Teoria dei Segnali
(Appello del 20 luglio 2005)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo continuo risponde all'impulso ideale $\delta(t-\tau)$ ($-\infty < \tau < +\infty$) con la funzione $h(t,\tau) = e^{-t}u(t-\tau)$. Calcolare la sua risposta al segnale $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)u(t)$.

Soluzione

La risposta è fornita da $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t} \sin(2\pi f_0 \tau) u(\tau) u(t-\tau) d\tau$ e quindi:

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ e^{-t} \int_0^t \sin(2\pi f_0 \tau) d\tau = e^{-t} \dfrac{1-\cos(2\pi f_0 t)}{2\pi f_0} & \end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto è caratterizzato dalla seguente risposta impulsiva:

$$h[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n-1]$$

Qual è la risposta al segnale $x[n] = \cos(\pi n)$?

Soluzione

Il segnale $x[n] = \frac{1}{2}e^{j\pi n} + \frac{1}{2}e^{-j\pi n}$ è somma di due autofunzioni. La risposta sarà data da:

$$\frac{1}{2}H\left(e^{j\pi}\right)e^{j\pi n} + \frac{1}{2}H\left(e^{-j\pi}\right)e^{-j\pi n}$$

La risposta in frequenza del sistema risulta essere:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = -\frac{1}{2}\frac{e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

che per $\Omega = \pm\pi$ è pari a *1* e quindi la risposta è ancora uguale a $x[n] = \cos(\pi n)$

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto trasforma il segnale $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ ponendo a zero tutti i valori in corrispondenza ai valori dispari di n e lasciando inalterati quelli in corrispondenza ai valori pari di n. Qual è la risposta impulsiva di questo sistema?

Soluzione

Le trasformate di Fourier del segnale di ingresso e di uscita sono rispettivamente:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}$$

Di conseguenza la risposta in frequenza del sistema cercato è:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\Omega}\right)}{X\left(e^{j\Omega}\right)}=\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

cui corrisponde la risposta impulsiva $h[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^n u[n]$.

Esercizio N. 4

Un processo aleatorio $x(t)$ è così definito:

$$x(t)=a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)$$

con a e b due variabili aleatorie indipendenti che possono assumere, in maniera equiprobabile, solamente i valori +1 e –1. Dire, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole. Calcolare la sua densità spettrale di potenza.

Soluzione

Le realizzazioni distinte sono quattro. Per tutte il valor medio temporale è nullo. La loro funzione di autocorrelazione temporale risulta:

$$\langle x(t)x(t+\tau)\rangle=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{+T/2}\left[a\cos(\omega_0 t)+b\sin(\omega_0 t)\right]\left[a\cos(\omega_0 (t+\tau))+b\sin(\omega_0 (t+\tau))\right]dt$$

La funzione integranda è pari a

$$f(t,\tau) = a^2\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) + b^2\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau)) +$$
$$+\,ab\sin(\omega_0(t+\tau))\cos(\omega_0 t) + ab\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) =$$

Per le quattro realizzazioni essa vale
$$f(t,\tau) = \cos(\omega_0\tau) \pm \sin(\omega_0(2t+\tau))$$
nella quale il segno + vale quando *a* e *b* hanno lo stesso segno, mentre il segno – vale quando *a* e *b* hanno segno opposto. Il valor medio temporale (in *t*!) di questa funzione è pari a $\cos(\omega_0\tau)$ per tutte e quattro le realizzazioni. In conclusione, il processo è regolare.

Siccome ogni realizzazione è una sinusoide di ampiezza $\sqrt{2}$ a frequenza angolare ω_0, la densità spettrale di potenza non può essere altro che una funzione costituita da due impulsi centrati in $\pm f_0$, di area pari a $1/2$.

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario $x(t)$ ha la seguente densità spettrale di potenza:

$$S_x(f) = \begin{cases} \left|\sin\left(\pi\dfrac{f}{f_0}\right)\right| & per \quad |f| < f_0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Calcolare la sua funzione di autocorrelazione.

Soluzione

Si tratta di valutare l'antitrasformata di Fourier di $S_x(f)$. Poiché essa è una funzione pari, la sua antitrasformata è data da:

$$R_x(\tau) = 2\int_0^{f_0} \sin\left(\pi\frac{f}{f_0}\right)\cos(2\pi f\tau)\,df =$$
$$= \int_0^{f_0}\left\{\sin\left(2\pi f\tau + \pi\frac{f}{f_0}\right) + \sin\left(-2\pi f\tau + \pi\frac{f}{f_0}\right)\right\}df$$

$$R_x(\tau) = \frac{\dfrac{2\pi}{f_0}\left[\cos(2\pi f\tau)+1\right]}{\left(\dfrac{\pi}{f_0}\right)^2 - 4\pi^2\tau^2}$$

Esercizio N. 6

Un rumore bianco di densità spettrale di potenza bilatera pari a $\frac{1}{2}$ mW/Hz viene filtrato con un filtro LTI la cui risposta impulsiva è $h(t) = e^{-\frac{1}{2}t} u(t)$. Calcolare la potenza media del processo di uscita.

Soluzione

La funzione di autocorrelazione del processo è $R_x(\tau) = \frac{1}{2}\delta(\tau)$. La potenza media all'uscita corrisponde a $R_y(0)$ e quindi è calcolabile attraverso il seguente integrale:

$$R_y(0) = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\alpha} e^{-\frac{1}{2}\alpha}\, d\alpha = \frac{1}{2}\left(-e^{-\alpha}\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{2} = 0.5 \quad W$$