Teoria dei Segnali

(Appello del 14 settembre 2004)

Prova scritta

Esercizio N. 1

La risposta in frequenza di un sistema LTI tempo discreto è:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1+e^{-j\Omega}}{1-e^{-j\Omega}}$$

Calcolare la risposta al segnale di ingresso $x[n]=\delta[n-1]-\delta[n-2]$.

Soluzione

L'esercizio può essere risolto in vari modi. A titolo di esempio, si può considerare il sistema assegnato come la cascata di due sistemi, aventi rispettivamente risposte in frequenza:

$$H_1\left(e^{j\Omega}\right)=1+e^{-j\Omega}, \quad H_2\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$$

Il primo di essi trasforma il segnale di ingresso nel segnale

$$x_1[n]=\delta[n-1]-\delta[n-3],$$

mentre il secondo esegue la somma corrente di $x_1[n]$, fornendo in uscita il segnale:

$$y[n]=\begin{cases}1 & n=1, n=2\\ 0 & altrove\end{cases}$$

Esercizio N. 2

Il segnale periodico:

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)$$

è posto all'ingresso di un sistema LTI avente risposta impulsiva

$$h(t)=e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$$

Calcolare lo sviluppo in serie di Fourier del segnale di uscita.

Soluzione

I coefficienti a_k dello sviluppo in serie di Fourier del segnale di uscita sono dati da:

$$a_k = c_k H(\omega)\big|_{\omega = k\frac{2\pi}{T}}$$

ove c_k sono i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del segnale di ingresso, $H(\omega)$ è la risposta in frequenza del sistema e T è il periodo. In questo caso si ha:

$$T = 2$$

$$c_k = \frac{1}{T} = \frac{1}{2}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{\frac{1}{2} + j\omega}$$

Pertanto: $a_k = \frac{1}{2}\frac{1}{\frac{1}{2} + jk\pi}$.

Esercizio N. 3

Un processo aleatorio stazionario ha la seguente funzione di autocorrelazione:

$$R_x(\tau) = \frac{2\sin(12\tau)}{\tau}.$$

Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI, la cui risposta impulsiva è:

$$h(t) = \delta(t - t_0),$$

ove t_0 è una costante. Determinare la funzione di autocorrelazione del processo aleatorio all'uscita del sistema.

Soluzione

Anche il processo aleatorio presente all'uscita del sistema è stazionario. Esso corrisponde a quello di ingresso, traslato nel tempo della quantità t_0. Poiché una traslazione temporale trasforma un processo stazionario in se stesso, la funzione di autocorrelazione richiesta coinciderà con $R_x(\tau)$.

Esercizio N. 4

Un rumore gaussiano bianco stazionario, di densità spettrale bilatera di potenza pari $\frac{1}{2}\eta \ W/Hz$ è applicato all'ingresso di un filtro ideale passa basso, con risposta in frequenza data da:

$$H(f)=\begin{cases} 1 & per \ |f|<f_c \\ 0 & per \ |f|>f_c \end{cases}$$

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo all'uscita del filtro.

Soluzione

Del processo di uscita è nota la densità spettrale di potenza, che sarà:

$$S_y(f)=\begin{cases} \frac{1}{2}\eta & per \ |f|<f_c \\ 0 & per \ |f|>f_c \end{cases}$$

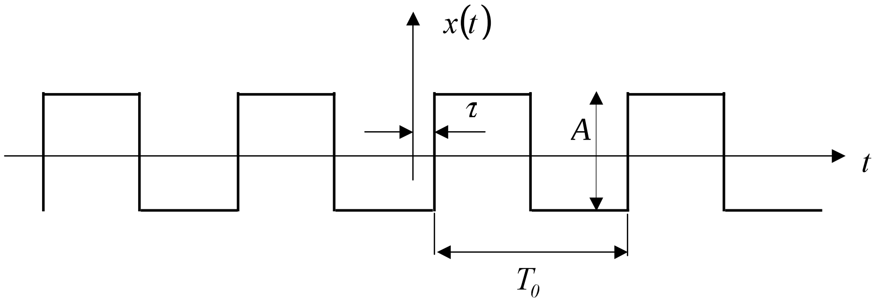
In base al teorema di Wiener-Kintchine ad essa corrisponde la funzione di autocorrelazione

$$R_y(\tau)=f_c\eta\,\mathrm{sinc}(2f_c\tau)$$

Esercizio N. 5

Le realizzazioni di un processo aleatorio sono costituite da onde quadre di ampiezza *A*, periodo T_0 e ritardo casuale τ (vedi figura). Quest'ultimo è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra $-T_0/2$ e $+T_0/2$, mentre A e T_0 sono delle costanti. Esprimere le seguenti densità di probabilità del secondo ordine:

$$p_2\left(x_1,t_1;x_2,t_1+\frac{T_0}{2}\right)$$
$$p_2(x_1,t_1;x_2,t_1+T_0)$$



Soluzione

Le variabili aleatorie distanti temporalmente di $\frac{T_0}{2}$ si possono presentare con i seguenti valori:

$$x_1 = A/2, \qquad x_2 = -A/2 \quad \text{con probabilità } 0.5$$
$$x_1 = -A/2, \qquad x_2 = A/2 \quad \text{con probabilità } 0.5$$

Pertanto $p_2\left(x_1,t_1;x_2,t_1+\frac{T_0}{2}\right)=\frac{1}{2}\delta\left(x_1-\frac{A}{2}\right)\delta\left(x_2+\frac{A}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(x_1+\frac{A}{2}\right)\delta\left(x_2-\frac{A}{2}\right)$

Le variabili aleatorie distanti temporalmente di T_0 possono invece presentarsi con i valori:

$$x_1 = A/2, \qquad x_2 = A/2 \quad \text{con probabilità } 0.5$$
$$x_1 = -A/2, \qquad x_2 = -A/2 \quad \text{con probabilità } 0.5$$

Quindi $p_2(x_1,t_1;x_2,t_1+T_0)=\frac{1}{2}\delta\left(x_1-\frac{A}{2}\right)\delta\left(x_2-\frac{A}{2}\right)+\frac{1}{2}\delta\left(x_1+\frac{A}{2}\right)\delta\left(x_2+\frac{A}{2}\right)$

<u>Esercizio N. 6</u>

Si consideri il processo aleatorio così definito:

$$x(t)=\cos(2\pi\, f\, t)$$

ove f è una variabile aleatoria che assume valori positivi con densità di probabilità $p_f(f)$ così definita:

$$p_f(f)=\begin{cases} Af & 0<f\le 1000 \;\; Hz \\ 0 & f>1000 \;\; Hz \end{cases}$$

Determinare la costante *A* e valutare la densità spettrale di potenza del processo.

Soluzione

Deve essere:

$$\int_0^{1000} Af\,df = \frac{A}{2}f^2\Big|_0^{1000} = 1$$

per cui $A = 2\times 10^{-6}$

Qualsiasi realizzazione è costituita da una sinusoide a frequenza *f*, caratterizzata da una potenza media pari a 0.5 W. Questo valore è pari anche alla potenza media del processo.

La densità spettrale unilatera di potenza avrà un andamento proporzionale alla densità di probabilità della variabile f ed il suo integrale tra $f = 0$ e $f = 1000\ Hz$ dovrà corrispondere alla potenza media del processo. Pertanto $S_x(f) = Bf$, con $B = 10^{-6}$.