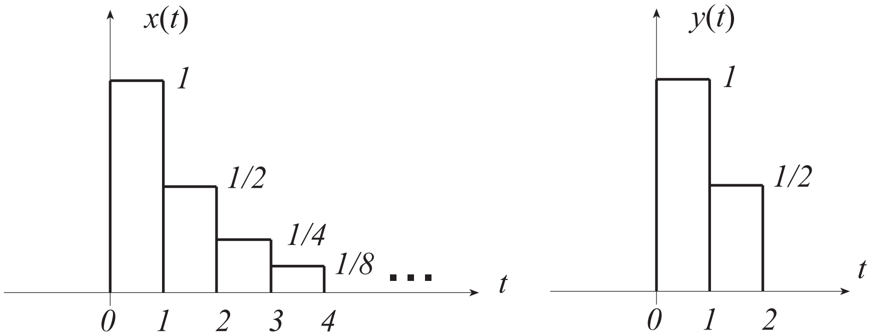
ESAME DI TEORIA DEI SEGNALI

Appello del 15 luglio 2008

Prova scritta

Esercizio N. 1

Il segnale $x(t)$ di figura 1 è applicato all'ingresso di un sistema LTI che risponde ad esso con il segnale $y(t)$. Qual è la risposta in frequenza del sistema?



Soluzione

Il segnale $x(t)$ ha la seguente espressione analitica:

$$x(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \operatorname{rect}\left(t-\frac{1}{2}-k\right)$$

la cui trasformata di Fourier è:

$$X(\omega)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k \frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}e^{-j\frac{\omega}{2}}e^{-j\omega k}=\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}e^{-j\frac{\omega}{2}}\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}}$$

La trasformata di $y(t)$ è invece data da:

$$Y(\omega)=\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}\left(e^{-j\frac{\omega}{2}}+\frac{1}{2}e^{-j\frac{3\omega}{2}}\right)=\frac{\sin\left(\frac{\omega}{2}\right)}{\frac{\omega}{2}}e^{-j\frac{\omega}{2}}\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)$$

Pertanto la risposta in frequenza cercata risulta:

$$H(\omega)=\frac{Y(\omega)}{X(\omega)}=\left(1+\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\omega}\right)=1-\frac{1}{4}e^{-j2\omega}$$

Esercizio N.2

Un sistema LTI ha la seguente risposta in frequenza:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\cos^2\Omega$$

Calcolare la risposta del sistema al segnale $x[n]$, la cui trasformata di Fourier è:

$$X\left(e^{j\Omega}\right)=2j\sin\Omega$$

Soluzione

La risposta in frequenza del sistema può essere scritta come:
$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \cos^2 \Omega = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\Omega) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}e^{j2\Omega} + \frac{1}{4}e^{-j2\Omega},$$
cui corrisponde la risposta impulsiva $h[n] = \frac{1}{2}\delta[n] + \frac{1}{4}\delta[n+2] + \frac{1}{4}\delta[n-2]$

Analogamente si ricava che $x[n] = \delta[n+1] - \delta[n-1]$. Per definizione di risposta impulsiva, si ricava che $y[n] = h[n+1] - h[n-1] = \frac{1}{4}\delta[n+3] + \frac{1}{4}\delta[n+1] - \frac{1}{4}\delta[n-1] - \frac{1}{4}\delta[n-3]$

Esercizio N. 3

Si determinino i coefficienti c_k (in modulo e fase) dello sviluppo in serie di Fourier del segnale periodico
$$x[n] = \sin[\pi(n-1)/4]$$
.

Soluzione

Il periodo di $x[n]$ è pari a 8. Scrivendo il segnale nella forma esponenziale:
$$x[n] = \frac{1}{2j} e^{j\frac{2\pi}{8}n} e^{-j\frac{\pi}{4}} - \frac{1}{2j} e^{-j\frac{2\pi}{8}n} e^{j\frac{\pi}{4}}$$

si può concludere che tutti i coefficienti dello sviluppo sono nulli, tranne c_1 e c_{-1}, per i quali si ha:
$$|c_1| = |c_{-1}| = \frac{1}{2}$$
$$\arg(c_1) = -\frac{3}{4}\pi$$
$$\arg(c_{-1}) = \frac{3}{4}\pi$$

Esercizio N.4

Si consideri la funzione:
$$H(z) = \frac{z + 1 - z^{-3}}{z^{-4} + 1}$$

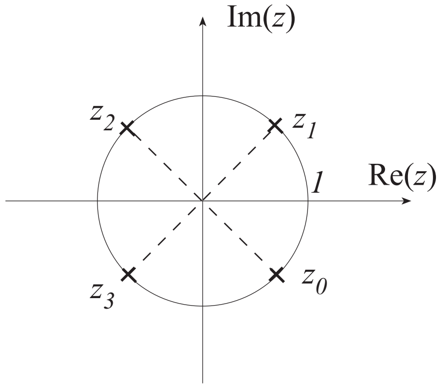
a) Riportare sul piano complesso i suoi poli.
b) Quanti sono i sistemi LTI tempo discreto di cui essa può essere la funzione di sistema?
c) Fra essi c'è qualche sistema stabile?
d) Uno dei possibili sistemi avrà come risposta impulsiva un segnale destro: quanto vale questa risposta impulsiva in $n = 1$?

Soluzione

a) La funzione $H(z)$ ha quattro poli, che sono le quattro radici quarte di -1. Essi pertanto hanno la seguente espressione:

$$z_{k(k=0,1,2,3)} = \sqrt[4]{-1} = \left(e^{-j\pi} e^{jk2\pi}\right)^{1/4} = e^{-j\frac{\pi}{4}} e^{jk\frac{\pi}{2}}$$

e sul piano complesso occupano le posizioni indicate nella figura:



b) Ci sono due regioni di convergenza (e quindi 2 sistemi LTI) , definite da $|z| < 1$ (risposta impulsiva: segnale sinistro) e $|z| > 1$ (risposta impulsiva: segnale destro).

c) Nessuno dei due sistemi è stabile, poiché entrambe le regioni di convergenza non contengono la circonferenza di raggio unitario.

e) Eseguendo la divisione lunga (polinomi ordinati secondo potenze decrescenti di z) si trova che la funzione destra è nulla in $n = 1$.

<u>Esercizio N. 5</u>

Il processo aleatorio stazionario $x(t)$ ha media nulla e varianza $\sigma^2 = 2$. La sua densità spettrale di potenza è data da:

$$S_x(f) = \begin{cases} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_M}\right) & per\ |f| < f_M \\ 0 \quad per \quad |f| > f_M \end{cases}$$

Quanto vale f_M ?

Soluzione

Poiché il processo $x(t)$ ha valor medio nullo, la sua potenza media coincide con la varianza. Calcolando la potenza media tramite la densità spettrale di potenza, risulta:

$$P_m = 2\int_0^{f_M} \cos^2\left(\frac{\pi}{2}\frac{f}{f_M}\right) df = f_M$$

Di conseguenza $f_M = 2$ Hz.

Esercizio N. 6

Un rumore bianco ha una densità spettrale di potenza bilatera pari a 0.5 W/Hz. Esso viene filtrato da un sistema LTI che ha risposta impulsiva $h(t) = e^{-2t}u(t)$. Il processo aleatorio presente all'uscita del filtro viene infine campionato con una frequenza di campionamento pari a 10 Hz , ottenendo così una sequenza di variabili aleatorie $y_k = x(t_k)$. Calcolare $E\lfloor y_j y_i \rfloor$ per la generica coppia di indici *j, i*.

Soluzione

Il valor medio $E\lfloor y_j y_i \rfloor$ coincide con la funzione di auto correlazione del processo di uscita (che sarà stazionario), calcolata per $\tau = (j-i)T_s$, ove T_s è il periodo di campionamento (nel nostro caso $T_s = 0.1$). La funzione di autocorrelazione del processo di uscita è data da:

$$R_y(\tau) = 0.5\delta(\tau) \otimes h(\tau) \otimes h(-\tau) = 0.5\int_{\tau}^{\infty} e^{-2\alpha} e^{-2(\alpha-\tau)} d\alpha = \frac{1}{2} e^{-2|\tau|}$$

Pertanto $E[y_j y_i] = \frac{1}{2} e^{-0.2|j-i|}$