Teoria dei Segnali

(Appello del 9 maggio 2003)
Riservato a studenti fuoricorso

Prova scritta

<u>Esercizio N. 1</u>

Calcolare la risposta impulsiva del sistema LTI rappresentato in figura 1.

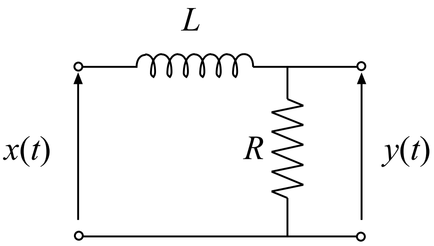

Fig. 1

Soluzione

Detta $i(t)$ la corrente che attraversa la resistenza *R*, $y(t)=Ri(t)$. Il sistema è retto dalla seguente equazione differenziale:

$$\frac{L}{R}\frac{d[Ri(t)]}{dt}+Ri(t)=x(t)$$

$$\frac{L}{R}\frac{dy(t)}{dt}+y(t)=x(t)$$

Eseguendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri dell'equazione, si ottiene:

$$\frac{L}{R}j\omega Y(\omega)+Y(\omega)=X(\omega) \quad \rightarrow \quad H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\frac{1}{1+j\frac{L}{R}\omega}=\frac{R}{L}\frac{1}{\frac{R}{L}+j\omega},$$

cui corrisponde la risposta impulsiva $\frac{R}{L}e^{-\frac{R}{L}t}u(t)$

<u>Esercizio N. 2</u>

Un sistema LTI tempo discreto ha come risposta in frequenza la funzione:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$$

Calcolare la risposta del sistema al gradino unitario.

Soluzione

La risposta impulsiva del sistema è la funzione $h[n]=\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$. La risposta del sistema al gradino unitario corrisponde alla somma corrente del segnale $h[n]$. Pertanto:

$$y[n]=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right)u[n]$$

<u>Esercizio N. 3</u>

Si consideri il segnale:

$$s(t)=\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]\cos(2\pi f_0 t)+\mathrm{rect}\left[\frac{t-4T}{T}\right]\sin(2\pi f_0 t)$$

con $T>>\frac{1}{f_0}$. Determinare lo spettro del suo inviluppo complesso.

Soluzione

Il segnale $s(t)$ è già posto in forma canonica, per cui è immediato riconoscere il suo inviluppo complesso, che è:

$$\tilde{s}(t)=\mathrm{rect}\left[\frac{t}{T}\right]-j\,\mathrm{rect}\left[\frac{t-4T}{T}\right]$$

A tale segnale corrisponde lo spettro:

$$T\,\mathrm{sinc}(fT)\left(1-je^{-j8\pi fT}\right)$$

<u>Esercizio N. 4</u> *(riservato agli studenti della laurea triennale)*

Due variabili aleatorie *X* e *Y* hanno la seguente densità di probabilità congiunta:

$$f_{XY}(x,y)=\begin{cases}Ce^{-(2x+3y)} & x\geq 0,\ y\geq 0\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Determinare la costante *C*. Dire, giustificando la risposta, se le due variabili sono tra loro indipendenti; calcolare la probabilità dei seguenti due eventi:

$$A=\{X+Y\leq 1\},\qquad B=\{X+Y=1\}$$

Soluzione

La costante *C* viene determinata dalla condizione $\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{XY}(x,y)dxdy=1$. Nel caso specifico si ha:

$$C\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} e^{-2x}e^{-3y}dxdy = 1 \to C = 6$$

Le due variabili aleatorie risultano indipendenti. Infatti:

$$f_X(x) = 6\int_0^{+\infty} e^{-2x}e^{-3y}dy = \begin{cases} 2e^{-2x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$f_Y(y) = 6\int_0^{+\infty} e^{-2x}e^{-3y}dx = \begin{cases} 3e^{-3y} & y \geq 0 \\ 0 & y < 0 \end{cases}$$

$$f_{XY}(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$$

L'evento *A* è definito dalle coppie (*x*,*y*) appartenenti al triangolo ombreggiato di figura I.

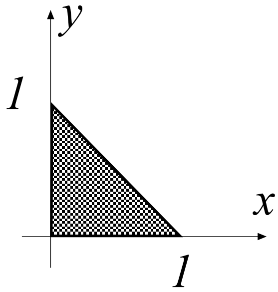

Fig. I

$$P(A) = 6\int_0^1 e^{-3y}\left(\int_0^{1-y} e^{-2x}dx\right)dy = 2e^{-3} - 3e^{-2} + 1 = 0.693568$$

L'evento *B*, essendo caratterizzato da coppie (*x*,*y*) poste su un segmento (dominio con area nulla), ha probabilità nulla.

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

Un sistema tempo discreto LTI è retto dalla seguente equazione alle differenze :

$$y[n] + y[n-1] + \frac{1}{2}y[n-2] = x[n-1] - \frac{1}{2}x[n-2]$$

Calcolare la relativa funzione di sistema $H(z)$, disegnarne il diagramma zeri-poli, dire quanti sono i possibili sistemi LTI caratterizzati da $H(z)$ e per ciascuno di essi dire se è stabile. Inoltre per ogni sistema dire per quale intervallo di valori della variabile *n* la risposta impulsiva è sicuramente nulla.

Soluzione

Calcoliamo innanzitutto la funzione $H(z)$, trasformando entrambi i membri dell'equazione alle differenze :

$$Y(z)\left[1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}\right]=X(z)\left[z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}\right]$$

$$H(z)=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{1+z^{-1}+\frac{1}{2}z^{-2}}=\frac{z^{-1}-\frac{1}{2}z^{-2}}{\left(1-z_0z^{-1}\right)\left(1-z_0^{*}z^{-1}\right)}$$

essendo $z_0=-\frac{1}{2}+j\frac{1}{2}$

La funzione presenta una coppia di poli complessi coniugati in $z_{1,2}=-\frac{1}{2}\pm j\frac{1}{2}$ e uno zero in $z=\frac{1}{2}$. (Vedi figura II)

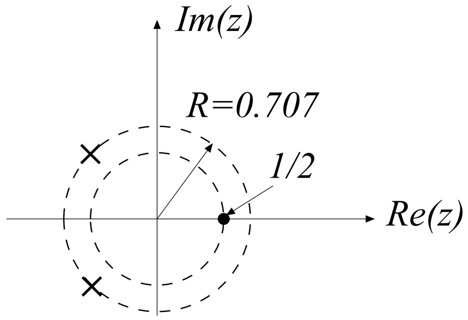

Fig. II

Esistono due sistemi LTI che hanno $H(z)$ come funzione di sistema: il primo è caratterizzato da una regione di convergenza individuata dalla condizione $|z|>\frac{1}{\sqrt{2}}$, ha una risposta impulsiva destra, è stabile (la circonferenza di raggio unitario è inclusa nella regione di convergenza) e, poiché in termini della variabile z il numeratore ha grado di una unità inferiore al denominatore, $h(n)$ è nulla da $n=-\infty$ a $n=1$. Il secondo sistema ha regione di convergenza $|z|<\frac{1}{\sqrt{2}}$, ha una risposta impulsiva sinistra, non è stabile. La sua risposta impulsiva (si provi a valutare i primi termini della divisione lunga) è nulla per $n>0$.

Esercizio N. 5

La generica realizzazione di un processo aleatorio ha la seguente espressione analitica:

$$x(t)=\cos(2\pi f t)\cos(2\pi f_0 t)$$

essendo f una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2 KHz e f_0 una costante pari a 1 MHz.

Si valuti la densità spettrale di potenza del processo aleatorio.

Soluzione

Ogni realizzazione è costituita da due sinusoidi:

$$x(t)=\frac{1}{2}\cos 2\pi(f_0-f)t+\frac{1}{2}\cos 2\pi(f_0+f)t$$

ed è pertanto caratterizzata da una potenza media pari a 0.25 W. Poiché f è uniformemente distribuita tra tra *0* e *2* KHz, la densità spettrale bilatera di potenza avrà la forma indicata in figura II.

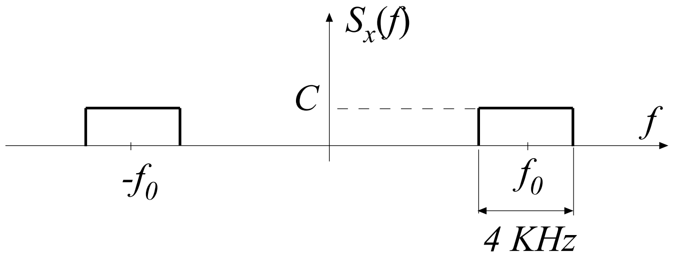

Fig. II

La costante *C* viene determinata dal fatto che:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} S_x(f)df=\frac{1}{4}$$

Risulta quindi $C=\frac{1}{32}10^{-3}$ [W/Hz].

Esercizio N. 6

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio presente all'uscita di un sistema LTI, con risposta impulsiva $h(t)=\delta(t)-\delta(t-T)$, quando al suo ingresso è posto un rumore bianco stazionario con densità spettrale di potenza bilatera pari a 1 W/Hz.

Soluzione

Il processo di rumore bianco posto all'ingresso ha una funzione di autocorrelazione $R_x(\tau)=\delta(\tau)$. Poiché $R_y(\tau)=\delta(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)$, si ha:

$$R_y(\tau)=[\delta(\tau)-\delta(\tau-T)]\otimes[\delta(-\tau)-\delta(-\tau-T)]=2\delta(\tau)-\delta(\tau-T)-\delta(-\tau-T)$$