ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 5 – 6 giugno 2001

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta(t-\tau)$ con il segnale $u(t)$. Si calcoli la sua risposta al segnale il cui andamento è riportato in figura 1. Si dica (giustificando le risposte) se il sistema, oltre che lineare, è:

a) tempo invariante;
b) stabile;
c) causale;
d) senza memoria.

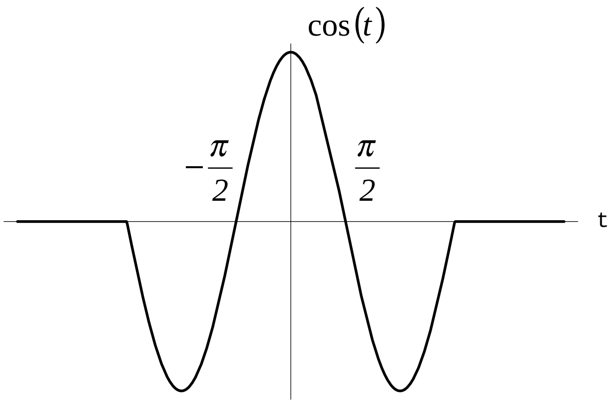

Fig. 1

Soluzione

La risposta impulsiva del sistema è indipendente dall'istante τ in cui viene applicato l'impulso: pertanto il sistema non è tempo invariante . Esso risponde al generico segnale $x(t)$ con :

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t,\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)u(t)d\tau = u(t)\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)d\tau$$

Pertanto la risposta del sistema al generico segnale $x(t)$ è sempre il gradino unitario di ampiezza pari all'area del segnale di ingresso. In particolare, per il segnale di figura 1 la risposta sarà:

$$y(t)=-u(t)\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos(\tau)d\tau = -2u(t)$$

Per quanto riguarda la stabilità, si vede che un segnale di ingresso di ampiezza finita ma di area infinita dà luogo ad una risposta di ampiezza infinita: il sistema pertanto non è stabile.

La risposta è sempre del tipo $ku(t)$, anche in corrispondenza ad un segnale nullo fino a t_0, con $t_0 > 0$: quindi il sistema non è causale.

Infine, dipendendo la risposta dall'integrale del segnale su un intervallo pari alla sua durata, si deduce che il sistema non è senza memoria.

Esercizio N. 2

Si calcoli lo sviluppo in serie di Fourier del segnale rappresentato in figura 2.

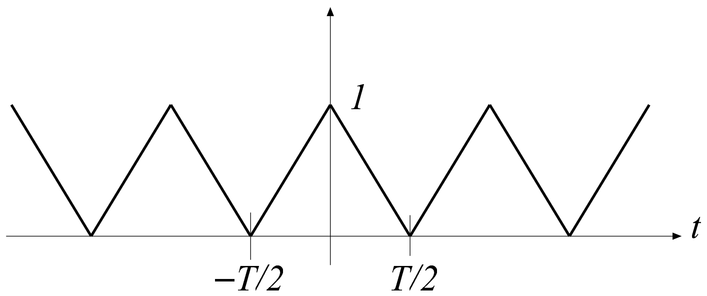

Fig. 2

Soluzione

Poiché la funzione $f(t)$ è pari, il generico coefficiente a_k è:

$$a_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)e^{-jk2\pi ft}dt = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} f(t)\cos(k2\pi ft)dt = \frac{2}{T}\int_{0}^{+T/2}\left(1-\frac{2}{T}t\right)\cos(k2\pi ft)dt$$

$$a_k = \frac{2}{T}\int_{0}^{+T/2}\cos(k2\pi ft)dt - \frac{4}{T^2}\int_{0}^{T/2} t\cos(k2\pi ft)dt$$

Per $k \neq 0$ il primo integrale risulta nullo, mentre il secondo (da risolvere per parti) dà:

$$a_k = \frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}$$

Per $k = 0$ si ottiene il valore medio della funzione che è pari a $1/2$.

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta in frequenza:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \cos\left(\frac{\Omega}{2}\right) + j\sin(\Omega) \qquad |\Omega| \le \pi$$

Calcolare la sua risposta all'impulso unitario.

Soluzione

La risposta all'impulso unitario dovuta alla parte immaginaria della risposta in frequenza è determinabile immediatamente: infatti

$$j\sin\Omega = \frac{e^{j\Omega}}{2} - \frac{e^{-j\Omega}}{2} \qquad \Rightarrow \qquad h_d[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

Per quanto riguarda la parte reale di $H\left(e^{j\Omega}\right)$, risulta:

$$h_p[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)\cos\Omega\, n\, d\Omega = \frac{1}{\pi}\frac{2\cos(n\pi)}{1-4n^2} = \frac{1}{\pi}\frac{2(-1)^n}{1-4n^2}$$

In conclusione:

$$h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n+1] - \delta[n-1]) + \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$$

Esercizio N. 4

La generica realizzazione di un processo aleatorio è così definita:

$$x(t) = A\sum_{k=-\infty}^{+\infty} f(t-kT)$$

ove $f(t)$ è la funzione rappresentata in figura 3 e A è una variabile aleatoria distribuita in modo uniforme tra 0 e 1.

Calcolare la densità spettrale di potenza del processo.

(Si faccia riferimento al risultato dell'esercizio n. 2 ed al significato fisico della densità spettrale di potenza).

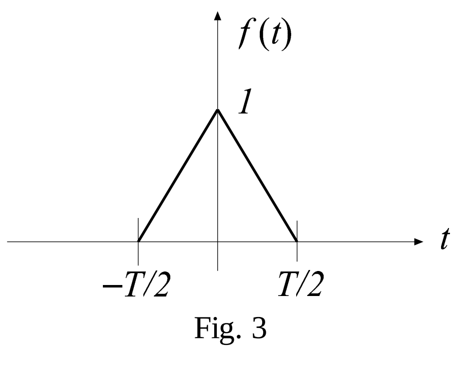

Fig. 3

Soluzione

Le singole realizzazioni appaiono come la funzione dell'esercizio 2, pesata dalla variabile aleatoria A: si tratta pertanto della medesima funzione periodica. La densità spettrale di potenza deve risultare una funzione costituita da impulsi centrati in corrispondenza alle componenti armoniche di questa funzione. Ogni impulso avrà area tale da fornire per integrazione la potenza media, mediamente portata dalla componente. In particolare, l'impulso in $f = 0$ dovrà essere pari alla potenza della componente continua. Poiché $a_0 = 1/2$, l'area del relativo impulso risulta:

$$s_0 = E\left[A^2 {a_0}^2\right] = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Facendo riferimento alle sole frequenze positive, dall'esercizio 2 si vede che le varie realizzazioni hanno componenti armoniche di ampiezza non nulla per frequenze $f_k = \frac{2k-1}{T}, k = 1,2,3\ldots$. Ciascuna componente sinusoidale ha ampiezza $A_k = A\frac{4}{k^2\pi^2}$ e valore efficace $\frac{A}{\sqrt{2}}\frac{4}{k^2\pi^2}$. Il relativo impulso nella densità spettrale di potenza dovrà pertanto avere un'area pari a $\frac{8}{3}\frac{1}{k^4\pi^4}$. In definitiva:

$$S(f) = \frac{1}{12}\delta(f) + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{8}{3}\frac{1}{k^4\pi^4}\delta\left(f - \frac{2k-1}{T}\right)$$