PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (a)

22 dicembre 2005

Esercizio N. 1

Un segnale passa banda $x(t)$ ha lo spettro indicato in figura 1. Si dia l'espressione del suo inviluppo complesso $\tilde{x}(t)$ riferito alla frequenza $f_0 = 930$ MHz.

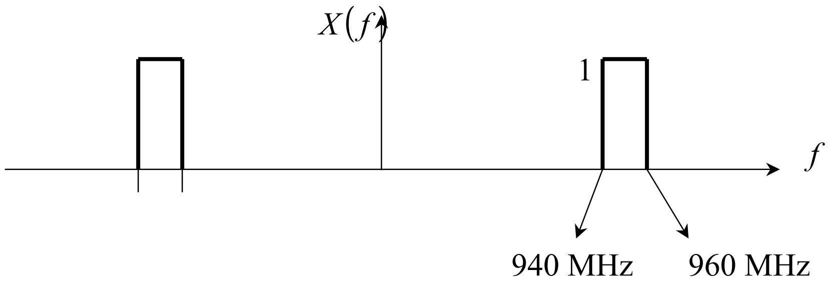


Fig.1

Soluzione esercizio 1

Se f_0 fosse pari a 950 MHz, lo spettro di $\tilde{x}(t)$ sarebbe dato da $\tilde{X}_0(f) = 2\,\mathrm{rect}\left[\dfrac{f}{20\times10^6}\right]$ e $\tilde{x}(t)$ risulterebbe la funzione $40\times10^6\,\mathrm{sinc}\left(20\times10^6\,t\right)$.

Rispetto a questa situazione, si ha $\tilde{X}(f) = \tilde{X}_0\left(f - 20\times10^6\right)$ e quindi il vero $\tilde{x}(t)$ è la funzione $40\times10^6\,\mathrm{sinc}\left(20\times10^6\,t\right)e^{j2\pi\times20\times10^6\,t}$

Esercizio N. 2

Calcolare la trasformata Z del segnale:

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n-2]$$

Soluzione esercizio 2

La trasformata Z di $x_0[n]=\left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n]$ è pari a $\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$. Quindi quella di $x[n]$, chiamiamola $X(z)$, sarà:

$$X(z)=\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}-1+\frac{1}{3}z^{-1}=\frac{1-1-\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{3}z^{-1}+\frac{1}{9}z^{-2}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}=\frac{\frac{1}{9}z^{-2}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Esercizio N. 3

Si consideri l'esperimento "che tempo farà domenica", le cui uscite elementari sono: pioggia (P), sereno (S), parzialmente nuvoloso (PN), con probabilità rispettivamente $1/3$, $1/4$, $5/12$. Su questo esperimento è definito un processo aleatorio che associa a P la funzione $x(t)=1$, a S la funzione $x(t)=t$ e a PN la funzione $x(t)=-t$. Si calcoli la funzione di autocorrelazione $R_x(t,t+\tau)$ del processo aleatorio.

Soluzione esercizio 3

I valori possibili del prodotto $x(t)x(t+\tau)$ sono:

(1,1)=1 con probabilità $1/3$

$(t,t+\tau)=t^2+t\tau$ con probabilità $1/4$

$(-t,-t-\tau)=t^2+t\tau$ con probabilità $5/12$

Pertanto $R_x(t,t+\tau)=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}t\tau+\frac{2}{3}t^2$

Esercizio N. 4

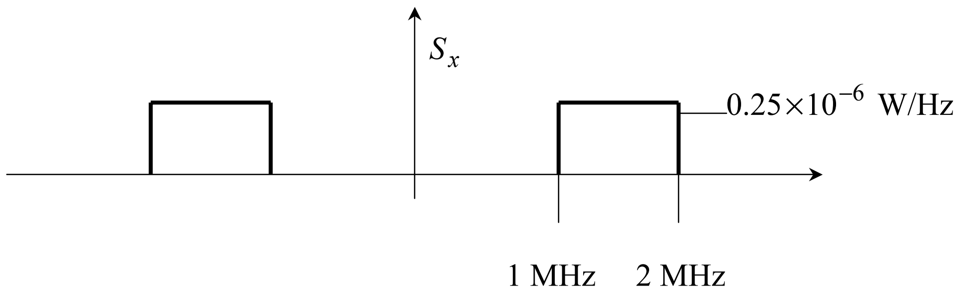
La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t)=\sin(2\pi f t+\phi)$$

in cui *f* è una variabile aleatoria distribuita in modo uniforme tra 1 MHz e 2 MHz e ϕ è una variabile aleatoria indipendente da *f*, che assume in modo equiprobabile i valori $\pm\pi/4$. Calcolare la densità spettrale di potenza del processo.

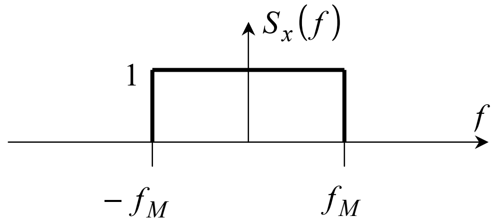
Soluzione esercizio 4

La potenza media del processo è pari a $1/2$ W (ogni realizzazione infatti è una sinusoide di ampiezza $A=1$). Tale potenza si distribuisce uniformemente tra 1 MHz e 2 MHz e la fase delle realizzazioni non influisce né sulla potenza media, né sulla densità spettrale di potenza. Pertanto quest'ultima si presenta come indicato in figura:



Esercizio N. 5

In figura è riportata la densità spettrale di potenza del un processo aleatorio $\{x(t)\}$:



Il processo è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)=e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$. Calcolare la densità spettrale di potenza del processo all'uscita del sistema..

Soluzione esercizio 5

La densità spettrale di potenza $S_y(f)$ è data dalla relazione:

$S_y(f)=S_x(f)|H(f)|^2$. Pertanto $S_y(f)=\dfrac{4}{1+16\pi^2 f^2}rect\left(\dfrac{f}{2f_M}\right)$.

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI

22 dicembre 2005

Esercizio N. 1

Un segnale passa banda $x(t)$ ha lo spettro indicato in figura 1. Si dia l'espressione del suo inviluppo complesso $\tilde{x}(t)$ riferito alla frequenza $f_0 = 940$ MHz.

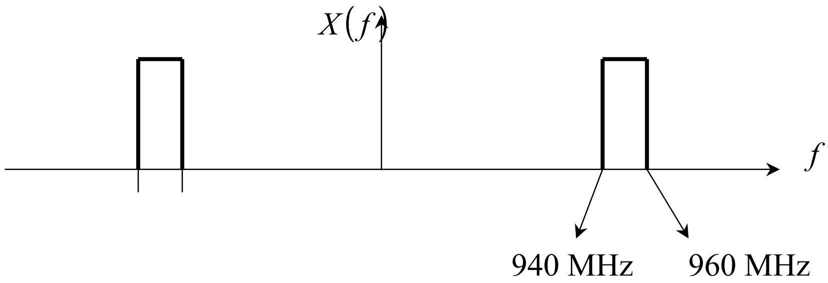


Fig.1

Soluzione esercizio 1

Se f_0 fosse pari a 950 MHz, lo spettro di $\tilde{x}(t)$ sarebbe dato da $\tilde{X}_0(f) = 2\,\mathrm{rect}\left[\dfrac{f}{20\times10^6}\right]$ e $\tilde{x}(t)$ risulterebbe la funzione $40\times10^6\,\mathrm{sinc}\left(20\times10^6\,t\right)$.
Rispetto a questa situazione, si ha $\tilde{X}(f) = \tilde{X}_0\left(f - 10\times10^6\right)$ e quindi il vero $\tilde{x}(t)$ è la funzione $40\times10^6\,\mathrm{sinc}\left(20\times10^6\,t\right)e^{j2\pi\times10\times10^6}t$

Esercizio N. 2

Calcolare la trasformata Z del segnale:

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-2]$$

Soluzione esercizio 2

La trasformata Z di $x_0[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} u[n-1]$ è pari a $\dfrac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$. Quindi quella di $x[n]$, chiamiamola $X(z)$, sarà:

$$X(z) = \frac{z^{-1}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} - z^{-1} = \frac{z^{-1} - z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{\frac{1}{2}z^{-2}}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Esercizio N. 3

Si consideri l'esperimento "che tempo farà domenica", le cui uscite elementari sono: pioggia (P), sereno (S), parzialmente nuvoloso (PN), con probabilità rispettivamente $1/4,\ \ 1/4,\ \ 1/2$. Su questo esperimento è definito un processo aleatorio che associa a P la funzione $x(t) = t$, a S la funzione $x(t) = t^2$ e a PN la funzione $x(t) = -t$. Si calcoli la funzione di autocorrelazione $R_x(t, t+\tau)$ del processo aleatorio.

Soluzione esercizio 3

I valori possibili del prodotto $x(t)x(t+\tau)$ sono:

$(t, t+\tau) = t^2 + t\tau$ con probabilità $1/4$

$(-t, -t-\tau) = t^2 + t\tau$ con probabilità $1/2$

$\left(t^2, (t+\tau)^2\right) = t^4 + 2t^3\tau + t^2\tau^2$ con probabilità $1/4$

Pertanto $R_x(t, t+\tau) = \frac{1}{4}t^4 + \frac{3}{4}t^2 + \frac{1}{2}t^3\tau + \frac{1}{4}t^2\tau^2 + \frac{3}{4}t\tau$

Esercizio N. 4

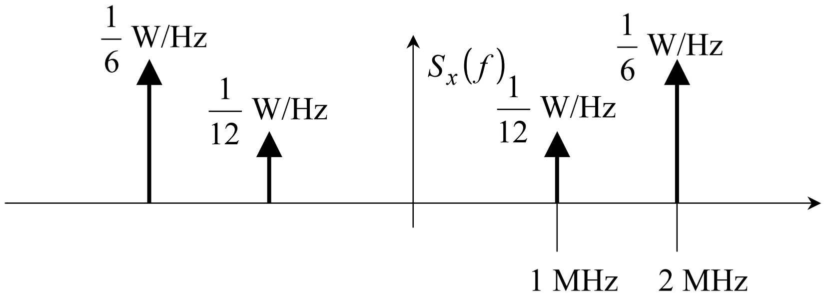
La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t) = \sin(2\pi f t + \phi)$$

in cui *f* è una variabile aleatoria che assume i valori 1 MHz e 2 MHz, rispettivamente con probabilità 1/3 e 2/3, e ϕ è una variabile aleatoria indipendente da *f*, che assume in modo equiprobabile i valori $\pm\pi/4$. Calcolare la densità spettrale di potenza del processo.

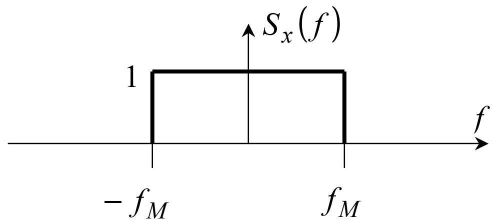
Soluzione esercizio 4

La potenza media del processo è pari a $1/2$ W (ogni realizzazione infatti è una sinusoide di ampiezza $A=1$). Tale potenza si distribuisce esclusivamente sulle frequenze di 1 MHz e 2 MHz (la fase delle realizzazioni non influisce né sulla potenza media, né sulla densità spettrale di potenza). Pertanto quest'ultima avrà due impulsi ideali a tali frequenze, di ampiezza proporzionale alle corrispondenti probabilità, in modo che il suo integrale da $-\infty$ a $+\infty$ corrisponda alla potenza media, come indicato in figura:



Esercizio N. 5

In figura è riportata la densità spettrale di potenza del un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$:



Il processo è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)=\delta(t-t_0)$. Calcolare la funzione di auto correlazione del processo all'uscita del sistema..

Soluzione esercizio 5

La densità spettrale di potenza $S_y(f)$ è data dalla relazione:

$$S_y(f)=S_x(f)|H(f)|^2.$$

Pertanto, poiché $|H(f)|^2=1$, $\quad S_y(f)=rect\left(\frac{f}{2f_M}\right)$

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI ©

22 dicembre 2005

Esercizio N. 1

Un segnale passa banda $x(t)$ ha lo spettro indicato in figura 1. Si dia l'espressione del suo inviluppo complesso $\tilde{x}(t)$ riferito alla frequenza $f_0 = 960$ MHz.

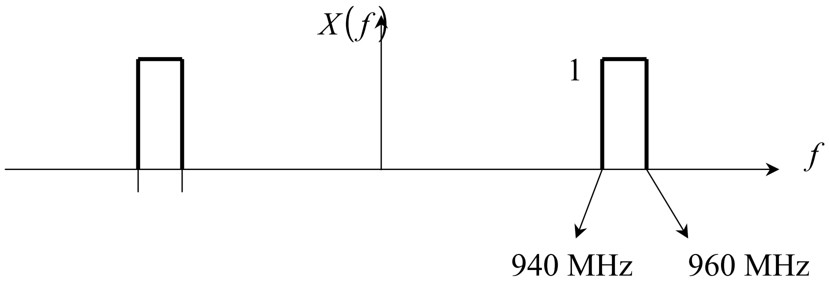


Fig.1

Soluzione esercizio 1

Se f_0 fosse pari a 950 MHz, lo spettro di $\tilde{x}(t)$ sarebbe dato da $\tilde{X}_0(f) = 2\,\mathrm{rect}\left[\frac{f}{20\times10^6}\right]$ e $\tilde{x}(t)$ risulterebbe la funzione $40\times10^6\,\mathrm{sinc}\left(20\times10^6\,t\right)$.
Rispetto a questa situazione, si ha $\tilde{X}(f) = \tilde{X}_0\left(f + 10\times10^6\right)$ e quindi il vero $\tilde{x}(t)$ è la funzione $40\times10^6\,\mathrm{sinc}\left(20\times10^6\,t\right)e^{-j2\pi\times10\times10^6}t$

Esercizio N. 2

Calcolare la trasformata Z del segnale:

$$x[n] = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} u[n]$$

Soluzione esercizio 2

La trasformata Z di $x_0[n]=\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}u[n-2]$ è pari a $\frac{z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$. Quindi quella di $x[n]$, chiamiamola $X(z)$, sarà:

$$X(z)=\frac{z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-2}z^{0}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{-1}z^{-1}=\frac{z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}+4-2z^{-1}$$

$$=\frac{z^{-2}+4+2z^{-1}-2z^{-1}-z^{-2}}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}=\frac{4}{1+\frac{1}{2}z^{-1}}$$

Esercizio N. 3

Si consideri l'esperimento "tempo che farà domenica", le cui uscite elementari sono: pioggia (P), sereno (S), parzialmente nuvoloso (PN), con probabilità rispettivamente $1/4$, $1/4$, $1/2$. Su questo esperimento è definito un processo aleatorio che associa a P la funzione $x(t)=\sin t$, a S la funzione $x(t)=\sin 2t$ e a PN la funzione $x(t)=\cos t$. Si calcoli la funzione di autocorrelazione $R_x(t,t+\tau)$ del processo aleatorio.

Soluzione esercizio 3

I valori possibili del prodotto $x(t)x(t+\tau)$ sono:
$(\sin t,\sin(t+\tau))=\sin t\sin(t+\tau)$ con probabilità $1/4$
$(\sin 2t,\sin(2t+2\tau))=\sin 2t\sin[2(t+\tau)]$ con probabilità $1/4$
$(\cos t,\cos(t+\tau))=\cos t\cos(t+\tau)$ con probabilità $1/2$
Pertanto :

$$R_x(t,t+\tau)=\frac{1}{4}\sin t\sin(t+\tau)+\frac{1}{4}\sin 2t\sin[2(t+\tau)]+\frac{1}{2}\cos t\cos(t+\tau)$$

Esercizio N. 4

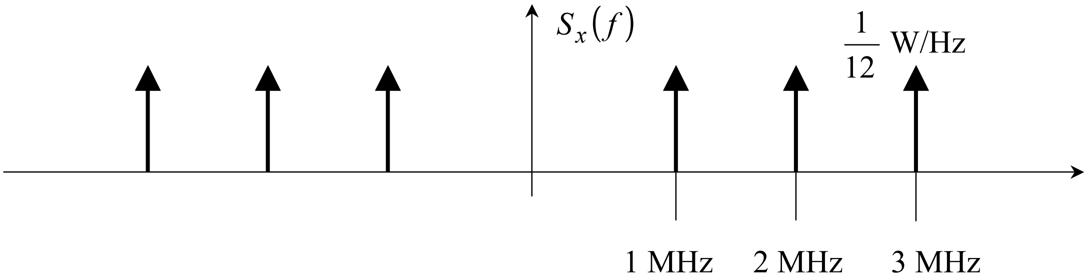
La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t)=\sin(2\pi f t+\phi)$$

in cui f è una variabile aleatoria che assume in modo equiprobabile i valori 1 MHz, 2 MHz e 3 MHz, e ϕ è una variabile aleatoria indipendente da f, uniformemente distribuita tra 0 e 2π. Calcolare la densità spettrale di potenza del processo.

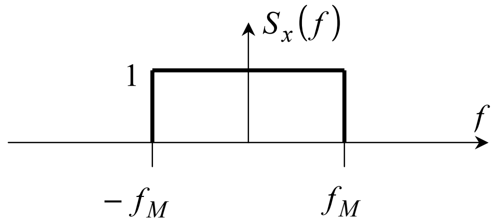
Soluzione esercizio 4

La potenza media del processo è pari a $1/2$ W (ogni realizzazione infatti è una sinusoide di ampiezza $A=1$). Tale potenza si distribuisce esclusivamente sulle frequenze di 1 MHz, 2 MHz e 3 MHz (la fase delle realizzazioni non influisce né sulla potenza media, né sulla densità spettrale di potenza). Pertanto quest'ultima sarà costituita da 3 impulsi ideali a tali frequenze, di ampiezza proporzionale alle corrispondenti probabilità (e quindi tutti uguali), in modo che il suo integrale da $-\infty$ a $+\infty$ corrisponda alla potenza media, come indicato in figura:



Esercizio N. 5

In figura è riportata la densità spettrale di potenza del un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$:



Il processo è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)=\delta(t)-\delta(t-t_0)$. Calcolare la densità spettrale di potenza del processo all'uscita del sistema.

Soluzione esercizio 5

La densità spettrale di potenza $S_y(f)$ è data dalla relazione:

$S_y(f)=S_x(f)|H(f)|^2$. Pertanto $S_y(f)=4\sin^2(\pi f t_0)rect\left(\frac{f}{2f_M}\right)$.

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (d)

22 dicembre 2005

Esercizio N. 1

Un segnale passa banda $x(t)$ ha lo spettro indicato in figura 1. Si dia l'espressione del suo inviluppo complesso $\tilde{x}(t)$ riferito alla frequenza $f_0 = 970$ MHz.

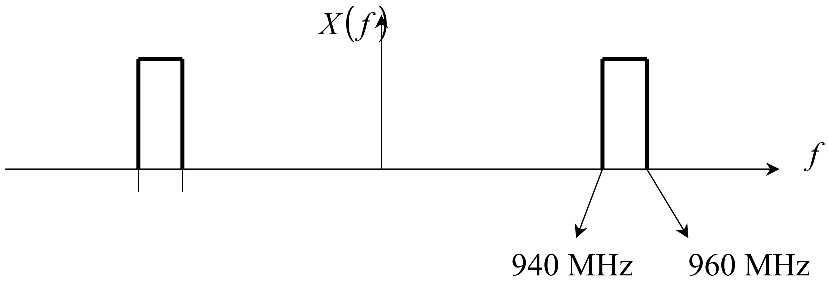


Fig.1

Soluzione esercizio 1

Se f_0 fosse pari a 950 MHz, lo spettro di $\tilde{x}(t)$ sarebbe dato da $\tilde{X}_0(f) = 2\,\mathrm{rect}\left[\frac{f}{20\times 10^6}\right]$ e $\tilde{x}(t)$ risulterebbe la funzione $40\times 10^6\,\mathrm{sinc}(20\times 10^6 t)$.
Rispetto a questa situazione, si ha $\tilde{X}(f) = \tilde{X}_0\left(f + 20\times 10^6\right)$ e quindi il vero $\tilde{x}(t)$ è la funzione $40\times 10^6\,\mathrm{sinc}(20\times 10^6 t)e^{-j2\pi\times 20\times 10^6}t$

Esercizio N. 2

Calcolare la trasformata Z del segnale:

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[n]$$

Soluzione esercizio 2

La trasformata Z di $x_0[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1} u[n+1]$ è pari a $\dfrac{z}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$. Quindi quella di $x[n]$, chiamiamola $X(z)$, sarà:

$$X(z) = \frac{z}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} - 1 \times z^1 = \frac{z - z - \frac{1}{3}}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{1}{3}\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}}$$

Esercizio N. 3

Si consideri l'esperimento "tempo che farà domenica", le cui uscite elementari sono: pioggia (P), sereno (S), parzialmente nuvoloso (PN), con la stessa probabilità . Su questo esperimento è definito un processo aleatorio che associa a P la funzione $x(t) = 1$, a S la funzione $x(t) = 2$ e a PN la funzione $x(t) = e^{-|t|}$. Si calcoli la funzione di autocorrelazione $R_x(t, t+\tau)$ del processo aleatorio.

Soluzione esercizio 3

I valori possibili del prodotto $x(t)x(t+\tau)$ sono:

$(1,1) = 1$ con probabilità $1/3$

$(2,2) = 4$ con probabilità $1/3$

$\left(e^{-|t|}, e^{-|t+\tau|}\right) = e^{-|t|}e^{-|t+\tau|}$ con probabilità $1/3$

Pertanto $R_x(t, t+\tau) = \frac{5}{3} + \frac{1}{3}e^{-|t|}e^{-|t+\tau|}$

Esercizio N. 4

La generica realizzazione di un processo aleatorio è:

$$x(t) = \sin(2\pi f t + \phi)$$

in cui *f* è una variabile aleatoria distribuita tra 1 MHz e 2 MHz con densità di probabilità mostrata in figura 2 e ϕ è una variabile aleatoria indipendente da *f*, che assume in modo equiprobabile i valori $\pm\pi/2$. Calcolare la costante C in figura 2 e disegnare la densità spettrale di potenza del processo.

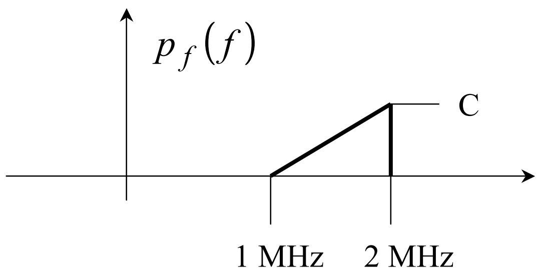


Fig. 2

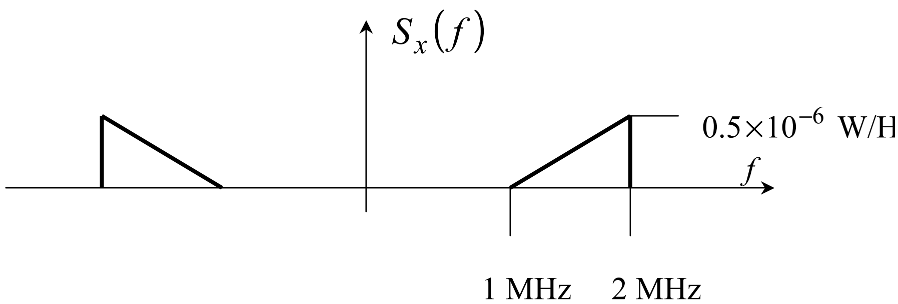
<u>Soluzione esercizio 4</u>

La costante C deve essere tale da avere:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} p(f)df = 1 \quad \rightarrow \qquad C = 2\times 10^{-6}$$

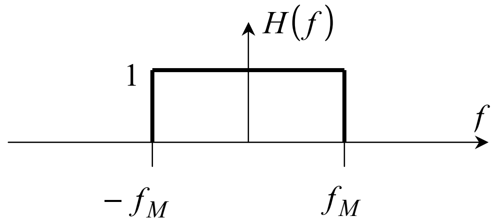
La potenza media del processo è pari a $1/2$ W (ogni realizzazione infatti è una sinusoide di ampiezza $A = 1$). Tale potenza si distribuisce tra 1 MHz e 2 MHz in modo proporzionale alla densità di probabilità di figura 2 (la fase delle realizzazioni non influisce né sulla potenza media, né sulla densità spettrale di potenza).

Pertanto quest'ultima si presenta come indicato in figura:



<u>Esercizio N. 5</u>

In figura è riportata la risposta in frequenza $H(f)$ di un sistema LTI:



A suo ingresso è posto un processo aleatorio stazionario, la cui funzione di auto correlazione è $e^{-|\tau|}$. Calcolare la densità spettrale di potenza del processo all'uscita del sistema..

Soluzione esercizio 5

La densità spettrale di potenza $S_y(f)$ è data dalla relazione: $S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2$. La densità spettrale $S_x(f)$ è la trasformata di Fourier della funzione di auto correlazione e quindi $S_x(f) = \dfrac{2}{1+4\pi^2 f^2}$.

Pertanto $S_y(f) = \dfrac{2}{1+4\pi^2 f^2} \times rect\left(\dfrac{f}{2f_M}\right)$