Provetta di *TEORIA DEI SEGNALI*

6 novembre 2001

Esercizio N. 1

Un sistema è caratterizzato dalla seguente relazione ingresso-uscita:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x(\tau)\,d\tau$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è:

a) lineare;
b) tempo invariante;
c) causale.

Soluzione

Linearità:

$$\begin{cases} y_1 = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau \\ y_2 = \int_{-\infty}^{2t} x_2(\tau)\,d\tau \end{cases} \Rightarrow \; y(t) = \int_{-\infty}^{2t} \{a x_1(\tau) + b x_2(\tau)\}\,d\tau = a y_1(t) + b y_2(t)$$

il sistema è lineare.

Tempo invarianza:

$$y_1 = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau)\,d\tau \;\Rightarrow\; y(t) = \int_{-\infty}^{2t} x_1(\tau - t_0)\,d\tau = \int_{-\infty}^{2t-t_0} x_1(\alpha)\,d\alpha \neq y(t - t_0)$$

il sistema non è tempo invariante

Causalità:

Se $t > 0$, per fornire $y(t)$ il sistema necessita dei valori di $x(t)$ fino a $\tau = 2t > t$. Pertanto il sistema non è causale

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo invariante ha la risposta impulsiva indicata in figura 1.a. Al suo ingresso è posto il segnale $x(t)$ mostrato in figura 1.b. Disegnare la risposta $y(t)$.

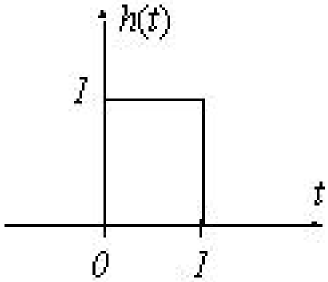


Fig. 1.a

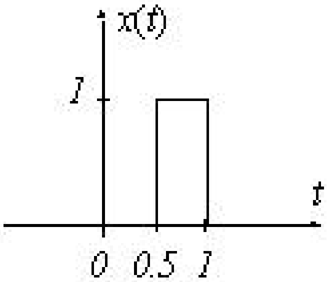
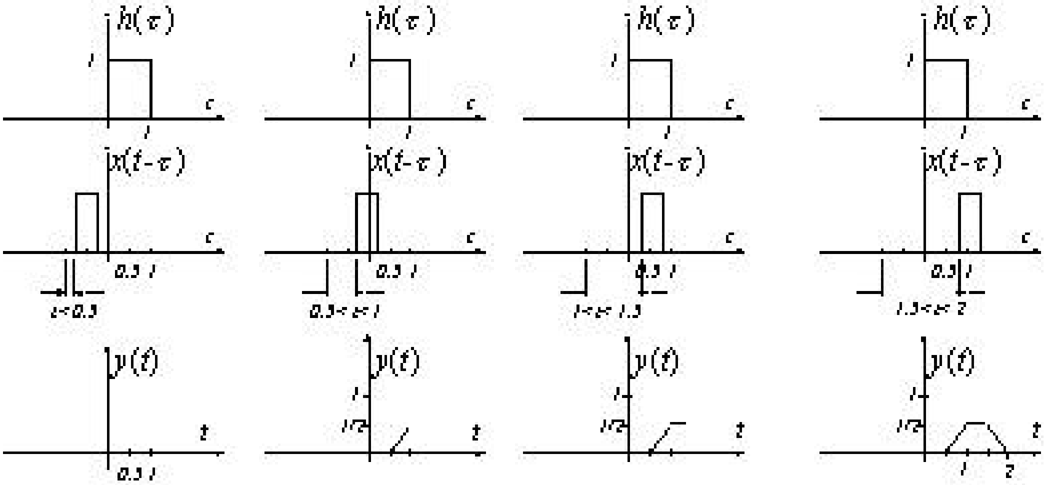


Fig. 1.b

Soluzione:

La risposta può essere determinata con considerazioni geometriche. La figura I mostra la costruzione della risposta nei vari intervalli temporali.



Esercizio N. 3

Calcolare i coefficienti C_0 e C_1 dello sviluppo in serie di Fourier della funzione periodica di figura 2.

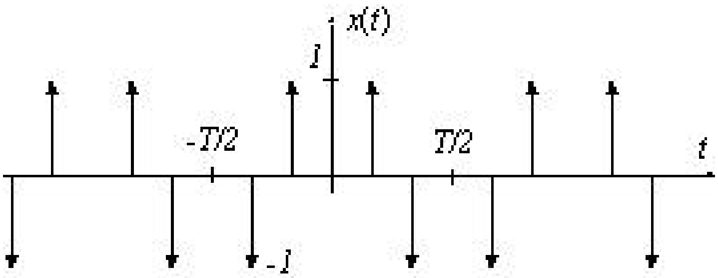


Fig. 2

Soluzione:

Si consideri l'intervallo da $-T/2$ a $T/2$. Su tale intervallo, che coincide con un periodo della funzione $x(t)$, si ha:

$$x(t) = -\delta\left(t + \frac{T}{3}\right) - \delta\left(t - \frac{T}{3}\right) + \delta\left(t + \frac{T}{6}\right) + \delta\left(t - \frac{T}{6}\right)$$

Ricordando l'espressione del generico coefficiente C_k:

$$C_k = \frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2} x(t)\, e^{-jk\frac{2\pi}{T}t}\, dt$$

e le proprietà della funzione $\delta(t)$, si ricava:

$$C_k = \frac{2}{T}\left\{-\cos\left(k\frac{2\pi}{3}\right) + \cos\left(k\frac{\pi}{3}\right)\right\}$$

Pertanto $C_0 = 0$ e $C_1 = \dfrac{2}{T}$

Esercizio N. 4

Un segnale tempo discreto $x[n]$ ha la seguente trasformata di Fourier:

$$X\left(e^{j\Omega}\right) = 1 + j\sin\Omega$$

Dire, giustificando la risposta, se il segnale è reale. Calcolare la parte dispari del segnale $x[n]$.

Soluzione:

La trasformata di Fourier assegnata è una funzione periodica di periodo 2π e soddisfa alla condizione di simmetria :

$$X\left(e^{-j\Omega}\right) = 1 - j\sin\Omega = \left\{X\left(e^{j\Omega}\right)\right\}^*$$

Il segnale $x[n]$ è quindi reale. La sua parte dispari è l'antitrasformata di Fourier della parte immaginaria della $X\left(e^{j\Omega}\right)$, cioè di $j\sin\Omega$. Scrivendo tale funzione in forma esponenziale si ricava immediatamente la sua antitrasformata: Infatti:

$$j\sin\Omega = \frac{1}{2}e^{j\Omega} - \frac{1}{2}e^{-j\Omega} \Rightarrow x_d[n] = \frac{1}{2}\delta[n+1] - \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

Esercizio N. 5

Un segnale $x(t)$ ha per trasformata di Fourier la funzione $X(f)=\dfrac{3}{2+4\pi^2 f^2}$. Calcolare la trasformata di Fourier del segnale $y(t)=x\left(\dfrac{1-t}{2}\right)$.

Soluzione:

Il segnale $y(t)=x\left(\dfrac{1-t}{2}\right)$ è ottenuto da $x(t)$ attraverso la seguente successione di trasformazioni eseguite sull'argomento:

a) $t \Rightarrow -t$

b) $t \Rightarrow \dfrac{t}{2}$

c) $t \Rightarrow t-1$

Ciascuna trasformazione modifica la trasformata originaria $X(f)$ secondo regole semplici: si avrà:

a) $x(-t) \leftrightarrow \{X(f)\}^* = \dfrac{3}{2+4\pi^2 f^2}$

b) $x\left(-\dfrac{t}{2}\right) \leftrightarrow 2\{X(2f)\}^* = \dfrac{6}{2+16\pi^2 f^2}$

c) $x\left(\dfrac{1-t}{2}\right) \leftrightarrow 2\{X(2f)\}^* e^{-j2\pi f} = \dfrac{6e^{-j2\pi f}}{2+16\pi^2 f^2} = \dfrac{3e^{-j2\pi f}}{1+8\pi^2 f^2}$