ESAME DI TEORIA DEI SEGNALI

Appello del 12 settembre 2002

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo invariante risponde al segnale $x_1(t)$ con il segnale $y_1(t)$ (figura 1). Quale sarà la sua risposta al segnale $x_2(t)$?

(*Che legame c'è tra i segnali* $x_2(t)$ *e* $y_1(t)$ *?*)

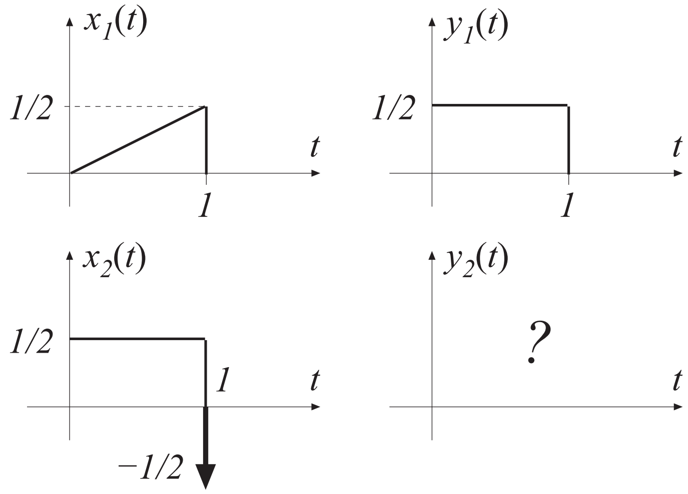

Fig. 1

Soluzione

Poichè $x_2(t)=\frac{dx_1(t)}{dt}$, la risposta $y_2(t)$ corrisponderà alla derivata del segnale $y_1(t)$. Tale derivata è costituita dai due impulsi ideali mostrati in figura I.

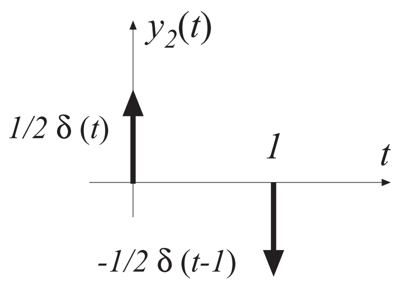

Fig. I

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto causale è retto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n]-y[n-1]=x[n-2]-x[n-3]$$

Determinare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

Eseguendo la trasformata di Fourier dei due membri dell'equazione alle differenze si ottiene:

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)\left(1-e^{-j\Omega}\right)=X\left(e^{j\Omega}\right)\left(e^{-j2\Omega}-e^{-j3\Omega}\right)$$

e pertanto la risposta in frequenza del sistema è:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{e^{-j2\Omega}-e^{-j3\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}$$

Essa è la trasformata della funzione $u[n-2]-u[n-3]$. La risposta impulsiva è dunque pari a $\delta[n-2]$

Esercizio N. 3

In figura 2 è rappresentata la risposta impulsiva di un sistema lineare tempo invariante. All'istante $t=0$ al suo ingresso viene applicato un impulso rettangolare di ampiezza unitaria e di durata $10\ s$. Disegnare con cura la risposta del sistema.

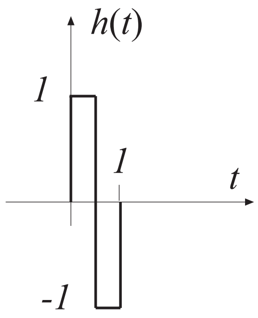

Fig. 2

Soluzione

Il segnale di ingresso è la differenza di due gradini unitari: $x(t) = u(t) - u(t - 10)$. La risposta è facilmente calcolabile con la convoluzione tra $x(t)$ e $h(t)$.

Poiché la convoluzione tra un segnale ed un gradino unitario corrisponde all'integrale corrente del segnale stesso, la risposta sarà costituita dalla differenza tra l'integrale di $h(t)$ e lo stesso integrale traslato di $10\ s$. La risposta sarà pertanto quella indicata in figura II.

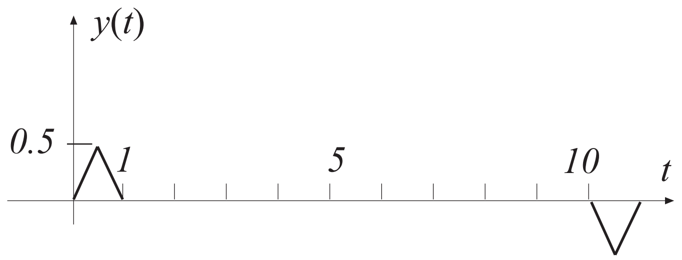

Fig. II

Esercizio N. 4

In un PC il numero *M* di moduli di memoria dipende dal numero *A* di programmi che l'utente desidera siano contemporaneamente attivi. Nella tabella seguente è indicata la corrispondenza tra *M* ed *A* e le probabilità dei possibili valori della variabile aleatoria *A*. Calcolare i valori medi μ_A e μ_M, rispettivamente delle variabili aleatorie *A* ed *M*. Detta *g* la funzione che lega *M* ad *A* ($M = g(A)$), dire se $\mu_M = g(\mu_A)$.

A	*P*[*A*]	*M*
1	0.4	4
2	0.3	4
3	0.2	6
4	0.1	8
>4	0	

Soluzione

Valore medio di *A*:

$$\mu_A = 1 \times 0.4 + 2 \times 0.3 + 3 \times 0.2 + 4 \times 0.1 = 2$$

Valore medio di M:

$$\mu_M = 4 \times 0.4 + 4 \times 0.3 + 6 \times 0.2 + 8 \times 0.1 = 4.8$$

La funzione g è così definita:

$$g(A)=\begin{cases} 4 & \text{per } A=1,2 \\ 6 & \text{per } A=3 \\ 8 & \text{per } A=4 \end{cases}$$

Risulta quindi: $g(\mu_A)=4 \neq \mu_M$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario ha la funzione di autocorrelazione indicata in figura 3. Esso viene filtrato da un sistema LTI avente risposta in frequenza $H(f)= j2\pi f$. Disegnare con cura la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio all'uscita del sistema.

(Che operazione esegue il sistema caratterizzato da quella risposta in frequenza ?)

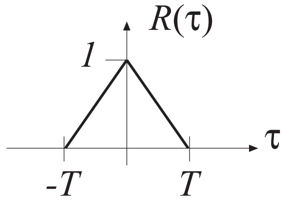

Fig. 3

Soluzione

Il sistema LTI è un derivatore, avente una risposta impulsiva pari a $\delta'(t)$. La funzione di autocorrelazione del processo aleatorio all'uscita è legata a quella del processo posto all'ingresso dalla relazione:

$$R_u(\tau)= R(\tau)\otimes\delta'(\tau)\otimes\delta'(-\tau)$$

Di conseguenza $R_u(\tau)$ è data da $-\dfrac{d^2R(\tau)}{d\tau^2}$ (si ricordi che $\delta'(-\tau)=-\delta'(\tau)$) e risulterà come indicato in figura III:

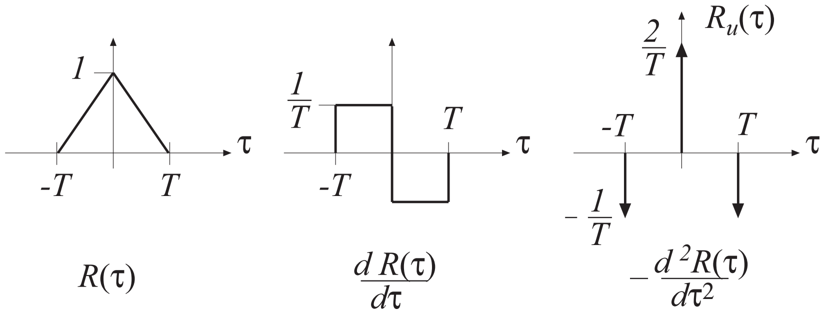

Fig. II

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio $\{x(t)\}$stazionario gaussiano è caratterizzato dalla seguente densità di probabilità del primo ordine:

$$p_x(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{4} \right)$$

Esso ha una densità spettrale di potenza $S(f)$a banda limitata tra *–4 kHz* e *+4 kHz* , ove è costante e pari a *C*. Dire qual è il valore di *C*.

Soluzione

L'integrale della densità spettrale di potenza tra *–4 kHz* e *+4 kHz* fornisce la potenza media del processo, che corrisponde anche alla sua varianza *(perché ?)*. Dovendo essere $C \times 8 \cdot 10^3 = \sigma^2 = 2,$ risulta $C = 0.25 \cdot 10^{-3}$ W/Hz.