Teoria dei Segnali

(Appello del 3 giugno 2003)

Prova scritta

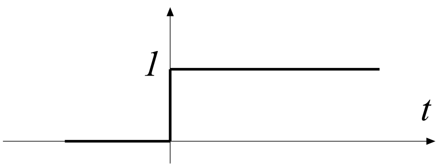
Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta(t-\tau)$ con il segnale $\cos(2\pi\tau\, t)u(t-\tau)$. Disegnare la sua risposta agli impulsi $\delta(t)$ e $\delta(t-1)$. Ricavare la sua risposta al gradino unitario $u(t)$.

Soluzione

La risposta a $\delta(t)$ ($\tau = 0$) è il gradino unitario $u(t)$, mentre quella a $\delta(t-1)$, cioè per $\tau = 1$, è la sinusoide $\cos(2\pi t)u(t-1)$. I corrispondenti andamenti grafici sono rappresentati nella figura I

.



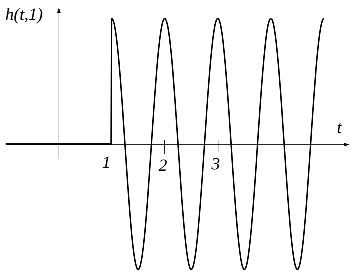


Fig. I

La risposta al gradino unitario è fornita dall'integrale:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau) h(t,\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)\cos(2\pi\tau\, t) u(t-\tau) d\tau$$

$$y(t) = \begin{cases} 0 & per\ t < 0 \\ \displaystyle\int_0^t \cos(2\pi\tau\, t) d\tau = \frac{\sin 2\pi t^2}{2\pi t} & per\ t \geq 0 \end{cases}$$

Esercizio N. 2

In figura 1 sono rappresentati il segnale di ingresso $x(t)$ e il corrispondente segnale di uscita $y(t)$ di un sistema lineare tempo invariante. Disegnare la risposta del sistema al gradino unitario.

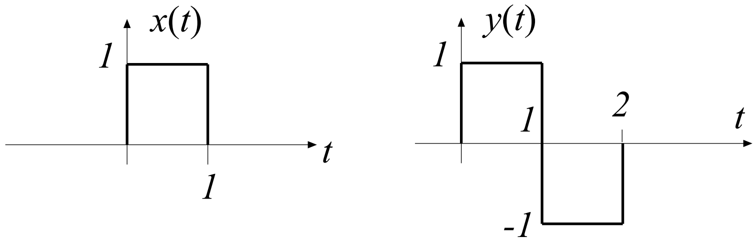


Fig. 1

<u>Soluzione</u>

Poiché $y(t) = x(t) - x(t-1)$, la risposta impulsiva del sistema è

$$h(t) = \delta(t) - \delta(t-1)$$

La risposta al gradino unitario pertanto è pari a $u(t) - u(t-1)$ e coincide con il segnale $x(t)$ di figura 1.

<u>Esercizio N. 3</u>

La risposta in frequenza di un sistema LTI tempo discreto è:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = e^{j2\Omega} + \frac{1}{2 + e^{j\Omega}}$$

Ricavare la sua risposta impulsiva. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è stabile.

<u>Soluzione</u>

Si scriva $H^*\left(e^{j\Omega}\right) = e^{-j2\Omega} + \frac{1}{2}\frac{1}{1 + \frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$. Questa è la trasformata di Fourier di $h[-n]$. Pertanto:

$$h[-n] = \delta[n-2] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n] \quad \Rightarrow \quad h[n] = \delta[-n-2] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{-n} u[-n]$$

<u>Esercizio N. 4</u> *(riservato agli studenti della laurea triennale))*

Data la variabile aleatoria z, uniformemente distribuita tra 0 e 1, si consideri la variabile aleatoria $x = -\ln(1 - z)$.

Calcolare la funzione di distribuzione, la densità di probabilità e il valor medio di x.

Soluzione

Come prima cosa valutiamo la densità di probabilità della variabile aleatoria *x*. Essa assume tutti i valori tra 0 e $+\infty$ ed il grafico della funzione $x = g(u)$ è riportato in figura II.

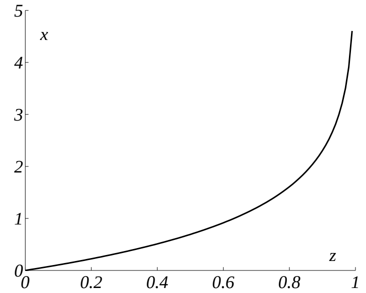


Fig. II

Dalla relazione: $p_x(x) = p_z(z)\dfrac{1}{\left|\dfrac{dg}{dz}\right|}$ si ricava $p_x(x(z)) = 1 - z$ e quindi $p_x(x) = e^{-x}u(x)$.

La corrispondente funzione di distribuzione risulta:

$$F_x(x) = \int_0^x p_x(\alpha)d\alpha = \int_0^x e^{-\alpha}d\alpha = \left(1 - e^{-x}\right)u(x)$$

Infine il valor medio della variabile aleatoria *x* è:

$$E[x] = \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx = 1$$

Esercizio N. 4 *(riservato agli studenti della laurea quinquennale)*

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = \begin{cases} 1 & 0 \le n \le 3 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Si disegni il diagramma zeri-poli della sua funzione di trasferimento $H(z)$ e si calcoli la sua risposta al segnale $x[n] = \cos(\pi\, n)u[n]$.

Soluzione

Poiché $H(z) = \sum_{n=0}^{3} z^{-n}$, risulta $H(z) = \dfrac{1 - z^{-4}}{1 - z^{-1}} = \dfrac{z^4 - 1}{z^3(z - 1)}$. Questa funzione presenta un polo di 3° ordine nell'origine e tre zeri, rispettivamente in $z = -1,\ z = \pm j$.

Pertanto il diagramma zeri-poli e come in fig. III

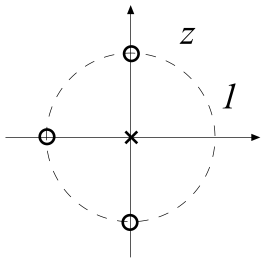


Fig. III

In fig IV sono riportati i segnali $h[n]$ e $x[n]$. Eseguendo la convoluzione tra di essi si ottiene il segnale $y[n]$, rappresentato nella medesima figura.

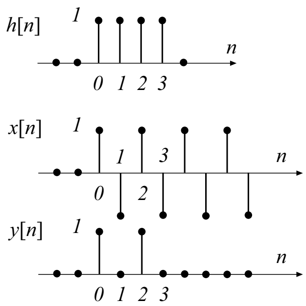


Fig. IV

Esercizio N. 5

Si calcoli il valor medio del processo aleatorio la cui generica realizzazione è:

$$x(t) = \cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

in cui f_0 è una costante e ϕ è una variabile aleatoria distribuita tra $-\pi$ e π con densità di probabilità $p(\phi) = A\cos\frac{\phi}{2}$. (Si determini innanzitutto il valore di A).

Soluzione

Poiché $\int_{-\pi}^{+\pi} \cos\frac{\phi}{2} d\phi = 4$, la costante A vale ¼. Il valor medio del processo sarà:

$$E[x] = \frac{1}{4}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos\frac{\phi}{2}\cos(2\pi f_0 t + \phi)d\phi$$

$$= \frac{1}{8}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{3\phi}{2}\right)d\phi + \frac{1}{8}\int_{-\pi}^{+\pi} \cos\left(2\pi f_0 t + \frac{\phi}{2}\right)d\phi$$

$$= \frac{1}{3}\cos(2\pi f_0 t)$$

Esercizio N. 6

La tensione $x(t)$ applicata all'ingresso del filtro di figura 2 è un processo di rumore bianco con densità spettrale di potenza bilatera pari a *3* μW/Hz. Calcolare la potenza del rumore $y(t)$ all'uscita del filtro.

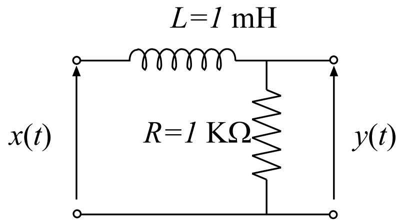


Fig. 2

Soluzione

La densità spettrale del processo $y(t)$ è data da $S_x(f)|H(f)|^2$, vale a dire:

$$S_y(f) = 3\frac{R^2}{R^2 + (2\pi fL)^2} \ \mu\text{W/Hz}$$

La potenza del processo di uscita corrisponde all'integrale della sua densità spettrale di potenza fatto tra $-\infty, +\infty$.

$$P_u = 3\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1 + (2\pi f L/R)^2} df = \frac{3}{2\pi}\frac{R}{L}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+v^2} dv = \frac{3}{2}\frac{R}{L} = 1.5 \text{ W}$$