Teoria dei Segnali
(Appello del 17 giugno 2002)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = \cos(2\pi\ f_0 t)u(t)$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è stabile.
Valutare la sua risposta del sistema al segnale $x(t) = u(t)$.

Soluzione

Il sistema non è stabile: infatti $\int_0^{+\infty} |\cos(2\pi\ f_0 t)| dt \to \infty$

Per la proprietà commutativa dell'integrale di convoluzione, la risposta del sistema al segnale $u(t)$ è identica a quella prodotta da un sistema con risposta impulsiva $u(t)$, avente all'ingresso il segnale $\cos(2\pi\ f_0 t)u(t)$. Tale sistema è un integratore e quindi la risposta cercata è:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{t} \cos(2\pi\ f_0 \tau)u(\tau)d\tau = \int_0^t \cos(2\pi\ f_0 \tau)d\tau = \frac{\sin(2\pi\ f_0\ t)}{2\pi\ f_0}$$

Esercizio N. 2

Il segnale periodico tempo discreto di figura 1a è applicato ad un sistema LTI avente la risposta in frequenza riportata nella figura 1b. Determinare il segnale in uscita.

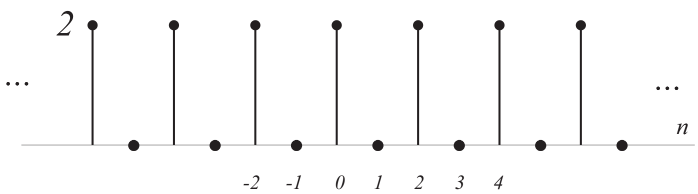

Fig. 1a

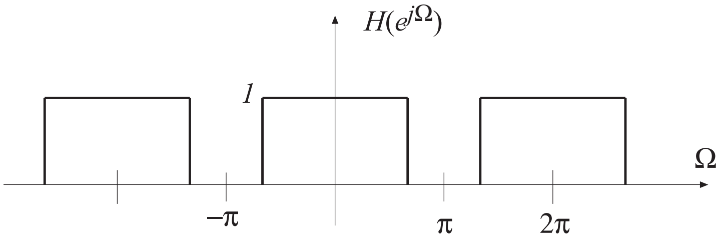

Fig. 1b

Soluzione

Il segnale di figura 1a è periodico di periodo 2. Nel suo sviluppo in serie di Fourier appaiono solamente due componenti, una a frequenza *0*, di ampiezza unitaria, l'altra a frequenza $\Omega_0 = \pi$. Il filtro con risposta in frequenza pari a quella di figura 1b lascia passare inalterata la componente continua e blocca la componente a frequenza $\Omega_0 = \pi$. Pertanto all'uscita ci sarà il segnale $y[n] = 1$.

Esercizio N. 3

Sapendo che il segnale tempo discreto $x[n]$ ha lo spettro riportato in figura 2, disegnare con cura lo spettro del segnale $y[n] = x[n]p[n]$, in cui:

$$p[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta[n - 3k]$$

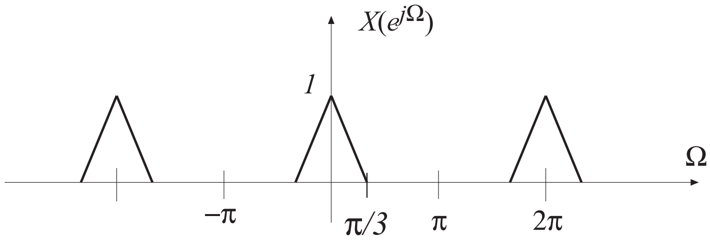

Fig. 2

Soluzione

Il segnale $y[n]$ è la versione campionata di $x[n]$, ottenuta con periodo di campionamento $N_c = 3$. Lo spettro risultante sarà costituito da repliche di $X\left(e^{j\Omega}\right)$ attorno alle frequenze 0, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, scalate in ampiezza nel rapporto $1/3$. Lo spettro di $y[n]$ sarà quello riportato in figura I.

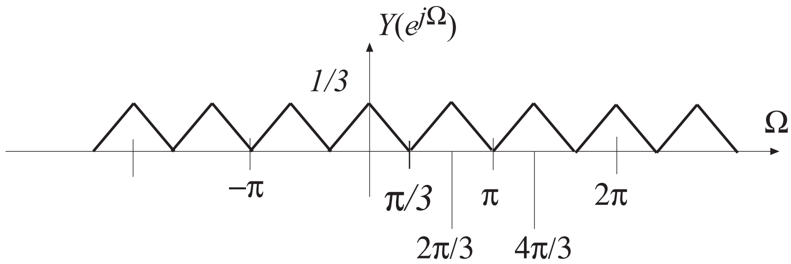

Fig. I

Esercizio N. 4

All'interno del cerchio di raggio $X^2 + Y^2 \le r^2$ le due variabili aleatorie $\boldsymbol{X}$ e $\boldsymbol{Y}$ hanno densità di probabilità congiunta pari a :

$$p_{\boldsymbol{XY}}(x, y) = \begin{cases} 2|xy|/r^4 & x^2 + y^2 \le r^2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Calcolare le densità di probabilità $p_{\boldsymbol{X}}(x)$ e $p_{\boldsymbol{Y}}(x)$ delle due variabili aleatorie e dire se esse sono indipendenti o no.

Soluzione

Le densità di probabilità $p_{\boldsymbol{X}}(x)$ e $p_{\boldsymbol{Y}}(x)$ (dette 'marginali') sono date dai seguenti integrali:

$$p_X(x) = \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\frac{|xy|}{r^4}\,dy \qquad\qquad p_Y(y) = \int_{-\sqrt{r^2-y^2}}^{\sqrt{r^2-y^2}} 2\frac{|xy|}{r^4}\,dx$$

Vista la perfetta simmetria delle due densità di probabilità, è sufficiente valutare uno solo dei due integrali.

$$p_X(x) = \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} 2\frac{|xy|}{r^4}\,dy = 2\frac{|x|}{r^4}\int_0^{\sqrt{r^2-x^2}} 2y\,dy = 2\frac{|x|}{r^4}\left(r^2 - x^2\right) \quad \text{per} -r \le x \le r$$

$$p_X(x) = 0 \qquad \text{altrove}$$

Analogamente

$$p_Y(y) = 2\frac{|y|}{r^4}\left(r^2 - y^2\right) \quad \text{per} -r \le y \le r$$

$$p_Y(y) = 0 \qquad \text{altrove}$$

Poiché $p_X(x)p_Y(y) \ne p_{XY}(x, y)$, le due variabili aleatorie non sono indipendenti.

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario $x(t)$ con funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)=e^{-|\tau|}$ viene inviato a un filtro passa basso ideale con frequenza di taglio f_c. Quanto deve valere f_c affinché il processo in uscita abbia potenza media pari a metà di quella di $x(t)$?

Soluzione

La potenza media del processo all'ingresso del filtro vale $R_x(0)$: pertanto essa è pari a 1. La sua densità spettrale di potenza è data dalla trasformata di Fourier di $R_x(\tau)$ e quindi:

$$S_x(f)=\frac{2}{1+4\pi^2 f^2}$$

La potenza media del processo di uscita è data da:

$$P_y = \int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)|H(f)|^2 df = \int_{-f_c}^{f_c} \frac{2}{1+4\pi^2 f^2} df = \frac{1}{\pi}\int_{-2\pi f_c}^{2\pi f_c} \frac{1}{1+x^2} dx$$

$$= \frac{1}{\pi} \arctan(x)\Big|_{-2\pi f_c}^{2\pi f_c} = \frac{2}{\pi} \arctan(2\pi f_c)$$

Affinché tale potenza risulti pari a $1/2$ dovrà essere $f_c = \dfrac{1}{2\pi}$

Esercizio N. 6

Un rumore gaussiano bianco con densità spettrale di potenza bilatera pari a $\eta/2$ è applicato a un sistema LTI con risposta impulsiva riportata in figura 3. Disegnare con cura la funzione di autocorrelazione del processo di uscita.

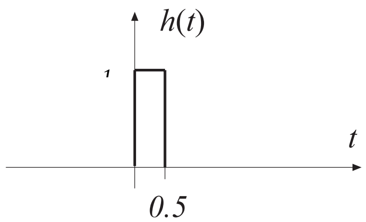

Fig. 3

Soluzione

Il rumore gaussiano bianco ha una funzione di autocorrelazione $R_x(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau)$. La funzione di autocorrelazione del processo di uscita è legata a $R_x(\tau)$ dalla relazione:

$$R_y(\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

che in questo caso diventa:

$$R_y(\tau) = \frac{\eta}{2} h(\tau) \otimes h(-\tau)$$

Vista la particolare forma di $h(t)$, la funzione $R_y(\tau)$ sarà come indicato in figura II.

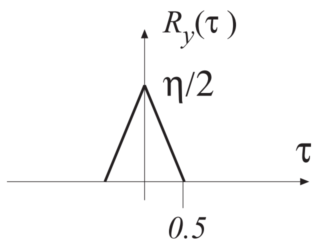

Fig. II