ESAME DI COMUNICAZIONI ELETTRICHE

Appello del 24 luglio 2001

Prova scritta

Esercizio N. 1

Quattro sistemi lineari sono descritti dalle seguenti relazioni ingresso-uscita:

Sistema N. 1	$y(t)=\int_{-T}^{T} x(t-\alpha)d\alpha$
Sistema N. 2	$y(t)=\int_{-T}^{T} x(\alpha-t)d\alpha$
Sistema N. 3	$y(t)=\int_{-T}^{T} x(\alpha+t)d\alpha$
Sistema N. 4	$y(t)=\int_{-T}^{T} x(-\alpha-t)d\alpha$

Dire quali di questi sistemi sono tempo invarianti.

Soluzione

Per determinare correttamente se i vari sistemi sono o meno tempo invarianti è necessario tener ben presente il diverso ruolo che hanno le due variabili α e t presenti all'interno dell'integrale:

a) t rappresenta il valore della variabile in corrispondenza del quale si vuole calcolare l'uscita;

b) α è la variabile che, variando da $-T$ a T, fa sì che l'uscita all'istante t sia determinata da tutti i valori del segnale di ingresso relativi a quell'intervallo temporale.

Si consideri il sistema N. 1. Per calcolare l'uscita all'istante t, esso elabora il segnale di ingresso secondo il seguente schema:

a) In $x(t)$ t è sostituito con α;

b) α è sostituito con $-\alpha$;

c) α è sostituito con $\alpha-t$;

d) la funzione così ottenuta è integrata in $d\alpha$ da $-T$ a T.

Pertanto, detta $y_1(t)$ l'uscita corrispondente a $x(t-t_0)$, si ha:

$$x(t-t_0)\rightarrow x(-\alpha-t_0)\rightarrow x(-\alpha+t-t_0)\rightarrow y_1(t)=\int_{-T}^{T} x(-\alpha+t-t_0)d\alpha$$

D'altro canto $y(t-t_0)=\int_{-T}^{T} x(t-t_0-\alpha)d\alpha = y_1(t)$: il sistema è tempo invariante:

Sistema N. 2

$$x(t-t_0)\to x(\alpha-t_0)\to x(\alpha-t-t_0)\to y_1(t)=\int_{-T}^{T} x(\alpha-t-t_0)d\alpha$$

$y(t-t_0)=\int_{-T}^{T} x(\alpha-t+t_0)d\alpha \neq y_1(t)$: il sistema non è tempo invariante.

Sistema N. 3

$$x(t-t_0)\to x(\alpha-t_0)\to x(\alpha+t-t_0)\to y_1(t)=\int_{-T}^{T} x(\alpha+t-t_0)d\alpha$$

$y(t-t_0)=\int_{-T}^{T} x(\alpha+t-t_0)d\alpha = y_1(t)$: il sistema è tempo invariante.

Sistema N. 4

$$x(t-t_0)\to x(-\alpha-t_0)\to x(-\alpha-t-t_0)\to y_1(t)=\int_{-T}^{T} x(-\alpha-t-t_0)d\alpha$$

$y(t-t_0)=\int_{-T}^{T} x(-\alpha-t+t_0)d\alpha \neq y_1(t)$: il sistema non è tempo invariante.

Esercizio N.2

Al segnale $x(t)$ è associato un segnale analitico $x_+(t)=x(t)+j\hat{x}(t)$ ($\hat{x}(t)=$ trasformata di Hilbert di $x(t)$), avente spettro pari a :

$$X_+(f)=e^{-a(f-f_0)}u(f-f_0)$$

con $a>0$ (vedi figura 1).

Ricavare le espressioni analitiche di $x(t)$ e $\hat{x}(t)$.

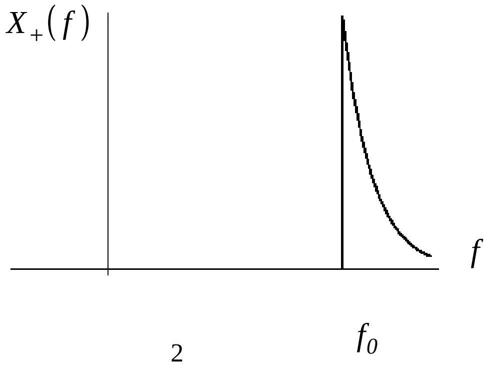

Fig. 1

Soluzione

Conviene innanzitutto ricavare l'inviluppo complesso di $x(t)$. Esso avrà spettro pari a:

$$\tilde{X}(f) = X_+(f + f_0) = e^{-af}u(f)$$

Ricordando che la trasformata di Fourier di $e^{-at}u(t)$ è $\frac{1}{a + j2\pi f}$, per dualità si ricava che l'antitrasformata di $e^{-af}u(f)$ è $\frac{1}{a - j2\pi t}$. Risulta così:

$$x_+(t) = x(t) + j\hat{x}(t) = \frac{e^{j2\pi f_0 t}}{a - j2\pi t} = \frac{\{\cos(2\pi f_0 t) + j\sin(2\pi f_0 t)\}\{a + j2\pi t\}}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$$

$$x(t) = \frac{a\cos(2\pi f_0 t) - 2\pi t\sin(2\pi f_0 t)}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$$

$$\hat{x}(t) = \frac{a\sin(2\pi f_0 t) + 2\pi t\cos(2\pi f_0 t)}{a^2 + 4\pi^2 t^2}$$

Esercizio N.3

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = 2\cos(\pi n)u[n] - \delta[n]$$

Calcolare la sua funzione di trasferimento $H(z)$ e la sua risposta al segnale $x[n] = u[n]$

Soluzione

Per calcolare la Z-trasformata di $h[n]$ conviene scrivere $\cos(\pi n)u[n]$ come $(-1)^n u[n]$. Così facendo risulta facilmente che:

$$H(z) = \frac{2}{1 + z^{-1}} - 1 = \frac{1 - z^{-1}}{1 + z^{-1}}$$

La trasformata Z di $x[n]$ è $\frac{1}{1 - z^{-1}}$; pertanto quella di $y[n]$ (uscita corrispondente a $x[n]$) è:

$$Y(z) = H(z)X(z) = \frac{1}{1 + z^{-1}},$$

cui corrisponde (dato che il sistema è causale) $y[n] = (-1)^n u[n]$.

Esercizio N. 4

In figura 2 è rappresentata la funzione di autocorrelazione di un processo aleatorio gaussiano. Esso viene campionato con frequenza di campionamento $f_s = \frac{1}{T}$ e i campioni vengono convertiti in una sequenza aleatoria $x[n]$, che viene elaborata dal sistema LTI causale retto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n] - 0.5\,y[n-1] = x[n]$$

Calcolare $E\{y[n]\}$ e $E\{y[n]y[n+k]\}$.

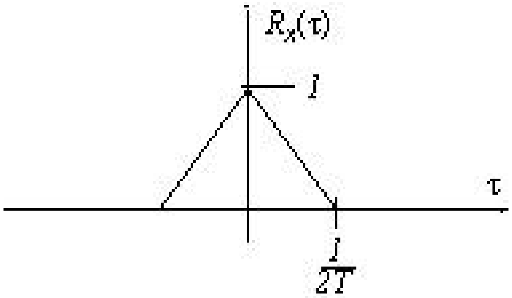

Fig. 2

Soluzione

Il sistema, oggetto dell'esercizio, ha la struttura riportata in figura II.

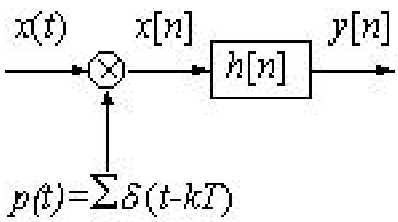

Fig. II

Tenendo conto della stazionarietà di $x(t)$, si ha:

$$E\{y[n]\} = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]h[n-k] \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} E\{x[k]\}h[n-k] = E\{x[k]\} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[n-k]$$

$$E\{y[n]y[n+k]\} = E\left\{y[n+k]\sum_{m=-\infty}^{+\infty} x[m]h[n-m]\right\} =$$

$$= \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E\{y[n+k]x[m]\}h[n-m] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_{xy}[m, n+k]h[n-m] = R_{xy}[k] \otimes h[-k]$$

A sua volta $R_{xy}[k] = R_x[k] \otimes h[k]$, avendo indicato con $R_{xy}[k] = E\{x[n]y[n+k]\}$ e con $R_x[k] = E\{x[n]x[n+k]\}$. Pertanto:

$$E\{y[n]y[n+k]\} = R_x[k] \otimes h[k] \otimes h[-k]$$

Si tratta ora di valutare $R_x[k]$ e $h[k]$. Poiché il campionamento avviene a frequenza pari a $1/T$, dal grafico di $R_x(\tau)$ risulta che $x[n]$ è una sequenza di variabili aleatorie tra loro incorrelate, con valor medio nullo e varianza pari a $R_x(0) = 1$. Di conseguenza $R_x[k] = \delta[k]$.

Per quanto riguarda la risposta impulsiva del sistema, essa è ricavabile dall'equazione alle differenze. Risulta:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} \quad \Rightarrow \quad h[k] = \left(\frac{1}{2}\right)^k u[k]$$

In conclusione, vista l'espressione di $R_x[k]$, si tratta di eseguire l'operazione $h[k] \otimes h[-k]$:

$$E\{y[n]y[n+k]\} = h[k] \otimes h[-k] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} h[m]h[m-k] =$$

$$= \sum_{m=k}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^m \left(\frac{1}{2}\right)^{m-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \sum_{k}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \left\{\sum_{0}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m} - \sum_{0}^{k-1} \left(\frac{1}{2}\right)^{2m}\right\} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \left\{\frac{1}{1-\frac{1}{4}} - \frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^k}{1-\frac{1}{4}}\right\} = \left(\frac{1}{2}\right)^{-k} \left\{\frac{4}{3}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left\{\frac{4}{3}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{|k|}$$