# Teoria dei Segnali

(Appello del 12 settembre 2006)

## Prova scritta

<u>Esercizio N. 1</u>

All'ingresso di un sistema LTI avente risposta impulsiva riportata in figura 1a, è applicato il segnale rappresentato in figura 1b.

Disegnare con cura l'andamento del segnale di uscita.

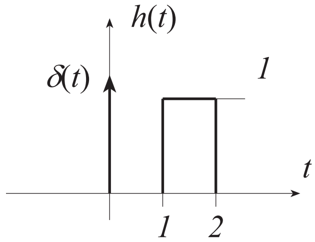



Fig. 1a

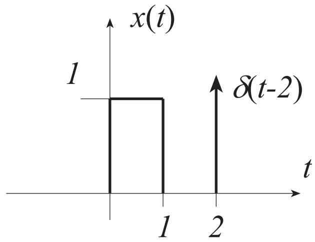



Fig. 1b

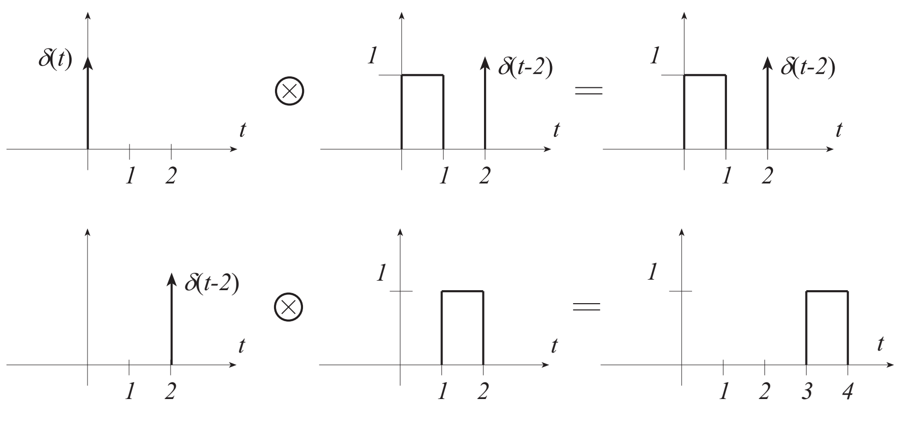
**Soluzione**

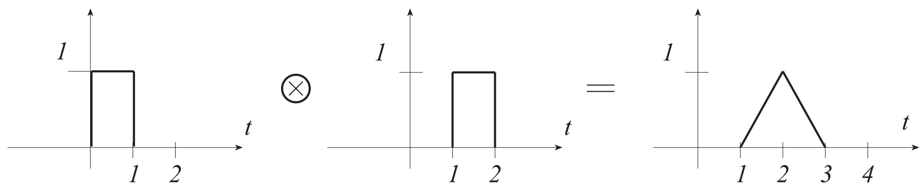
La risposta $y(t)$ è fornita dalla convoluzione tra $x(t)$ e $h(t)$. Il calcolo di tale convoluzione risulta facilitato, scomponendo il relativo integrale in tre parti e cioè:

$$y(t) = \left\{\delta(t) + \mathrm{rect}\left(\tau - \frac{3}{2}\right)\right\} \otimes \left\{\delta(t-2) + \mathrm{rec}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right\} =$$

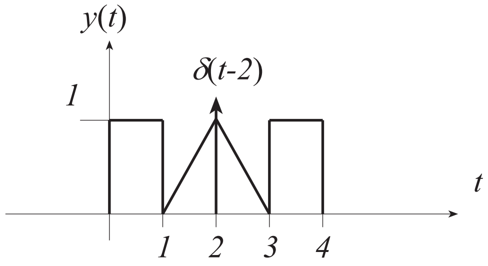
$$= \left\{\delta(t-2) + \mathrm{rect}\left(\tau - \frac{1}{2}\right)\right\} \otimes \delta(t) + \delta(t-2) \otimes \mathrm{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right) + \mathrm{rect}\left(t - \frac{3}{2}\right) \otimes \mathrm{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Le seguenti figure illustrano i risultati delle singole convoluzioni. Il calcolo si basa sulle proprietà della funzione $\delta(\tau)$ e su quelle della convoluzione.






Il risultato finale è il seguente:




Esercizio N. 2

Il segnale tempo discreto $x[n]$ ha il seguente spettro:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{e^{-j\Omega}}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}$$

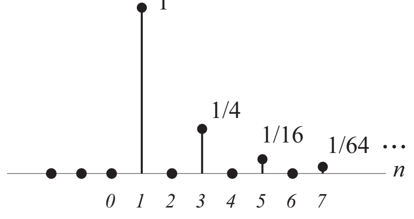
Come è fatto $x[n]$?. Qual è lo spettro del segnale $x[1+2n]$ ?

**Soluzione**

Lo spettro $X\left(e^{j\Omega}\right)$ può essere scritto come:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=e^{-j\Omega}\,\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}+\frac{1}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}\right\}$$

che corrisponde al segnale $x[n]=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}u[n-1]$, disegnato nella seguente figura.



Si riconosce facilmente che il segnale $x[1+2n]$ è pari a $\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n]$, con spettro $\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}}$.

Esercizio N. 3

Un segnale tempo continuo $x(t)$ ha uno spettro che si estende da 100 Hz a10 KHz. Esso viene trasformato in un segnale tempo discreto $x_d[n]$, attraverso un campionamento ad una frequenza di 26 KHz. Il segnale $x_d[n]$ viene elaborato con un filtro avente risposta in frequenza $H\left(e^{j\Omega}\right)$ indicata in figura 2.

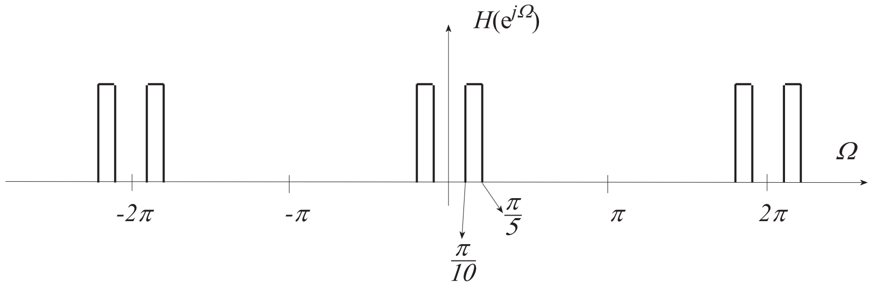



Fig. 2

Il segnale tempo discreto $y_d[n]$ così ottenuto viene quindi riconvertito in un segnale tempo continuo $y(t)$. Qual è la banda di frequenza su cui si estende lo spettro di $y(t)$?

**Soluzione**

Le due frequenze $f_1$ e $f_2$ (in KHz) che delimitano la banda del segnale $y(t)$ sono legate alla frequenza di campionamento dalle due proporzioni:

$$\frac{\pi}{10} : 2\pi f_1 = 2\pi : 2\pi \times 26 \quad \Rightarrow \quad f_1 = 1.3\ KHz$$

$$\frac{\pi}{5} : 2\pi f_2 = 2\pi : 2\pi \times 26 \quad \Rightarrow \quad f_2 = 2.6\ KHz$$

Esercizio N. 4

Si ricavi l'equazione alle differenze che descrive il sistema di figura 3, nella quale gli elementi indicati con D rappresentano un ritardo di una unità. Ricorrendo alla trasformata Z e alle sue proprietà, si determini la sua risposta impulsiva, sapendo che si tratta di un sistema causale. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è anche stabile.

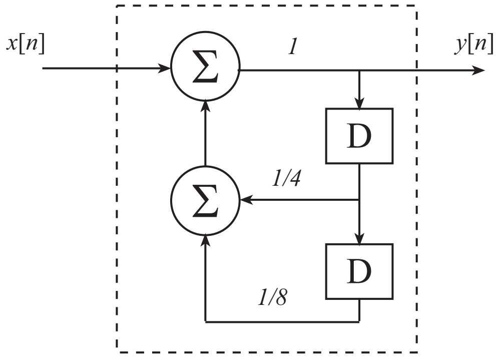



Fig. 3

**Soluzione**

Equazione alle differenze:

$$y[n] = x[n] + \frac{1}{4}y[n-1] + \frac{1}{8}y[n-2] \quad \Rightarrow \quad y[n] - \frac{1}{4}y[n-1] - \frac{1}{8}y[n-2] = x[n]$$

Eseguendo la trasformata Z di entrambi i membri si può ricavare la funzione di trasferimento del sistema:

$$Y(z)\left[1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}\right] = X(z) \quad \Rightarrow \quad H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}}$$

Questa funzione può essere scomposta nel modo seguente:

$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}z^{-1} - \frac{1}{8}z^{-2}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1 - \frac{1}{2}z^{-1}\right)} = \frac{2}{3}\frac{1}{1 - \frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{3}\frac{1}{1 + \frac{1}{4}z^{-1}}$$

Poiché il sistema è causale, la risposta impulsiva sarà quella associata alla zona di convergenza definita da $|z| > \frac{1}{2}$. Pertanto $h[n] = \left\{\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\right\}u[n]$.

Siccome la regione di convergenza contiene la circonferenza di raggio unitario, il sistema è stabile.

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio è così definito: viene estratta una carta da un mazzo di 52 carte. A tale esperimento è associata la funzione:

$$x(t) = A\cos(2\pi ft + \phi)$$

in cui $A$ è una costante, $\phi$ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e $\pi$ e $f$ è una variabile aleatoria, indipendente da $\phi$, che assume il valore di 1 MHz, se la carta estratta è una figura, e il valore di 2 MHz se la carta è diversa da “figura”.

Calcolare la densità spettrale di potenza del processo aleatorio.

**Soluzione**

Ciascuna realizzazione del processo è una sinusoide di ampiezza $A$, di frequenza pari a 1 o 2 MHz. La potenza media di ciascuna realizzazione è pari a $A^2/2$ e quindi questa è anche la potenza media del processo aleatorio. Tale potenza si distribuisce a 1 e a 2 MHz, in parti proporzionali alle probabilità con la quale si manifesta, o meno, una figura. Tali probabilità sono rispettivamente 3/13 e 10/13. Pertanto la densità spettrale di potenza (unilatera) è pari a :

$$S_x(f) = \frac{3}{13}\frac{A^2}{2}\delta\left(f - 10^6\right) + \frac{10}{13}\frac{A^2}{2}\delta\left(f - 2\times 10^6\right)$$

<u>Esercizio N. 6</u>

Si calcoli il valor medio e la funzione di auto correlazione del processo aleatorio:

$$x(t) = a + b\sin(2\pi f_0 t)$$

in cui $a$ e $b$ sono due variabili aleatorie indipendenti che possono assumere in maniera equiprobabile i valori 1, 0 e –1. Dire, giustificando la risposta, se il processo è stazionario, almeno in senso debole.

**Soluzione**

IL valor medio è palesemente nullo e quindi indipendente dal tempo.

La funzione di autocorrelazione risulta essere:

$$R_x(t, t+\tau) = E\left[(a + b\sin(2\pi f_0 t))(a + b\sin(2\pi f_0 (t+\tau)))\right] =$$

$$E\left[a^2\right] + E[ab]\sin(2\pi f_0 t) + E[ab]\sin(2\pi f_0 (t+\tau)) + E\left[b^2\right]\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 (t+\tau))$$

$$= \frac{2}{3} + \frac{2}{3}\sin(2\pi f_0 t)\sin(2\pi f_0 (t+\tau))$$

Il processo non è stazionario, poiché la funzione di autocorrelazione dipende sia da $t$ sia da $\tau$.