Teoria dei Segnali
(Appello del 15 gennaio 2008)

Prova scritta

Esercizio N. 1

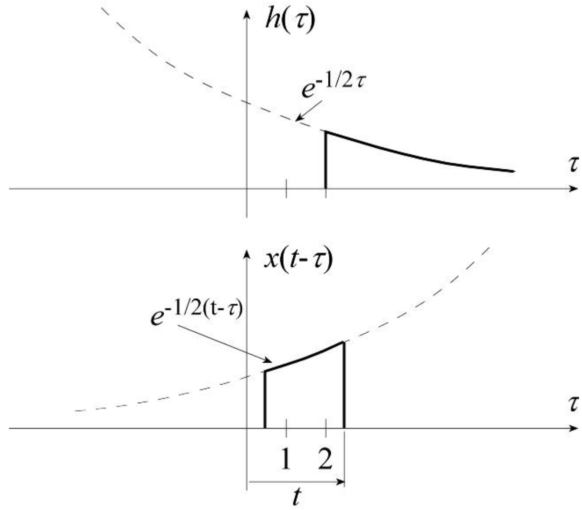
Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = e^{-\frac{1}{2}t} u(t-2)$$

Valutare la risposta del sistema al segnale $x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left[u(t) - u(t-2)\right]$.

Soluzione

Dai grafici delle funzioni $h(\tau)$ e $x(t-\tau)$ risulta che:



$$y(t) = \begin{cases} 0 \quad per\ t < 2 \\ \int_2^t e^{-\frac{1}{2}\tau} e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} d\tau = (t-2)e^{-\frac{1}{2}t} \quad per\ 2 < t < 4 \\ \int_{t-2}^t e^{-\frac{1}{2}\tau} e^{-\frac{1}{2}(t-\tau)} d\tau = 2e^{-\frac{1}{2}t} \quad per\ t > 4 \end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un segnale tempo continuo ha uno spettro a banda limitata tra 1 KHz e 10 KHz. Si desidera filtrare questo segnale con un filtro avente la risposta in frequenza riportata in figura 1. A tale scopo esso viene convertito in un segnale tempo discreto attraverso un campionamento alla frequenza di 24 KHz. Si calcoli quanto vale in n = 0 la risposta impulsiva del filtro tempo discreto da usare per eseguire per via numerica il filtraggio desiderato.

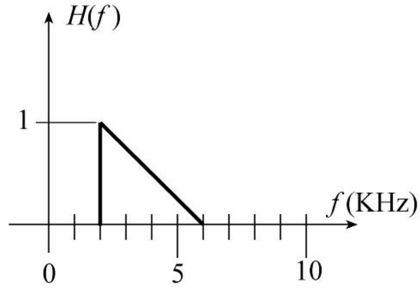
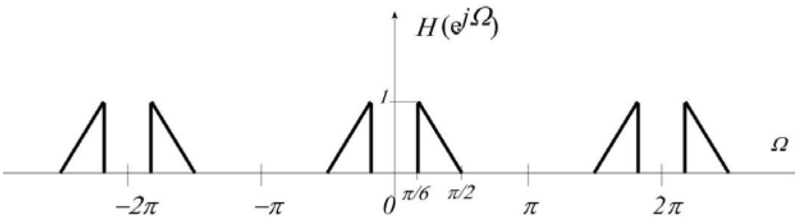


Fig. 1

Soluzione

La risposta in frequenza del filtro tempo discreto equivalente è quella riportata in figura:



La corrispondente risposta impulsiva si ottiene antitrasformando questa funzione. In realtà è richiesto soltanto il suo valore per n = 0, che è pari a:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} H\left(e^{j\Omega}\right) d\Omega = \frac{1}{6}$$

Esercizio N. 3

Un sistema lineare tempo discreto risponde all'impulso unitario $\delta[n-k]$ con il segnale $h[n,k] = u[n] - u[-k]$. Dire, giustificando la risposta, se il sistema è tempo invariante. Determinare la risposta al segnale $x[n] = \left(\frac{1}{8}\right)^n u[n]$..

Soluzione

Il sistema non è tempo invariante: infatti ad esempio

$$\delta[n] = u[n] - 1$$
$$\delta[n-1] = u[n]$$

La risposta cercata si ottiene dalla seguente sommatoria:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k u[k]\{u[n] - u[-k]\} = u[n]\sum_{k=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k - \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^k u[k]u[-k] = \frac{8}{7}u[n] - 1$$

Esercizio N. 4

Un sistema LTI ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{(z-1)^2}{z^2 - 2z}$$

Si sa inoltre che il sistema è stabile. Dire quanto vale la sua risposta impulsiva per $n \geq 0$.

Soluzione

La funzione $H(z)$ presenta 2 poli, rispettivamente in $z = 2$ e in $z = 0$. Poiché il sistema è stabile, la regione di convergenza da considerare è quella definita da $0 < |z| < 2$: infatti essa contiene la circonferenza di raggio unitario. Pertanto la risposta impulsiva del sistema sarà un segnale sinistro. Per determinare i suoi valori per $n \geq 0$ conviene usare la divisione lunga, ordinando i polinomi al numeratore e al denominatore per potenze di z crescenti. Tale divisione porta al seguente risultato:

$h[1] = -\frac{1}{2}; \quad h[0] = \frac{3}{4}; \quad h[n > 1] = 0$

Esercizio N. 5

Si consideri il processo aleatorio la cui realizzazione generica è:

$$s(t) = m(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

ove $m(t)$ è un processo aleatorio stazionario a valor medio nullo, con densità spettrale di potenza nulla per $|f| > f_M$, f_0 è una costante $(f_0 >> f_M)$ e ϕ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e π, indipendente da $m(t)$.

Dire, giustificando la risposta, se $s(t)$ è un processo stazionario in senso debole. Dare l'espressione della generica realizzazione del processo aleatorio che corrisponde all'inviluppo complesso (riferito a f_0) di $s(t)$.

Sia $R_m(\tau)$ la funzione di auto correlazione di $m(t)$. Esprimere la funzione di auto correlazione della parte in fase di $s(t)$ in funzione di $R_m(\tau)$.

Soluzione

Il processo $s(t)$ è stazionario. Infatti

$$E[s(t)] = E[m(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi)] = E[m(t)]E[\cos(2\pi f_0 t + \phi)] = 0$$

$$\begin{aligned} R_x(t.t+\tau) &= E[m(t)\cos(2\pi f_0 t + \phi)m(t+\tau)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)] = \\ &= E[m(t)m(t+\tau)]E[\cos(\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)t+\phi)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)] = \\ &= R_m(\tau)\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau) \end{aligned}$$

Si vede facilmente che $\tilde{s}(t) = m(t)e^{j\phi}$ e che pertanto $s_c(t) = m(t)\cos\phi$. La funzione di auto correlazione di quest'ultimo segnale è:

$$R_{sc}(t,t+\tau) = E\left[m(t)m(t+\tau)\cos^2\phi\right] = R_m(\tau)E\left[\cos^2\phi\right] = \frac{1}{2}R_m(\tau)$$

Esercizio N. 6

Le realizzazioni di un processo aleatorio sono così definite:

$$x(t) = e^{-|t-\alpha|}$$

ove α è una variabile aleatoria gaussiana a valor medio nullo e varianza pari a 4. Si dica, giustificando la risposta, se il processo è regolare in senso debole.

Soluzione

Il processo aleatorio è regolare. Infatti ogni realizzazione corrisponde alla funzione $x(t) = e^{-|t|}$, traslata della quantità α. Poiché una traslazione temporale non altera il valor medio (temporale) di una funzione, tutte le realizzazioni avranno valor medio pari a :

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} e^{-|t|}dt = 0$$

Lo stesso ragionamento può essere applicato anche alla funzione di auto correlazione temporale. Per ogni realizzazione essa risulta pari al valor medio temporale della funzione $e^{-|t|}e^{-|t+\tau|}$, che è anch'esso nullo.