ESAME DI TEORIA DEI SEGNALI

Appello del 28 - 29 gennaio 2002

Prova scritta

<u>Esercizio N. 1</u>

Un sistema lineare tempo-discreto risponde all'impulso $\boldsymbol{d}[n-n_0]$ con la funzione:

$$h[n,n_0]=u[n-n_0]-u[n-2n_0]$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è:

a) tempo invariante;
b) causale.

<u>Soluzione</u>

a) Il sistema non è tempo invariante, poiché al segnale $x[n-m]$ risponde con:

$$y_m[n]=$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k-m](u[n-k]-u[n-2k])=\sum_{k'=-\infty}^{+\infty}x[k'](u[n-m-k']-u[n-2m-2k'])$$

mentre $y[n-m]=\sum_{k-\infty}^{+\infty}x[k](u[n-k-m]-u[n-m-2k])$

b) Il sistema non è causale: se, ad esempio, si applica al suo ingresso un impulso centrato in $n=-m \quad (m>0)$, la sua risposta inizia per $n=-2m$.

<u>Esercizio N. 2</u>

In figura 1 è riportata la cascata di due sistemi lineari tempo invarianti. Il sistema A ha risposta impulsiva $h_A(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}(\boldsymbol{a})^k\boldsymbol{d}(t-kT)$, con $|\boldsymbol{a}|<1$. Determinare quale deve essere la risposta impulsiva di B, affinché il sistema complessivo abbia risposta impulsiva pari a $\boldsymbol{d}(t)$.

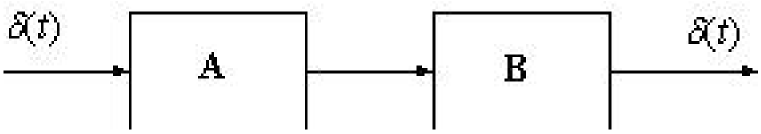

Fig. 1

Soluzione

La risposta in frequenza del sistema complessivo dovrà essere $H(f)=1$. Poiché quella del sistema A è:

$$H_A(f)=\sum_{k=0}^{+\infty}\alpha^k e^{-j2\pi fkT}=\frac{1}{1-\alpha e^{-j2\pi fT}}$$

quella del sistema B sarà:

$$H_B(f)=\frac{1}{H_A(f)}=1-\alpha e^{-j2\pi fT}$$

cui corrisponde la risposta impulsiva $h_B(t)=\delta(t)-\alpha\delta(t-T)$.

Esercizio N. 3 **(per le lauree triennali)**

Un sistema LTI tempo discreto ha risposta in frequenza:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=1+e^{-j\frac{\Omega}{2}}+e^{-j\Omega} \quad \text{per } |\Omega|\le\pi$$

Dire quanto vale la sua risposta impulsiva per $n=0$ e per $n=1$.

Soluzione

La risposta in frequenza è somma di tre termini. Le risposte impulsive corrispondenti al primo e al terzo termine sono rispettivamente $\delta[n]$ e $\delta[n-1]$. Basterà pertanto calcolare per $n=0$ e per $n=1$ la risposta impulsiva che compete al termine $e^{-j\frac{\Omega}{2}}$. Risulta:

$$h'[0]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{-j\frac{\Omega}{2}}d\Omega \qquad h'[1]=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{j\frac{\Omega}{2}}d\Omega$$

Entrambi questi integrali corrispondono a :

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\cos\left(\frac{\Omega}{2}\right)d\Omega=\frac{2}{\pi}$$

In conclusione: $h[0]=h[1]=1+\dfrac{2}{\pi}$

Esercizio N. 3 **(per la laurea quinquennale)**

Si consideri la funzione:

$$H(z) = \frac{z-1}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z^2-4z+5\right)}$$

in cui z è una variabile complessa. Quanti sono i sistemi lineari temo invariante che possono avere $H(z)$ come funzione di trasferimento?. Per ognuno di essi dire se è stabile e se è causale (giustificare le risposte).

Soluzione

La funzione $H(z)$ ha un polo in $z = \frac{1}{2}$ ed una coppia di poli complessi coniugati in $z = 2 \pm j$. Questi ultimi hanno modulo pari a $\sqrt{5}$. Il diagramma zeri-poli di $H(z)$ è dunque quello riportato in figura I. Le possibili regioni di convergenza sono tre, caratterizzate da:

a) $|z| < \frac{1}{2}$

b) $\frac{1}{2} < |z| < \sqrt{5}$

c) $|z| > \sqrt{5}$

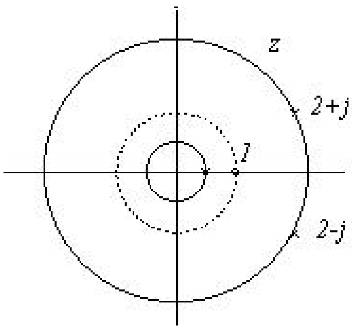

Fig. I

Ad ogni regione di convergenza corrisponde una diversa risposta impulsiva. La regione a) è pertinente ad un segnale sinistro e quindi il relativo sistema non è causale. Esso non è nemmeno stabile, poiché quella regione non include la circonferenza di raggio unitario.

La regione b) è relativa a un segnale bilaterale: si tratta pertanto di un sistema non causale, ma stabile, poiché la regione include la circonferenza di raggio unitario.

Infine la regione c) è relativa ad un segnale destro. Poiché il numeratore di $H(z)$ è un polinomio in z di grado inferiore a quello del denominatore, questo segnale assumerà valori diversi da zero a partire da $n > 0$. Il sistema che ha questo segnale come risposta impulsiva è dunque causale. Esso però non è stabile, poiché anche la regione c) non include la circonferenza di raggio unitario.

Esercizio N. 4

In una centrale telefonica si è visto che la probabilità che la durata di una conversazione telefonica non superi t minuti è data da:

$$F(t) = \left(1 - e^{-\frac{t}{3}}\right)u(t)$$

Calcolare la densità di probabilità della variabile aleatoria T (durata in minuti di una conversazione telefonica), il suo valore medio e la sua varianza.

Soluzione

La funzione $F(t)$ rappresenta la funzione di distribuzione della variabile aleatoria T. Infatti :

$$F(t) = P[T \le t]$$

La densità di probabilità di T è data dalla derivata di $F(t)$, e quindi:

$$f_T(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}u(t)$$

Il valore medio di T è:

$$T_m = \int_0^{+\infty} t\frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}dt = 3$$

Analogamente la sua varianza risulta:

$$s_T^2 = \int_0^{+\infty} (t-3)^2 \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}dt = 9$$

Esercizio N. 5

Un processo aleatori stazionario in senso lato ha una funzione di autocorrelazione $R_x(t) = \boldsymbol{a}\boldsymbol{d}(t)$. Esso è posto all'ingresso di un filtro con risposta impulsiva $h(t) = e^{-bt}u(t)$. Calcolare la potenza media del processo di uscita.

Soluzione

Detto $y(t)$ il processo di uscita, la sua funzione di autocorrelazione è data da:

$$R_y(\boldsymbol{t}) = R_x(\boldsymbol{t}) \otimes h(\boldsymbol{t}) \otimes h(-\boldsymbol{t})$$

Vista la particolare espressione di $R_x(\boldsymbol{t})$, la $R_y(\boldsymbol{t})$ si riduce alla convoluzione tra $h(\boldsymbol{t})$ e $h(-\boldsymbol{t})$, moltiplicata per $\boldsymbol{a}$. Poiché la potenza media coincide con $R_y(0)$, si avrà:

$$P_m = R_y(0) = \boldsymbol{a}\int_0^{+\infty} e^{-2bt}dt = \frac{\boldsymbol{a}}{2b}$$

<u>Esercizio N. 6</u>

Il processo aleatorio $x(t)$ ha la densità spettrale di potenza riportata in figura 2 ed espressa da:

$$S_x(f) = \begin{cases} sinc^2\left(\dfrac{f}{f_M}\right) & \text{per } |f| < f_M \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

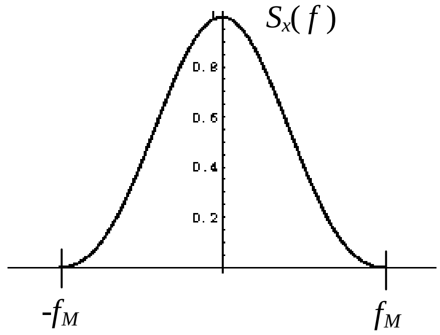

Fig. 2

Esso viene fatto passare attraverso un derivatore ideale. Calcolare la potenza media del processo di uscita.

<u>Soluzione</u>

Un derivatore ideale è caratterizzato da una risposta in frequenza $H(f) = j2\boldsymbol{p}f$. Pertanto la densità spettrale di potenza del processo di uscita è data da:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2 = 4\boldsymbol{p}^2 f^2 \frac{\sin^2\left(\boldsymbol{p}\dfrac{f}{f_M}\right)}{\left(\boldsymbol{p}\dfrac{f}{f_M}\right)^2} = 4 f_M^2 \sin^2\left(\boldsymbol{p}\frac{f}{f_M}\right)$$

Per calcolare la potenza del processo di uscita basta integrare la funzione $S_y(f)$ tra $-f_M$ e f_M:

$$P_U = 4 f_M^2 \int_{-f_M}^{+f_M} \sin^2\left(\boldsymbol{p}\frac{f}{f_M}\right)df = 2 f_M^2 \int_{-f_M}^{+f_M} 1 - \cos\left(2\boldsymbol{p}\frac{f}{f_M}\right)df = 4 f_M^3$$