ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 20 aprile 2001
Riservato agli studenti fuori corso

Prova scritta

Esercizio N. 1

Siano c_k i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del segnale periodico tempo discreto $x[n]$ rappresentato in figura 1.

Si disegni con cura l'andamento del segnale periodico $y[n]$, i cui coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier b_k sono dati da:

$$b_k = j\,\mathrm{Im}[c_{-k}]$$

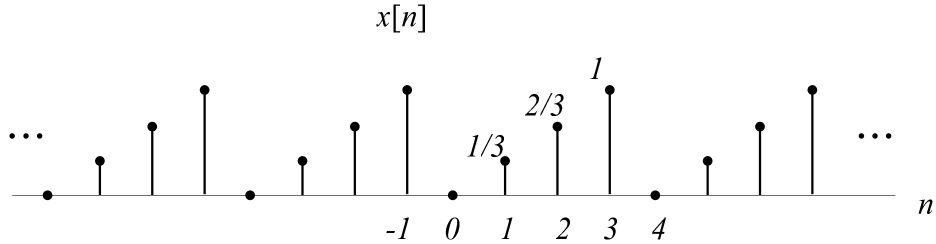


Fig. 1

Soluzione

Dalla relazione $c_{-k} = c_k^*$, si ricava che $b_k = -j\,\mathrm{Im}[c_k]$. Ciò sta a significare che i coefficienti b_k rappresentano lo sviluppo in serie della parte dispari di $x[n]$, cambiata di segno.

Pertanto $y[n] = -\frac{1}{2}\{x[n] - x[-n]\}$

Nella figura I sono riportati gli andamenti di $x[n]$, $x[-n]$ e $y[n]$.

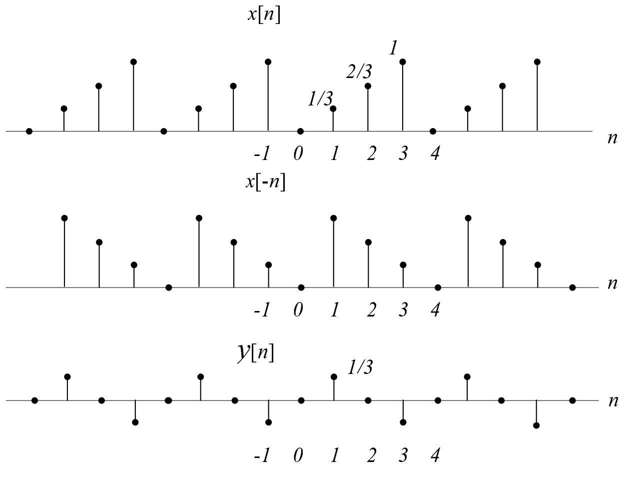


Fig. I

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto, causale, risponde al segnale $x[n]=1$ con il segnale $y[n]=\frac{16}{17}$. La sua funzione di trasferimento ha il diagramma zeri/poli indicato in figura 2. Determinare la sua risposta impulsiva.

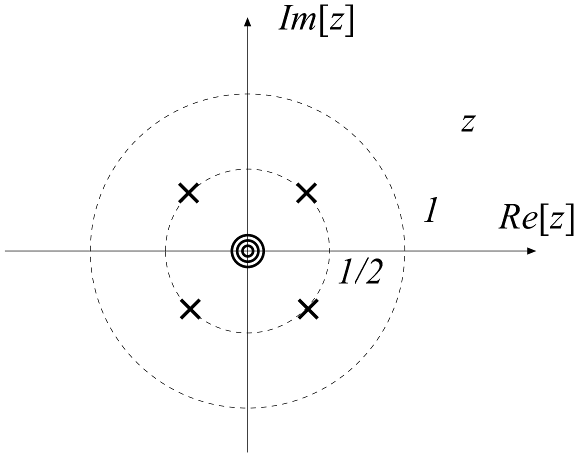


Fig. 2

Soluzione

La funzione di trasferimento del sistema ha la seguente forma:

$$H(z)=K\frac{z^3}{\left(z^4+\frac{1}{16}\right)}$$

Poiché il sistema risponde al segnale $x[n]=1$ con il segnale $y[n]=\frac{16}{17}$, dovrà essere $H(1)=\frac{16}{17}$, vale a dire $k=1$. La risposta impulsiva può essere valutata con la divisione lunga, che, essendo il sistema causale, dovrà essere fatta in modo da fornire una serie di potenze negative di z. Si ottiene:

$$H(z)=\frac{z^3}{\left(z^4+\frac{1}{16}\right)}=z^{-1}-\frac{1}{16}z^{-5}+\left(\frac{1}{16}\right)^2 z^{-9}-\left(\frac{1}{16}\right)^3 z^{-13}\cdots$$

$$h[n]=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{16}\right)^k \delta[n-1-4k]$$

Esercizio N. 3

Il segnale $x(t)$ ha spettro $X(\omega)$ dato da:

$$X(\omega) = \begin{cases} \cos\left(\dfrac{\pi}{2\omega_M}\omega\right) & \text{per } |\omega| \le \omega_M \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Si determini la sua trasformata di Hilbert.

Soluzione

Il segnale analitico associato a $x(t)$ ha spettro pari a $2X(\omega)$ per $0 \le \omega \le \omega_M$ e nullo altrove. La parte immaginaria della sua antitrasformata è proprio $\hat{x}(t)$. Pertanto:

$$\hat{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\omega_M} 2\cos\left(\frac{\pi}{2\omega_M}\omega\right)\sin(\omega t)\,d\omega = \frac{2\omega_M\left(-2\omega_M t + \pi\sin(\omega_M t)\right)}{\pi^3 - 4\omega_M^2\pi t^2}$$

Esercizio N. 4

In fig. 3 è rappresentata una generica realizzazione di un processo aleatorio. Si tratta di una sequenza periodica di impulsi rettangolari di ampiezza *A* e di periodo *T*. *A* è una variabile aleatoria distribuita tra –1 e 1 con densità di probabilità riportata in figura 2.

Si determini il valore medio rispetto a *t* della funzione di autocorrelazione $R_x(t, t+\tau)$ del processo aleatorio.

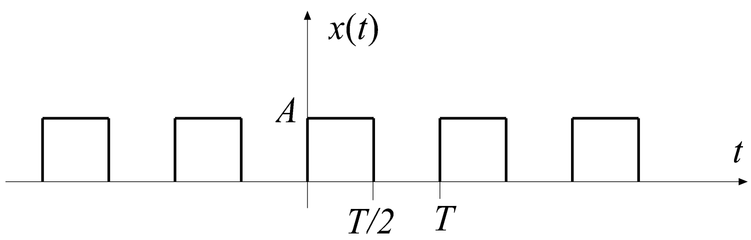


Fig. 3

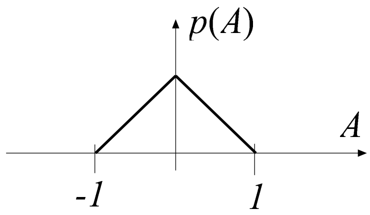


Fig. 4

Soluzione

Il processo non è stazionario. Per il calcolo della funzione di autocorrelazione si fissi un intervallo τ caratterizzato da essere $0 \le \tau < \frac{T}{2}$ e si osservi cosa avviene per $0 \le t \le T$. Si avrà:

$$R_x(t, t+\tau) = \begin{cases} E\left[A^2\right] & se\ 0 \le t \le \dfrac{T}{2} - \tau \\ 0 & altrimenti \end{cases}$$

Se ora si sceglie un intervallo τ tale che $\frac{T}{2} < \tau < T$, si avrà

$$R_x(t, t+\tau) = \begin{cases} 0 & se\ t < T - \tau \\ E\left[A^2\right] & se\ T\text{-}\tau < t < T/2 \end{cases}$$

Ci si può rendere facilmente conto che, fissato τ, questa situazione si ripete periodicamente al variare di t, e che ciò che accade per un dato τ, accade per ogni $\tau = \tau' + kT$. Pertanto la funzione di autocorrelazione e periodica di periodo T sia in t sia in τ.

Le figure II a e II b mostrano un tipico andamento di $R_x(t, t+\tau)$, rispettivamente per $\tau < T/2$ e per $\tau > T/2$.

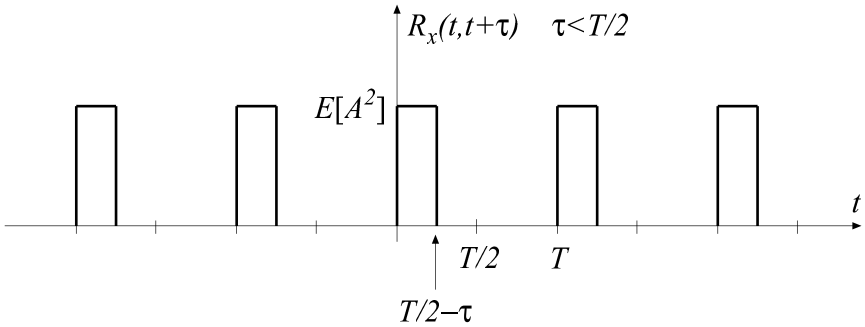


Fig. II a

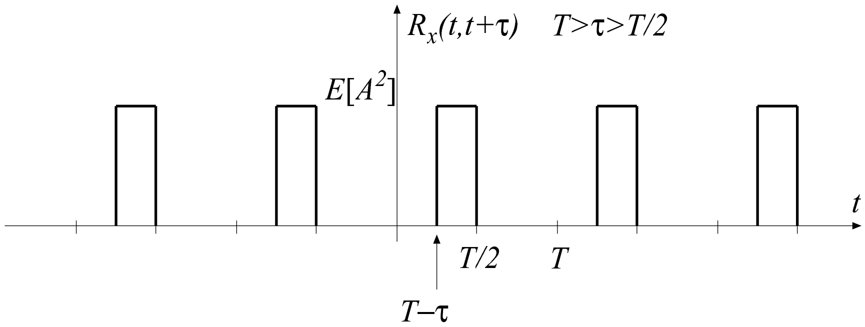


Fig. II b

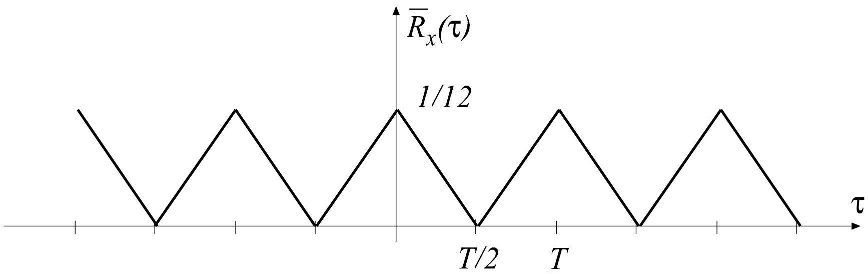
In conclusione, per ogni valore di τ la funzione di autocorrelazione è periodica in t con periodo T, ed il valore medio di questa funzione periodica è a sua volta una funzione periodica in τ di periodo T.

In base ai ragionamenti fatti, si deduce che il valore medio di questa funzione nell'intervallo $0 \le \tau < T$ è:

$$\overline{R}_x(\tau) = \begin{cases} E\left[A^2\right]\left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{\tau}{T}\right) & per\ \ 0 \le \tau < \dfrac{T}{2} \\ E\left[A^2\right]\left(-\dfrac{1}{2} + \dfrac{\tau}{T}\right) & per\ \ \dfrac{T}{2} \le \tau < T \end{cases}$$

Tale funzione si ripete con periodo T

Tenendo conto che $E[A^2] = 1/6$, si conclude che l'andamento rispetto a τ di $\overline{R}_x(t, t+\tau)$ è quello riportato in figura III.


$\overline{R}_x(\tau)$
1/12
τ
T/2
T