

Ricavare la risposta del sistema al segnale di ingresso $x(t) = A\,\mathrm{rect}\left[\dfrac{t - T/2}{T}\right]$.

(Attenzione: si tratta di un sistema lineare, ma non tempo-invariante. Si scriva l'integrale che in questo caso fornisce la risposta del sistema, si disegnino le funzioni che appaiono sotto il segno di integrale e si faccia attenzione a qual è la variabile di integrazione).

Soluzione

La soluzione è data dal seguente integrale:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\, h(t,\tau)\, d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} A\,\mathrm{rect}\left[\frac{\tau - T/2}{T}\right] \sin(\omega_0\, t + \pi\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$$

Per ogni valore di t esso corrisponde all'integrale del prodotto delle tre funzioni rappresentate in figura I.

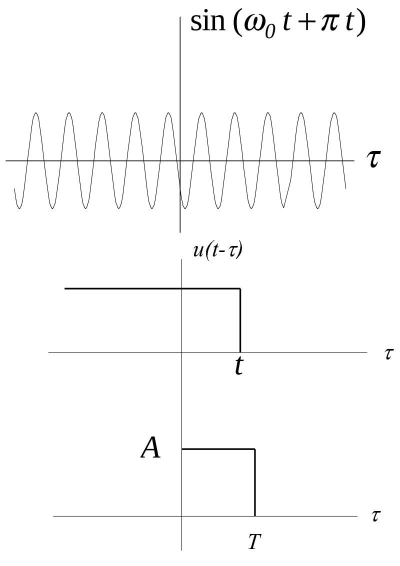


Fig. I

Pertanto:

$$y(t) = 0 \quad \text{per} \quad t < 0$$

$$y(t) = A\int_0^t \sin(\omega_0\, t + \pi\, \tau)\, d\tau$$

$$= -\frac{A}{\pi}\left\{\cos[(\omega_0 + \pi)t] - \cos(\omega_0 t)\right\} \qquad \text{per } 0 \le t < T$$

$$y(t) = A\int_0^T \sin(\omega_0\, t + \pi\, \tau)\, d\tau$$

$$= -\frac{A}{\pi}\left\{\cos[\omega_0\, t + \pi\, T] - \cos(\omega_0 t)\right\} \qquad \text{per } t > T$$

Esercizio N.2

Il sistema indicato in figura 1 è costituito dalla cascata di tre sistemi LTI tempo-discreti causali. Nella figura 2 sono indicati i diagrammi poli – zeri delle tre funzioni di trasferimento che caratterizzano i tre sistemi. Disegnare con cura la risposta impulsiva $h[n]$ dell'intero sistema, sapendo che essa vale 1 per $n \to +\infty$.

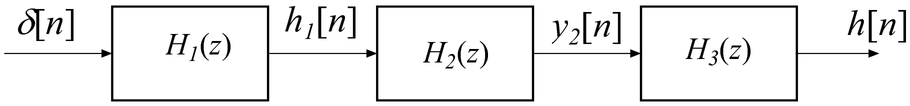
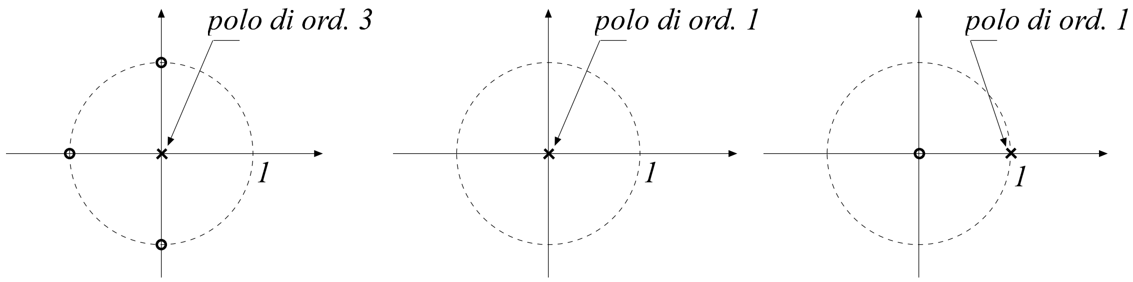


Fig. 1



$H_1(z)$ $H_2(z)$ $H_3(z)$

Fig. 2

(Suggerimento: è opportuno innanzitutto individuare quali operazioni eseguono rispettivamente i sistemi 2 e 3. Per il calcolo della risposta impulsiva del sistema 1, ci si aiuti valutando preliminarmente la trasformata Z del segnale $x[n] = \begin{cases} 1 & \text{per } 0 \le n \le N-1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$*)*

Soluzione

Poiché $H_2(z) = k_2 z^{-1}$, il secondo sistema è un ritardatore di una unità. Per il terzo sistema si ha $H_3(z) = \dfrac{k_3}{1 - z^{-1}}$, ($h_3[n] = k_3 u[n]$): si tratta dunque di un sistema che esegue la somma corrente del segnale di ingresso. Per quanto riguarda il primo sistema , la sua funzione di trasferimento è:

$$H_1(z) = k_1 \frac{(z+j)(z-j)(z+1)}{z^3} = k_1 \frac{(z+j)(z-j)(z+1)(z-1)}{z^3(z-1)} = k_1 \frac{z^4 - 1}{z^3(z-1)}$$

$$= k_1 \frac{1 - z^{-4}}{1 - z}$$

Quest'ultima espressione corrisponde all'antitrasformata del segnale:

$$h_1[n] = \begin{cases} k_1 & \text{per } 0 \le n \le 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

In definitiva, $h[n] = k_2 k_3 \sum_{m=-\infty}^{n} h_1[m-1]$. Per $n \geq 4$ questa funzione vale $4k_1 k_2 k_3$, per cui $k_1 k_2 k_3 = \frac{1}{4}$. Se ad esempio $k_1 = \frac{1}{4}$ e $k_2 = k_3 = 1$, le funzioni $h_1[n], y_2[n]$ e $h[n]$ sono come mostrato in figura II.

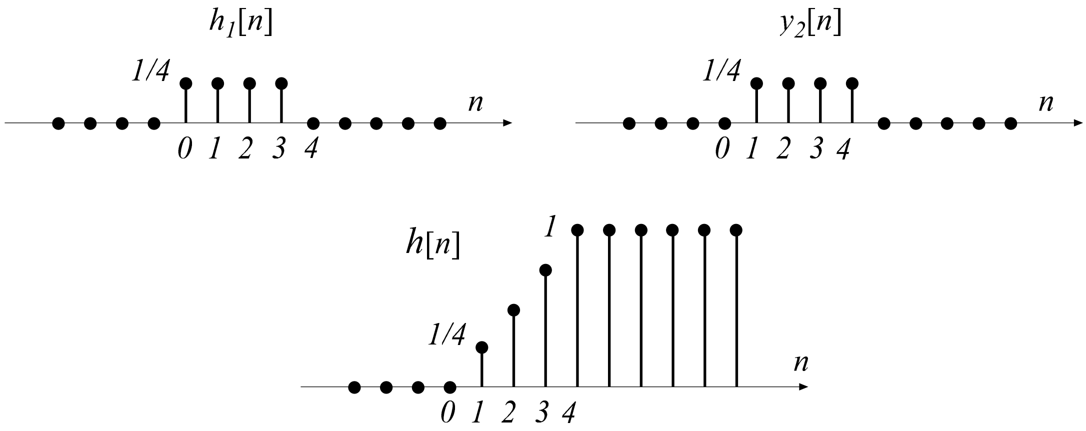


Fig. II

Esercizio N. 3

Un segnale tempo discreto $x[n]$ è stato campionato con periodo di campionamento $N = 4$. Si calcoli la risposta in frequenza di un filtro LTI che, avendo al suo ingresso il segnale campionato $x_p[n]$, fornisca in uscita una versione approssimata di $x[n]$, nella quale i valori tra due campioni successivi seguano una legge lineare, come illustrato, a titolo di esempio, in figura 3.

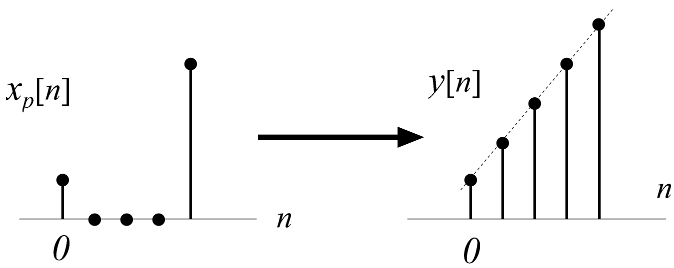


Fig. 3

(Suggerimento: conviene dapprima individuare quale dovrà essere la risposta impulsiva di tale filtro.)

Soluzione

Affinché il sistema LTI esegua una interpolazione lineare tra due campioni successivi dovrà avere una risposta impulsiva triangolare, come indicato in figura III.

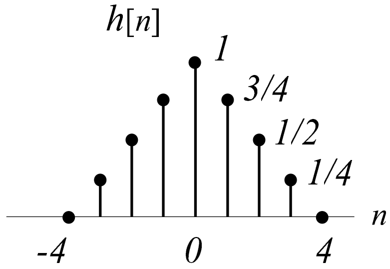


Fig. III

Conviene calcolare la corrispondente risposta in frequenza applicando in modo diretto la sua definizione $H(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\Omega n}$, che nel caso in esame fornisce il seguente risultato:

$$H(\Omega)=1+\frac{6}{4}\cos(\Omega)+\cos(2\Omega)+\frac{1}{2}\cos(3\Omega)$$

Esercizio N. 4

In figura 4 $x(t)$ è un processo aleatorio stazionario la cui funzione di autocorrelazione è:

$$R_x(\tau)=\begin{cases}1-\frac{|\tau|}{T} & \text{per } |\tau|\le T \\ 0 & \text{altrimenti}\end{cases}.$$

Il sistema LTI ha una risposta impulsiva $h(t)=\delta(t-T)$. Disegnare con cura la funzione di autocorrelazione del processo $z(t)=x(t)+y(t)$

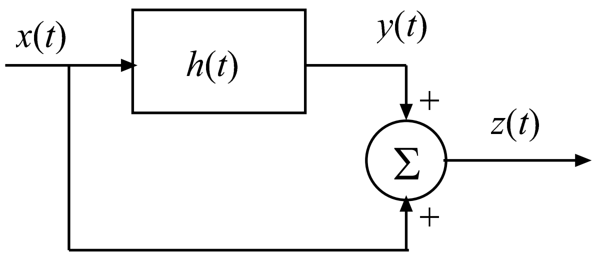


Fig. 4

Soluzione

Il processo $z(t)$ ha una funzione di autocorrelazione data da:

$$R_z(\tau)=E[(x(t)+y(t))(x(t+\tau)+y(t+\tau))=R_x(\tau)+R_y(\tau)+R_{xy}(\tau)+R_{yx}(\tau)$$

Come è noto,

$$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau), \ R_{yx}(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(-\tau) \text{ e } R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Vista la particolare espressione di $h(t)$, in generale si avrà:

$$R_{xy}(\tau) = R_x(\tau - T)$$

$$R_{yx}(\tau) = R_x(\tau + T)$$

$$R_y(\tau) = R_x(\tau)$$

In conclusione:

$$R_z(\tau) = 2R_x(\tau) + R_x(\tau - T) + R_x(\tau + T)$$

In figura IV è rappresentata la composizione di $R_z(\tau)$.

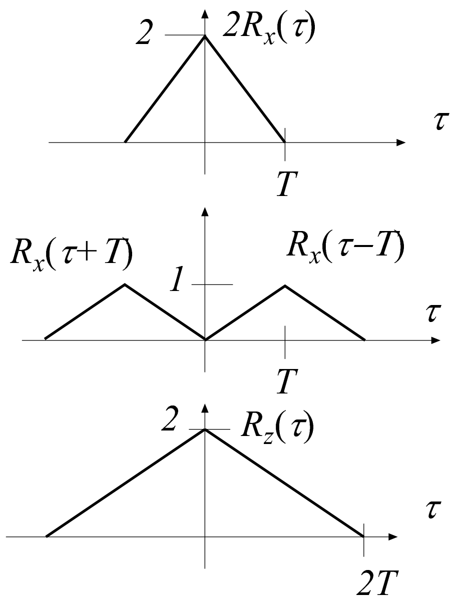


Fig. IV