Teoria dei Segnali

(Appello del 14 settembre 2007)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso $\delta(t-\tau)$ con la funzione $\delta\left(\frac{t}{2}-\tau\right)$. Calcolare la risposta ai segnali $x_1(t)=\sin(\pi t)$ e $x_2(t)=x_1(t-1)$. Il sistema è tempo invariante?

Soluzione

Ad un generico segnale $x(t)$ il sistema risponde con:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\delta\left(\frac{t}{2}-\tau\right)d\tau = x\left(\frac{t}{2}\right)$$

Le risposte ai due segnali sono pertanto:

$$y_1(t)=\sin\left(\pi\frac{t}{2}\right) \qquad y_2(t)=\sin\left(\pi\left(\frac{t}{2}-1\right)\right)\neq y_1(t-1)$$

Pertanto il sistema non è tempo invariante

Esercizio N. 2

Un sistema lineare tempo invariante ha la seguente risposta in frequenza (nell'intervallo $-\pi<\Omega\leq\pi$):

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\mathrm{rect}\left[\frac{3\Omega}{4\pi}\right]$$

Calcolare la sua risposta al segnale $x[n]=u\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)\right]$.

(suggerimento: che tipo di segnale è $x[n]$? Conviene sfruttare le sue proprietà)

Soluzione

Il segnale $x[n]$ è un segnale periodico. Si osservi a tal fine la figura I, dalla quale si nota anche che il periodo del segnale è pari a 4 e che quindi la sua pulsazione fondamentale è $\Omega_0=2\pi/4$.

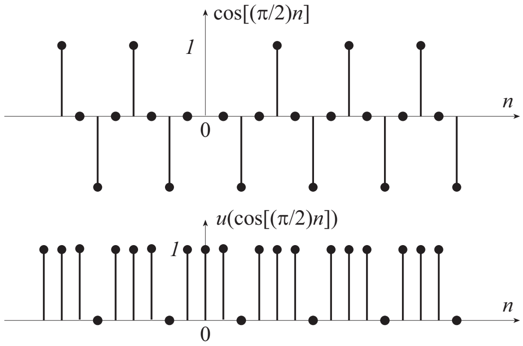

Fig. I

Il generico coefficiente dello sviluppo in serie di Fourier è dato da:

$$c_k = \frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{1} e^{-j\left(k\frac{2\pi}{4}\right)n} \quad \Rightarrow \quad c_0 = \frac{3}{4}, \quad c_1 = \frac{1}{4}, \quad c_2 = -\frac{1}{4}, \quad c_3 = \frac{1}{4}$$

Il sistema in questione lascerà transitare solamente le componenti a frequenza zero e $\pi/2$, pertanto il segnale di uscita risulta essere:

$$y[n] = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}e^{j\frac{\pi}{2}n} + \frac{1}{4}e^{-j\frac{\pi}{2}n} = \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)$$

Esercizio N. 3

Il segnale tempo discreto $x[n]$ ha lo spettro rappresentato in figura 1a.

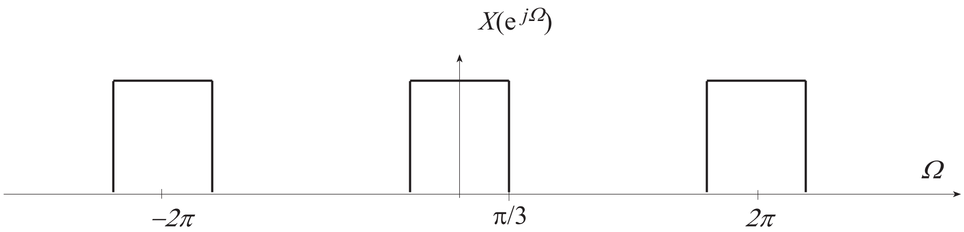

Fig. 1a

Si consideri il segnale tempo continuo

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\delta(t - nT)$$

in cui $T = 1\ \mu s$. Questo segnale viene filtrato con un filtro avente risposta in frequenza indicata nella figura 1b.

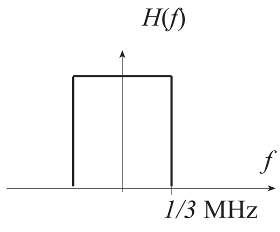

Fig. 1b

Disegnare (con cura) lo spettro di $s(t)$ e calcolare il segnale $y(t)$ presente all'uscita del filtro.

Soluzione

Si ricavi innanzitutto lo spettro di $s(t)$:

$$S(\omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{j\omega nT} = X\left(e^{j\Omega}\right)\Big|_{\Omega=\omega T}$$

Poiché nell'intervallo $-\pi<\Omega<\pi$ lo spettro di $x[n]$ è $X\left(e^{j\Omega}\right)=\mathrm{rect}\left(\frac{3\Omega}{2\pi}\right)$, quello di $s(t)$ (nell'intervallo $-\frac{\pi}{T}<\omega<\frac{\pi}{T}$) sarà pari a $\mathrm{rect}\left(\frac{3\omega T}{2\pi}\right)=\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{\frac{2\pi}{3T}}\right)$. Questo spettro, nella variabile *f*, risulta come in figura II:

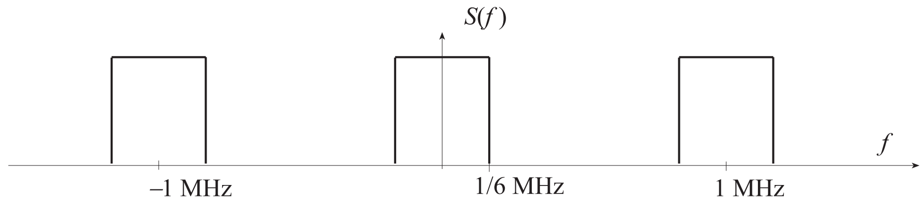

Fig. II

Il filtro preleva la parte dello spettro centrata attorno all'origine. Pertanto:

$$y(t)=2\int_0^{1/6\times10^6}\cos(2\pi f\, t)df = \frac{1}{\pi}\left[\left.\frac{\sin(2\pi f\, t)}{t}\right|_0^{1/6\times10^6}\right]=\frac{1}{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2\pi}{6}\times10^6 t\right)}{t}$$

Esercizio N. 4

Si consideri il seguente segnale passa banda:

$$s(t)=A\cos\left(\omega_c t+\frac{\pi}{4}\right)[0.5\cos(\Omega_1 t)]$$

con $\Omega_1 \ll \omega_c$. Si determini il modulo del suo inviluppo complesso rispetto alla frequenza $\omega_0=\omega_c+\Omega_1$.

Soluzione

Il segnale $s(t)$ è somma di due sinusoidi. Precisamente:

$$s(t) = \frac{A}{4}\cos\left[(\omega_c - \Omega_1)t + \frac{\pi}{4}\right] + \frac{A}{4}\cos\left[(\omega_c + \Omega_1)t + \frac{\pi}{4}\right]$$

Il suo spettro, nella parte $\omega > 0$, è pertanto costituito dagli impulsi ideali indicati in figura III .

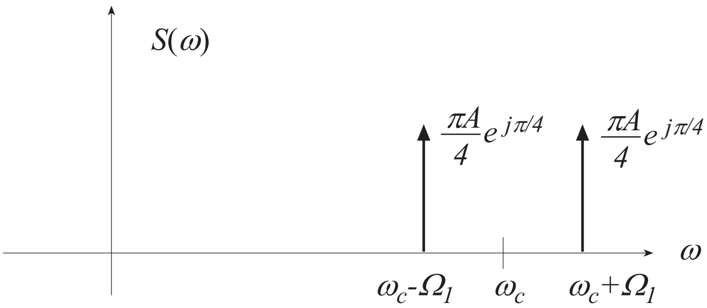

Fig. III

Lo spettro dell'inviluppo complesso rispetto alla frequenza $\omega_0 = \omega_c + \Omega_1$ si ottiene traslando di $\omega_c + \Omega_1$ lo spettro di figura III, dopo averne raddoppiato l'ampiezza. Si ottiene così lo spettro mostrato in figura IV.

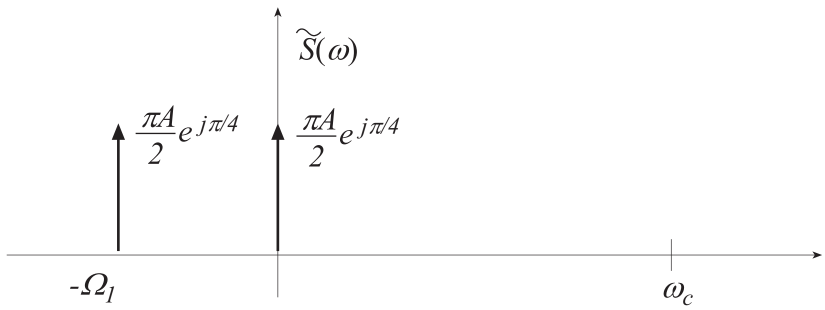

Fig. IV

Tale spettro corrisponde alla funzione $\frac{1}{4}Ae^{j\frac{\pi}{4}}\left(1 + e^{-j\Omega_1 t}\right)$ il cui modulo è $\frac{A}{4}\sqrt{2(1+\cos\Omega_1 t)} = \frac{A}{2}\left|\cos\left(\frac{\Omega_1}{2}t\right)\right|$.

<u>Esercizio N. 5</u>

La generica realizzazione di un processo aleatorio è data da:

$$x(t) = A + B\cos(\omega_0 t + \phi)$$

con ω_0 costante e *A*, *B* e ϕ variabili aleatorie indipendenti. La variabile *A* può assumere solamente i valori $+1$ e -1, ciascuno con probabilità pari a $1/2$. La variabile *B* è uniformemente distribuita tra *0* e *1*, mentre la variabile ϕ è distribuita uniformemente tra 0 e 2π. Dire, giustificando la risposta, se il processo è stazionario in senso debole.

Soluzione

a) Calcolo del valor medio:

$$E\{x(t)\} = E\{A + B\cos(\omega_0 t + \phi)\} = E\{A\} + E\{B\}E\{\cos(\omega_0 t + \phi)\}$$

per l'indipendenza delle variabili aleatorie A, B e ϕ tale valor medio vale $0 + \frac{1}{2} \times 0 = 0$

b) Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t, t+\tau) = E[(A + B\cos(\omega_0 t + \phi))\,(A + B\cos(\omega_0(t+\tau) + \phi))]$$

$$\begin{aligned} R_x(t, t+\tau) = {} & E\left\{A^2 + AB(\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi) + \cos(\omega_0 t + \phi))\right\} + \\ & + E\left\{B^2 \cos(\omega_0 t + \phi)\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi)\right\} \end{aligned}$$

$$E\left\{A^2 + AB(\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi) + \cos(\omega_0 t + \phi))\right\} = E\left[A^2\right] = 1$$

$$E\left\{B^2 \cos(\omega_0 t + \phi)\cos(\omega_0(t+\tau)+\phi)\right\} = \frac{1}{2} E\left[B^2\right]\cos(\omega_0 \tau) = \frac{1}{6}\cos(\omega_0 \tau)$$

Pertanto:

$$R_x(\tau) = 1 + \frac{1}{6}\cos(\omega_0 \tau)$$

Conclusione: Il processo è stazionario in senso debole.

<u>Esercizio N. 6</u>

Un processo aleatorio stazionario $\{x(t)\}$ ha una densità spettrale di potenza costante tra –1 MHz e 1 MHz, ove vale 10^{-33} W/Hz. Per $|f| > 1$ MHz la densità spettrale di potenza è nulla.

Esso viene posto all'ingresso di un sistema LTI caratterizzato da una relazione ingresso-uscita data da:

$$y(t) = \frac{d^2 x(t)}{dt^2}$$

Calcolare la potenza del processo aleatorio presente all'uscita del sistema LTI.

Soluzione

La risposta in frequenza del sistema LTI è data da:

$$H(\omega) = -4\pi^2 f^2$$

La densità spettrale di potenza del processo aleatorio all'uscita del sistema può essere calcolata tramite la relazione:

$$S_y(f) = S_x(f)|H(f)|^2,$$

che nel caso specifico risulta: $S_y(f) = \begin{cases} 10^{-33}16\pi 4 f^4 & -10^6 < f < 10^6 \\ 0 & |f| < 10^6 \end{cases}$

Ad essa corrisponde una potenza media pari a :

$$P = 10^{-33}16\pi^4 \int_{-10^6}^{10^6} f^4 df = 10^{-33}16\pi^4 \times 2 \times \left.\frac{f^5}{5}\right|_0^{10^6} \cong 0.623 \text{ W}$$