Teoria dei Segnali
(Appello del 3 luglio 2008)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare tempo continuo risponde all'impulso ideale $\delta(t-\tau)$ ($-\infty<\tau<+\infty$) con la funzione $h(t,\tau)=e^{-2t}u(\tau)$. Calcolare la sua risposta al segnale $x(t)=\mathrm{rect}\left(t-\frac{1}{2}\right)$.

Soluzione

Il sistema ovviamente non è tempo invariante

La risposta è fornita da $y(t)=e^{-2t}\int_0^1 u(\tau)d\tau=e^{-2t}$.

Esercizio N. 2

Il segnale periodico tempo discreto $x[n]$ ha uno sviluppo in serie di Fourier pari a $\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$, ove N è il periodo. Esprimere, in termini di a_k, i coefficienti dello sviluppo in serie di Fourier del segnale $x[n]-x[n-1]$

Soluzione

Per il segnale $x[n-1]$ possiamo scrivere:

$$x[n-1]=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)(n-1)}=\sum_{k=\langle N\rangle} a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)} e^{jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)n}$$

Pertanto, detti b_k i coefficienti dello sviluppo di $x[n-1]$, si ha:

$$b_k=a_k e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$$

ed i coefficienti del segnale $x[n]-x[n-1]$ sono dati da

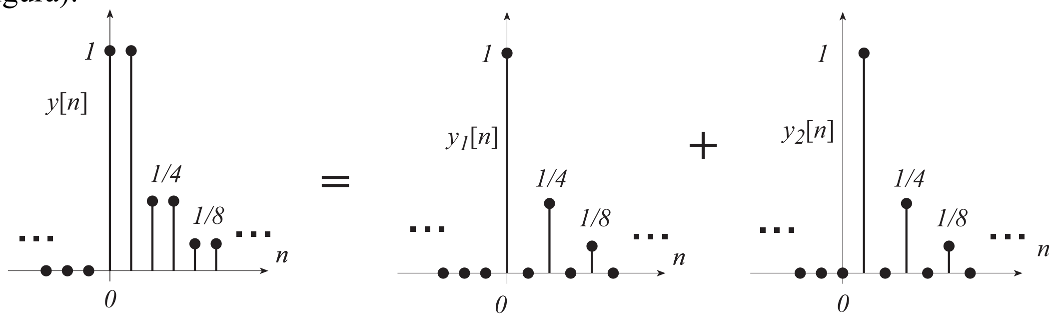
$$a_k-b_k=a_k\left(1-e^{-jk\left(\frac{2\pi}{N}\right)}\right)$$

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto trasforma il segnale $x[n]=\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$ lasciando inalterati tutti i valori in corrispondenza ai valori pari di n e raddoppiando quelli in corrispondenza ai valori dispari di n. Qual è la risposta in frequenza di questo sistema?
(Suggerimento: il segnale trasformato risulta uguale alla somma di due segnali….)

Soluzione

Il segnale di uscita $y[n]$ è somma dei due segnali $y_1[n]$ e $y_2[n]$ (vedi figura):



La trasformata di Fourier del segnale di ingresso è:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

mentre quella di $y_1[n]$ risulta pari a

$$Y_1\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j2\Omega}}=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}$$

Come è facile vedere dalla figura, $y_2[n]=y_1[n-1]$ e quindi

$$Y\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1+e^{-j\Omega}}{\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}$$

Di conseguenza, la risposta in frequenza del sistema cercato è:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{Y\left(e^{j\Omega}\right)}{X\left(e^{j\Omega}\right)}=\frac{1+e^{-j\Omega}}{1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

Esercizio N. 4

Un'antenna riceve un segnale pari alla somma di tre sinusoidi a frequenza f_0, di ampiezza rispettivamente A_0, A_1, A_2. Si prenda la sinusoide di ampiezza A_0 come segnale di riferimento. Rispetto ad essa, la sinusoide di ampiezza A_1 arriva con un ritardo t_1 e quella di ampiezza A_2 ha un ritardo pari a t_2. Scrivere l'espressione dell'inviluppo complesso del segnale totale, riferito alla frequenza f_0.

Soluzione

Il segnale complessivo ha la seguente espressione:

$$s(t) = A_0 \cos(2\pi f_0 t) + A_1 \cos(2\pi f_0 (t - t_1)) + A_2 \cos(2\pi f_0 (t - t_2))$$

Il suo spettro, nella parte delle frequenze positive, è dato da:

$$\frac{1}{2} A_0 \delta(f - f_0) + \frac{1}{2} A_1 \delta(f - f_0) e^{-j2\pi f_0 t_1} + \frac{1}{2} A_2 \delta(f - f_0) e^{-j2\pi f_0 t_2}$$

Pertanto l'inviluppo complesso è:

$$\tilde{s}(t) = A_0 + A_1 e^{-j2\pi f_0 t_1} + A_2 e^{-j2\pi f_0 t_2}$$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio $x(t)$ è così definito:

$$x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)$$

con a e b due variabili aleatorie indipendenti che possono assumere, in maniera equiprobabile, solamente i valori +1 e –1. Calcolare la sua funzione di autocorrelazione. Si tratta di un processo stazionario in senso debole? (Giustificare la risposta)

Soluzione

La funzione di auto correlazione è data da:

$$E[x(t)x(t+\tau)] = E\{[a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)][a\cos(\omega_0 (t+\tau)) + b\sin(\omega_0 (t+\tau))]\}$$

$$\begin{aligned} R_x(t, t+\tau) = E\big[& a^2 \cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau)) + b^2 \sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 (t+\tau)) + \\ & + ab\sin(\omega_0 (t+\tau))\cos(\omega_0 t) + ab\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau))\big] = \\ = E\big[a^2\big]&\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau)) + E\big[b^2\big]\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 (t+\tau)) + \\ & + E[ab]\sin(\omega_0 (t+\tau))\cos(\omega_0 t) + E[ab]\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau)) \end{aligned}$$

Gli ultimi due valori medi sono nulli, i primi due sono uguali e pari a 1. Ne consegue che

$$R_x(t, t+\tau) = \cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0 (t+\tau)) + \sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0 (t+\tau)) = \cos(\omega_0 \tau)$$

Per quanto riguarda il valor medio del processo, esso è nullo per qualsiasi valore di *t*. Pertanto il processo è stazionario in senso debole.

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio stazionario $x(t)$ ha la seguente densità spettrale di potenza:

$$S_x(f) = \begin{cases} \left|\sin\left(\pi \frac{f}{f_0}\right)\right| & per \quad |f| < f_0 \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Esso è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta in frequenza pari a:

$$H(f) = \begin{cases} \cos\left(\pi \frac{f}{f_0}\right) & per \quad |f| < \frac{f_0}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Calcolare la potenza media del processo all'uscita del sistema.

Soluzione

La densità spettrale di potenza del processo di uscita è data da:

$$S_y(f) = \begin{cases} \left|\sin\left(\pi \frac{f}{f_0}\right)\right| \cos^2\left(\pi \frac{f}{f_0}\right) & per \quad |f| < \frac{f_0}{2} \\ 0 & altrove \end{cases}$$

Per calcolare la corrispondente potenza media basta integrare tale funzione sulla banda definita da $|f| < \frac{f_0}{2}$. Sfruttando il fatto che $S_y(f)$è una funzione pari, si avrà:

$$P_y = 2\int_0^{f_0/2} \sin\left(\pi \frac{f}{f_0}\right)\cos^2\left(\pi \frac{f}{f_0}\right) df = -\frac{2}{3}\frac{f_0}{\pi}\cos^3\left(\pi \frac{f}{f_0}\right)\Bigg|_0^{\frac{f_0}{2}} = \frac{2}{3}\frac{f_0}{\pi}$$