PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

6 novembre 2002

Esercizio N. 1

In figura 1 è rappresentato il segnale $x(t) = \sin(\pi\ t)$. Disegnare con cura il segnale $y(t) = \sin\left(\pi \left(1 - \frac{t}{3}\right)\right) \cdot \mathrm{rect}\left[\frac{t-3}{6}\right]$

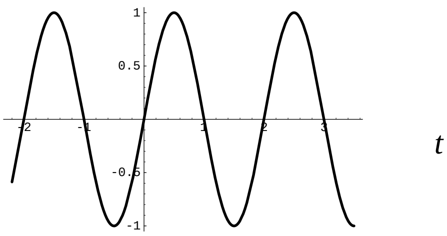
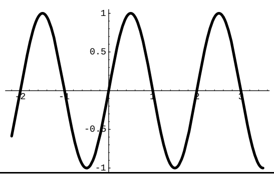
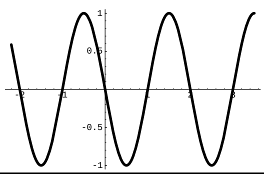
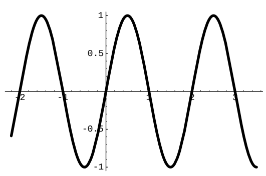
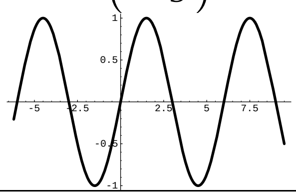
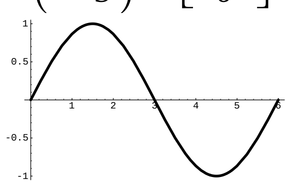


Fig. 1

Soluzione

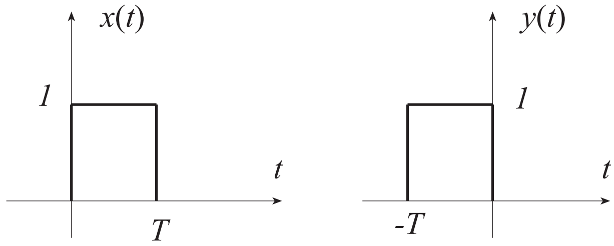
Sul segnale $x(t) = \sin(\pi\ t)$ vanno eseguite (nell'ordine), le seguenti trasformazioni:

$t \to -t \qquad t \to t - 1 \qquad t \to \frac{t}{3}$

$x(t)$ 	$x(-t)$ 	$x(1-t)$ 
$x\left(1 - \frac{t}{3}\right)$ 	$x\left(1 - \frac{t}{3}\right) rect\left[\frac{t-3}{6}\right]$ 	Fig. I

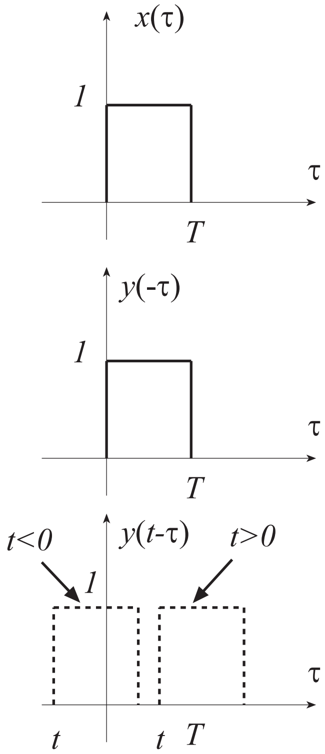
Esercizio N. 2

Eseguire la convoluzione tra i seguenti due segnali:



Soluzione

In figura II è illustrata la sequenza di operazioni suggerita per il calcolo dell'integrale di convoluzione:



$$x(t)\otimes y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)y(t-\tau)d\tau$$

$$=\begin{cases} 0 & per\ t < -T \\ T+t & per\ -T \le t \le 0 \\ T-t & per\ 0 \le t \le T \\ 0 & per\ t > T \end{cases}$$

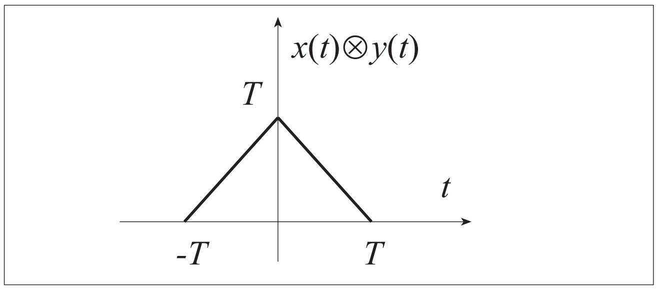


Fig- II

Esercizio N. 3

Un sistema lineare tempo invariante ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t)=e^{-t}\,\mathrm{rect}\left[t-\frac{1}{2}\right]$$

Calcolare la risposta del sistema al gradino unitario $u(t)$

Soluzione

La funzione $h(t)$ ha l'andamento riportato in figura II.

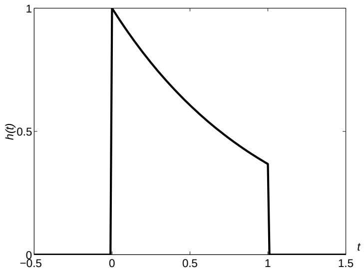


Fig. II

La risposta del sistema al gradino unitario corrisponde all'integrale di $h(t)$. Pertanto:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ \int_0^t e^{-\tau} d\tau = 1 - e^{-t} & 0 \le t < 1 \\ 1 - \frac{1}{e} & t \ge 1 \end{cases}$$

Esercizio N. 4

Calcolare la trasformata di Fourier del segnale riportato in fig. 2.

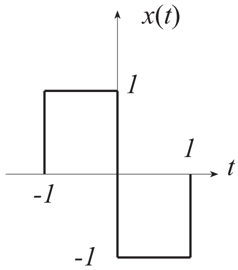


Fig. 2

Soluzione

Il segnale $x(t)$è esprimibile come la somma di due impulsi rettangolari, cioè:

$$x(t) = \mathrm{rect}\left[t + \frac{1}{2}\right] - \mathrm{rect}\left[t - \frac{1}{2}\right]$$

Ricordando che:

$$F\{\text{rect}[t]\} = \text{sinc}(f)$$

e ricorrendo alle proprietà di traslazione nel tempo si ottiene:

$$X(f) = \text{sinc}(f)\left[e^{j2\pi f\frac{1}{2}} - e^{-j2\pi f\frac{1}{2}}\right] = 2j\,\text{sinc}(f)\,sin(\pi f)$$

Esercizio N. 5

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$\frac{1}{2}\delta[n+1] + \delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1]$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è:
a) senza memoria;
b) stabile
c) causale
Disegnare con cura la sua risposta al segnale riportato in figura 3.

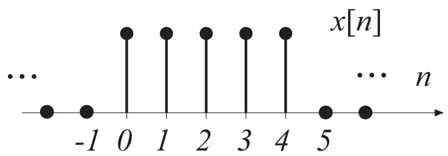


Fig. 3

Soluzione

Il sistema ha memoria, poiché la sua risposta impulsiva non è $K\delta[n]$, con K una costante arbitraria. Esso è stabile, poiché $\sum_n |h[n]| = 2 < \infty$, inoltre non è causale, non essendo verificata la condizione $h[n] = 0$ per $n < 0$.

La risposta del sistema al segnale $x[n]$ è data da $\frac{1}{2}x[n+1] + x[n] + \frac{1}{2}x[n-1]$. Essa ha l'andamento riportato nella figura III:

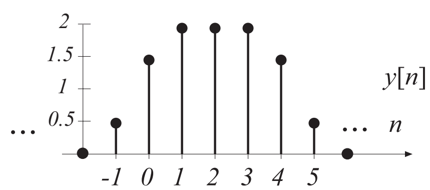


Fig. III

Esercizio N. 6

La risposta in frequenza di un sistema LTI tempo discreto è:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = (1-\cos\Omega)e^{-j2\Omega}$$

Qual è la sua risposta impulsiva?

Soluzione

La funzione $H\left(e^{j\Omega}\right)$ può essere posta nella forma seguente:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}e^{j\Omega} - \frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)e^{-j2\Omega} = -\frac{1}{2}e^{-j\Omega} + e^{-j2\Omega} - \frac{1}{2}e^{-j3\Omega}$$

Si riconosce che questa è la trasformata di Fourier di:

$$h[n] = -\frac{1}{2}\delta[n-1] + \delta[n-2] - \frac{1}{2}\delta[n-3]$$