Teoria dei Segnali

(Appello del 10 gennaio 2006)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = \left[u(t) - u\left(t - \frac{\pi}{100}\right)\right] \times \sin(100t)$$

Valutare la risposta del sistema al segnale $x(t) = u\left(t - \frac{\pi}{100}\right)$.

Soluzione

In figura I sono riportati i grafici delle funzioni $h(t)$ e $x(t)$.

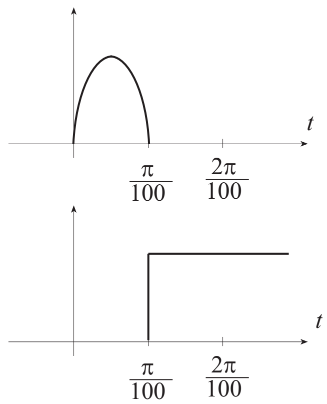

Fig I

L'operazione di convoluzione porta al seguente risultato:

$$y(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{per } t < \dfrac{\pi}{100} \\ \displaystyle\int_0^{t-\frac{\pi}{100}} \sin(100\tau)d\tau = \dfrac{1-\cos(100t-\pi)}{100} & \left(\dfrac{\pi}{100} < t < \dfrac{2\pi}{100}\right) \\ \dfrac{1}{50} \quad \text{per } t \geq \dfrac{2\pi}{100} \end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un segnale tempo continuo ha uno spettro a banda limitata tra 100 Hz e 10 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro avente la risposta in frequenza riportata in figura 1. A tale scopo esso viene convertito in un segnale tempo discreto attraverso un campionamento alla frequenza di 30 KHz. Si disegni con cura la risposta del filtro tempo discreto da usare per eseguire per via numerica il filtraggio desiderato.

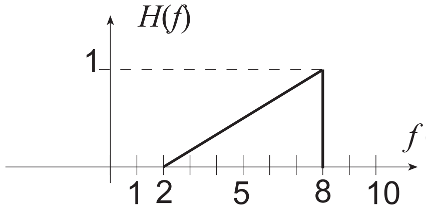

Fig. 1

Soluzione

Nella risposta in frequenza del filtro tempo discreto la frequenza $\Omega_s = 2\pi$ corrisponderà alla frequenza di campionamento del sistema tempo continuo, vale a dire a $\omega_s = 2\pi \times 30 \cdot 10^3$. Pertanto alle frequenze di 2 e 8 KHz corrisponderanno le frequenze angolari del sistema tempo discreto rispettivamente di $\frac{2}{30}2\pi$ e $\frac{8}{30}2\pi$. La risposta in frequenza quindi dovrà essere quella riportata in figura II.

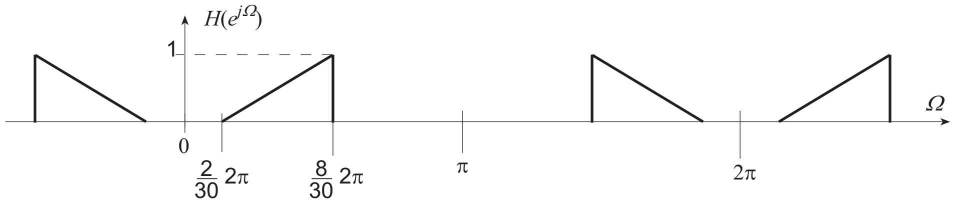

Fig. II

Esercizio N. 3

Si consideri il sistema LTI tempo discreto rappresentato in figura 2, in cui gli elementi indicati con la lettera D (*Delay*) producono un ritardo pari a 1. Si calcoli la sua risposta in frequenza e la corrispondente risposta impulsiva.

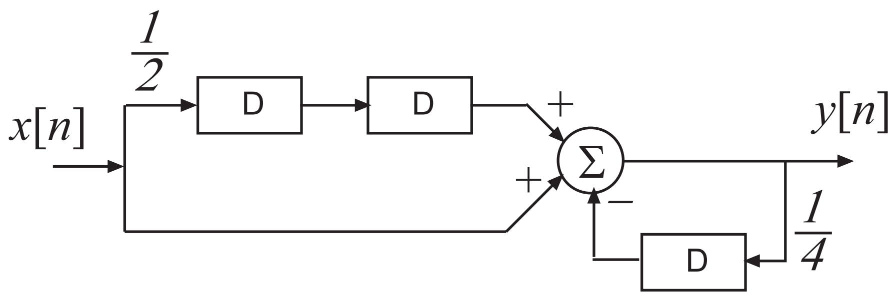

Fig. 2

Soluzione

Il sistema è descritto dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{2}x[n-2] - \frac{1}{4}y[n-1]$$

Eseguendo la trasformata Z si ottiene:

$$Y(e^{j\Omega})\left[1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right] = X(e^{j\Omega})\left[1 + \frac{1}{2}z^{-2}\right]$$

Da questa equazione si ricava:

$$H(e^{j\Omega}) = \frac{Y(e^{j\Omega})}{X(e^{j\Omega})} = \frac{1 + \frac{1}{2}z^{-2}}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}} \qquad h[n] = \left(-\frac{1}{4}\right)^n u[n] + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-2} u[n-2]$$

Esercizio N. 4

Si consideri il seguente segnale passa banda:

$$s(t) = A\cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{4}\right)[1 + 0.5\cos(\Omega_1 t)]$$

con $\Omega_1 << \omega_c$. Si determini il suo inviluppo complesso rispetto alla frequenza $\omega_0 = \omega_c - \Omega_1$.

Soluzione

Il segnale $s(t)$ è somma di tre sinusoidi. Precisamente:

$$s(t) = A\cos\left(\omega_c t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{A}{4}\cos\left[(\omega_c - \Omega_1)t + \frac{\pi}{4}\right] + \frac{A}{4}\cos\left[(\omega_c + \Omega_1)t + \frac{\pi}{4}\right]$$

Il suo spettro, nella parte $\omega > 0$, è pertanto costituito dagli impulsi ideali indicati in figura III.

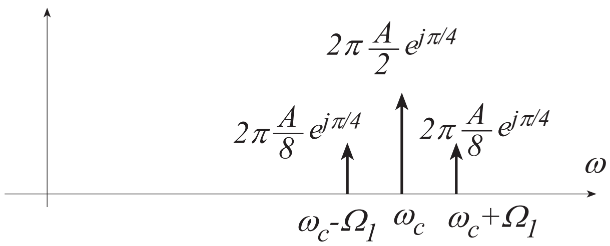

Fig. III

Lo spettro dell'inviluppo complesso rispetto alla frequenza $\omega_0 = \omega_c - \Omega_1$ si ottiene traslando di $\omega_c - \Omega_1$ lo lo spettro di figuraIII, dopo averne raddoppiato l'ampiezza. Si ottiene così lo spettro mostrato in figura IV.

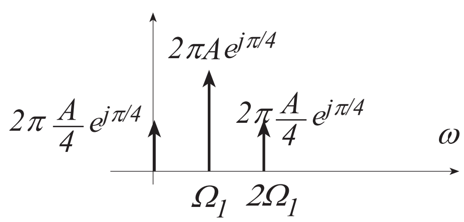

Fig. IV

Tale spettro corrisponde alla funzione: $Ae^{j\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{4} + e^{j\Omega_1 t} + \frac{1}{4}e^{j2\Omega_1 t}\right)$.

Esercizio N. 5

Il processo aleatorio $\{x(t)\}$è così definito: si immagini di estrarre una carta da un mazzo di carte da gioco di 52 carte. Se è stata estratta una figura, la realizzazione del processo è $x(t)=\frac{1}{2}\mathrm{sgn}(t)$, altrimenti la realizzazione è $x(t)=u(t-t_k)$, ove t_k corrisponde al numero indicato sulla carta (asso = 1). Calcolare la densità di probabilità del primo ordine del processo all'istante $t=3.5$.

Soluzione

La realizzazione associata all'uscita di una figura si manifesta con una probabilità pari a $12/52$, mentre tutte le altre si manifestano con probabilità $4/52$. All'istante $t=3.5$ il processo può valere 0, $\frac{1}{2}$ oppure 1, con probabilità rispettivamente pari a $7\times\frac{4}{52}$, $\frac{12}{52}$ ovvero . La densità di probabilità sarà pertanto:

$$p_1(x_1, t=3.5)=\frac{28}{52}\delta(x)+\frac{12}{52}\delta\left(x_1-\frac{1}{2}\right)+\frac{12}{52}\delta(x_1-1)$$

Esercizio N. 6

Un rumore gaussiano bianco di densità spettrale di potenza pari a 0.5 W/Hz è applicato all'ingresso di un sistema LTI avente la seguente risposta impulsiva:

$$h(t)=\mathrm{rect}(t)$$

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo di uscita e la mutua correlazione tra i processi di ingresso e di uscita.

Soluzione

La funzione di autocorrelazione del processo di ingresso è data da $\frac{1}{2}\delta(\tau)$.

Pertanto:

$$R_{xy}(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{rect}(\tau)$$

$$R_y(\tau)=R_x(\tau)\otimes h(\tau)\otimes h(-\tau)=\frac{1}{2}\mathrm{rect}(\tau)\otimes\mathrm{rect}(-\tau)=\frac{1}{2}(1-|\tau|)$$