Teoria dei Segnali

(Appello del 28 gennaio 2004)

Laurea quinquennale

Prova scritta

<u>Esercizio N. 1</u>

I sistemi A e B di figura 1 sono lineari e tempo-invarianti. La risposta impulsiva $h_A(t)$ del sistema A è pari a $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \delta(t-kT)$. Quale deve essere la risposta impulsiva del sistema B, affinché quella del sistema complessivo sia pari a $\delta(t)+\frac{1}{2}\delta(t-T)$?

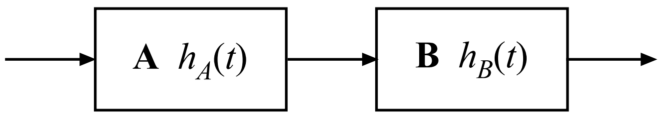

Fig. 1

Soluzione

La risposta in frequenza del sistema A è:

$$H_A(\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k e^{-j\omega kT}=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}e^{-j\omega T}\right)^k=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega T}}$$

Affinché la risposta impulsiva dell'intero sistema sia $\delta(t)+\frac{1}{2}\delta(t-T)$, la risposta in frequenza del sistema B dovrà essere:

$$H_B(\omega)=\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega T}\right)\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega T}\right)=1-\frac{1}{4}e^{-j2\omega T}.$$

Pertanto $h_B(t)=\delta(t)-\frac{1}{4}\delta(t-2T)$.

<u>Esercizio N. 2</u>

Un sistema tempo discreto lineare risponde all'impulso unitario $\delta[n-k]$ con il segnale $h[n,k]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n-k]$. Qual è la risposta del sistema al segnale $x[n]=\left(\frac{1}{3}\right)^n u[n]$?

Soluzione

Il sistema non è tempo-invariante. La risposta è calcolabile attraverso la seguente sommatoria:

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}x[k]h[n,k]=\sum_{0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}u[k]\left(\frac{1}{2}\right)^{n}u[n-k]=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\sum_{0}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{\frac{2}{3}}u[n]=3\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}\right\}u[n]$$

<u>Esercizio N. 3</u>

Un segnale tempo discreto ha lo spettro riportato in figura 2. Disegnare con cura lo spettro del segnale $x[3n]$.

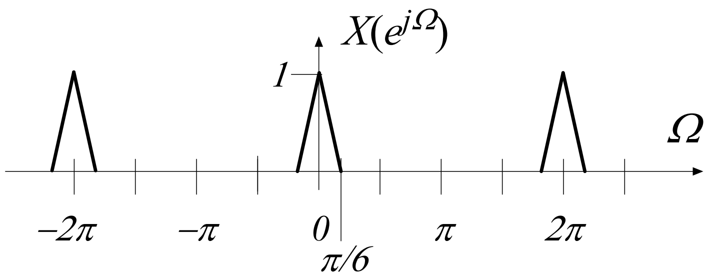

Fig. 2

Soluzione

Il segnale $y[n]=x[3n]$ può essere ottenuto con un campionamento di $x[n]$ con periodo di campionamento N = 3, seguito da una decimazione di ordine 3, che elimina i due zeri tra ciascun campione di $x[n]$. Lo spettro $X_p\left(e^{j\Omega}\right)$ del segnale campionato è riportato nella figura I.

Nella stessa figura è riportato lo spettro di $y[n]=x[3n]$.

Analiticamente si ha:

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x[3n]e^{-j\Omega n}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}x_p[n]e^{-j\frac{\Omega}{3}n}$$

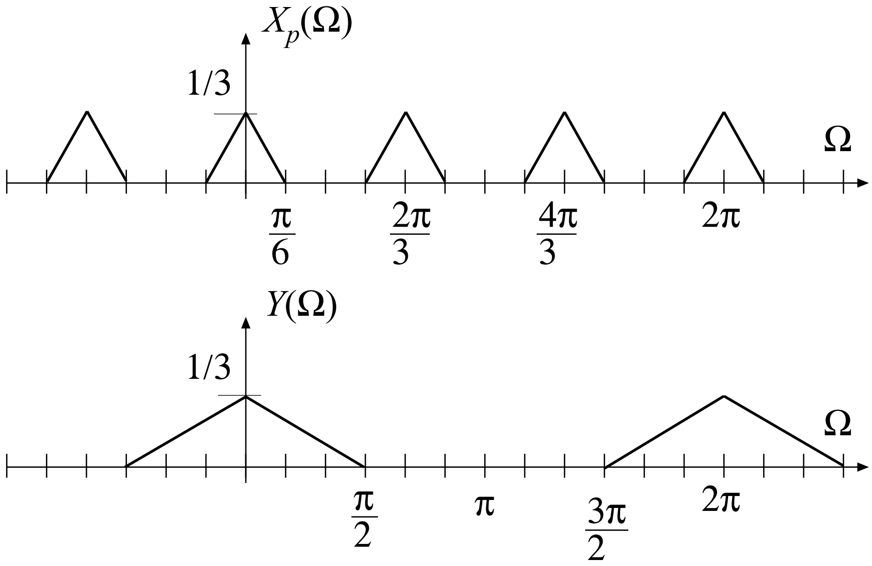

Fig. I

Esercizio N. 4

Come è noto, il gradino unitario tempo discreto ha per trasformata Z la funzione $\frac{z}{z-1}$ (ROC $|z|>1$). Qual è il segnale cui compete, come trasformata Z, la funzione $\frac{1}{(z-1)^2}$ con regione di convergenza $|z|>1$?

Soluzione

La funzione $\frac{1}{(z-1)^2}$ è pari a $-\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right)$. D'altronde, $\frac{1}{z-1}$ è la trasformata di $u[n-1]$ e, per la proprietà della derivazione rispetto a z, $-z\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z-1}\right)=\frac{z}{(z-1)^2}$ è la trasformata di $nu[n-1]$. Quindi $\frac{1}{(z-1)^2}$ è la trasformata di $(n-1)u[n-2]$, che è anche uguale a $(n-1)u[n-1]$.

Esercizio N. 5

Si consideri le tre resistenze connesse in figura 3. Calcolare la potenza di rumore disponibile ai morsetti $a - a'$ su una banda di 100 MHz. (si ricordi che la costante di Boltzmann è pari a 1.38×10^{-23} Joule/Hz).

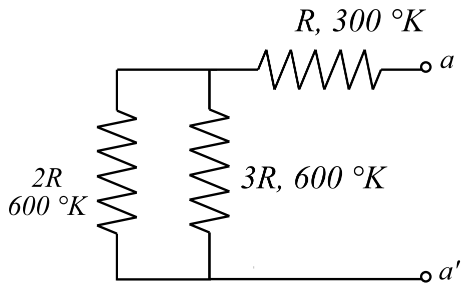

Fig. 3

Soluzione

Le tre resistenze sono equivalenti ad una resistenza di valore R a temperatura di 300 °K in serie ad un'altra di valore (6/5)R, a temperatura di 600 °K . Esse equivalgono ad una resistenza di valore (11/5)R, a temperatura T_{eq} data da:

$$T_{eq} = \alpha_1 \times 300 + \alpha_2 \times 600 = \frac{5}{11} 300 + \frac{6}{11} 600 \cong 464 \quad °\mathrm{K}$$

La potenza disponibile è:

$$P_d = KT_{eq}B = 1.38 \times 10^{-23} \times 464 \times 10^8 = 0.640 \times 10^{-12} \quad \mathrm{W}$$

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio stazionario $x(t)$ ha la seguente densità spettrale di potenza:

$$S_x(f) = \frac{1}{2}\delta(f + f_0) + \frac{1}{2}\delta(f - f_0)$$

Calcolare la funzione di mutua correlazione tra $x(t)$ e $\hat{x}(t)$ (trasformato di Hilbert di $x(t)$)

Soluzione

La funzione di autocorrelazione di $x(t)$ è data da $\cos(2\pi f_0 \tau)$. Poiché:

$$R_{x\hat{x}}(t, t+\tau) = R_x(\tau) \otimes h(\tau) = R_x(\tau) \otimes \frac{1}{\pi\tau}$$

risulta:

$$R_{x\hat{x}}(t, t+\tau) = \hat{R}_x(\tau) = \sin(2\pi f_0 \tau)$$