# Teoria dei Segnali
(Appello del 07 febbraio 2006)

## Prova scritta

Esercizio N. 1

In figura 1 è riportata la risposta impulsiva di un sistema LTI tempo discreto. Ricavare la risposta del sistema al segnale $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

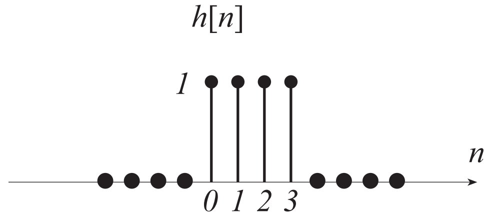


Fig. 1

**Soluzione**

Il segnale di ingresso è pari a $\frac{1}{2}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{2}e^{-j\frac{\pi}{2}n}$ : si tratta della somma di due auto funzioni caratterizzate da $\Omega = \pm\frac{\pi}{2}$. La risposta in frequenza del sistema risulta:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \sum_{n=0}^{3} e^{-j\Omega n} = \frac{1 - e^{-j4\Omega}}{1 - e^{-j\Omega}}$$

Essa è nulla per $\Omega = \pm\frac{\pi}{2}$. Pertanto la risposta del sistema a $x[n] = \cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$ è $y[n] \equiv 0$

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo-continuo risponde all'impulso ideale centrato in $t_0$ con il segnale $\sin(t - t_0)u(t - t_0)$.Dire, giustificando la risposta, se il sistema è:

a) tempo invariante
b) causale
c) stabile.

Calcolare la risposta del sistema al segnale $x(t) = \cos(t)u(t)$.

**Soluzione**

a) il sistema è tempo invariante( $h(t) = \sin(t)u(t)$)
b) Il sistema è causale ( $h(t) = 0$ per $t < 0$ )

c) Il sistema non è stabile ( $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)| dt \to \infty$ )

Eseguendo la convoluzione tra $h(t)$ e $x(t)$, si trova:

$$y(t) = \begin{cases} 0 \quad \text{per } t < 0 \\ \int_0^t \sin(t-\tau)\cos(\tau)d\tau = \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t)d\tau + \frac{1}{2}\int_0^t \sin(t-2\tau)d\tau = \frac{1}{2}t\sin(t) \end{cases}$$

Esercizio N. 3

Un segnale a banda limitata tra 100 Hz e 2 KHz deve essere filtrato con un sistema LTI avente risposta impulsiva $h(t) = \delta(t) - \delta(t - 10^{-4})$. Si desidera eseguire questa operazione per via numerica. A tale scopo il segnale viene campionato con frequenza di campionamento pari a 5 KHz. Si determini la risposta impulsiva del filtro tempo discreto equivalente con cui effettuare l'operazione richiesta.

**Soluzione**

La risposta in frequenza del filtro tempo continuo è : $H_p(\omega) = 1 - e^{-j10^{-4}\omega}$.
Dalla relazione

$$H_d\left(e^{j\Omega}\right) = H_p\left(\frac{\Omega}{T_s}\right)$$

si ottiene facilmente $H_d\left(e^{j\Omega}\right) = 1 - e^{-j\frac{1}{2}\Omega}$

Esercizio N. 4

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z^5 - 1}{1 - z^{-1}}$$

Qual è la sua risposta impulsiva? Dire, giustificando la risposta, se il sistema è stabile e se è causale.

**Soluzione**

La funzione $H(z)$ può essere posta nella forma: $H(z)=\dfrac{z^5\left(1-z^{-5}\right)}{1-z^{-1}}$. Essa quindi corrisponde alla funzione $h[n]=\sum_{k=1}^{5}\delta[n+k]$

Esercizio N. 5

Si consideri il seguente processo aleatorio:

$$s(t)=Am(t)\cos(2\pi f_0 t+\phi),$$

ove $A$ è una costante, $m(t)$ è un processo aleatorio stazionario, $\left(f_M << f_0\right)$, e $\phi$ è una variabile aleatoria indipendente da $m(t)$, che può assumere in maniera equiprobabile i valori $\pm\pi/2$

Calcolare la funzione di autocorrelazione di $s(t)$ e dire, giustificando la risposta, se $s(t)$ è un processo stazionario.

**Soluzione**

La funzione di autocorrelazione è data da :

$$R_s(t,t+\tau)=E\left[A^2 m(t)m(t+\tau)\cos(2\pi f_0 t+\phi)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)\right]=$$

$$=A^2 E[m(t)m(t+\tau)]\times E[\cos(2\pi f_0 t+\phi)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)]$$

$$R_s(t,t+\tau)=$$

$$=A^2 R_x(\tau)\times\left\{\frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0 t+\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2\pi f_0(t+\tau)+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{2}\cos\left(2\pi f_0 t-\frac{\pi}{2}\right)\cos\left(2\pi f_0(t+\tau)-\frac{\pi}{2}\right)\right\}$$

$$R_s(t,t+\tau)=$$

$$=A^2 R_x(\tau)\times\{\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0(t+\tau))\}$$

Come si vede, essa dipende sia da t sia da $\tau$: di conseguenza il processo non è stazionario.

Esercizio N. 6

Un rumore gaussiano bianco di densità spettrale di potenza pari a 1 W/Hz è applicato all'ingresso di un sistema LTI avente la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = \sin(2\pi\, t)[u(t) - u(t-1)]$$

Calcolare la funzione di autocorrelazione del processo all'uscita del sistema.

**Soluzione**

Poiché la funzione di autocorrelazione del processo di ingresso $R_x(\tau) = \delta(\tau)$ , quella del processo di uscita sarà data da $R_y(\tau) = h(\tau) \otimes h(-\tau)$. Quindi

$$R_y(\tau) = 0 \qquad \text{per } |\tau| > 1$$

$$R_y(\tau) = \int_\tau^1 \sin(2\pi\,\alpha)\sin[2\pi\,(\alpha-\tau)]d\alpha = \frac{1}{2}\int_\tau^1 \cos(2\pi\tau)d\alpha - \frac{1}{2}\int_\tau^1 \cos(4\pi\alpha - 2\pi\tau)d\alpha$$

$$= (1-|\tau|)\frac{1}{2}\cos(2\pi\tau) + \frac{1}{4\pi}\sin(2\pi|\tau|) \qquad \text{per } |\tau| < 1$$