PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (a)

18 dicembre 2008

Esercizio N. 1

Un terminale mobile riceve un segnale costituito da due repliche del segnale passa banda $x(t) = Am(t)\cos(2\pi f_0 t)$, ove $m(t)$ è un segnale in banda base e $f_0 = 1\ GHz$. Le due repliche hanno ampiezze $A_1 = 1$ e $A_2 = 0.25$. Rispetto alla prima, la seconda arriva con un ritardo di $1/8\ ns$. Calcolare il rapporto tra la parte in fase e la parte in quadratura del segnale passa banda complessivo ricevuto dal terminale(N.B.: la risposta deve essere un numero).

Soluzione esercizio 1

Il segnale ricevuto ha la seguente espressione:

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi 10^9 t) + 0.25m(t)\cos\left(2\pi 10^9 \left(t - 1/8 \times 10^{-9}\right)\right)$$

$$= m(t)\cos(2\pi 10^9 t) + 0.25m(t)\cos\left(2\pi 10^9 t - \frac{\pi}{4}\right)$$

La forma canonica del segnale passa banda è:

$$= m(t)\left[1 + \frac{1}{4\sqrt{2}}\right]\cos(2\pi 10^9 t) + m(t)\frac{1}{4\sqrt{2}}\sin\left(2\pi 10^9 t\right)$$

Il rapporto richiesto è: $-\dfrac{1 + \dfrac{1}{4\sqrt{2}}}{\dfrac{1}{4\sqrt{2}}} = -\left(1 + 4\sqrt{2}\right) = -6.6569$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = z^2 + \frac{1}{z}$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è causale e se è stabile. Determinare quindi la sua risposta al segnale $x[n] = \cos^2\left(\frac{\pi}{4} n\right)$

Soluzione esercizio 2

La risposta impulsiva del sistema è $h[n] = \delta[n+2] + \delta[n-1]$. Il sistema non è causale (non è verificata la condizione $h[n] = 0$ per $n < 0$); esso è stabile, poiché la risposta impulsiva è un segnale di durata finita, con valori tutti finiti. La risposta è data da $x[n+2]+x[n-1]=\cos^2\left(\frac{\pi}{4}n+\frac{\pi}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{\pi}{4}n-\frac{\pi}{4}\right)=1-\frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}n\right)+\frac{1}{2}\sin\left(\frac{\pi}{2}n\right)$.

Esercizio N. 3

La generica realizzazione di un processo aleatorio è così definita:

$$x(t)=1-\mathrm{rect}(t-\alpha)$$

in cui α è una variabile aleatoria con densità di probabilità $p(\alpha)=\frac{1}{2}e^{-|\alpha|}$.

Calcolare il valor medio del processo per $t=0.5$

Soluzione esercizio 3

Nel generico istante t_0 la realizzazione può assumere soltanto due valori: 1 oppure 0. Pertanto il valor medio sarà:

$$m_x(t_0)=1\times P[1]+0\times P[0]=1\times P[1]=1-P[0].$$

La probabilità $P[0]$ corrisponde alla probabilità che la variabile α assuma un valore compreso tra $t_0-\frac{1}{2}$ e $t_0+\frac{1}{2}$ e quindi:

$$m_x(t_0)=1-\int_{t_0-1/2}^{t_0+1/2}\frac{1}{2}e^{-|\alpha|}d\alpha \quad\Rightarrow\quad m_x(0.5)=1-\int_0^1\frac{1}{2}e^{-|\alpha|}d\alpha=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{e}\right)$$

Esercizio N. 4

Sia $m(t)$ un processo aleatorio stazionario in banda base. Si consideri il processo passa banda la cui generica realizzazione è data da:

$$x(t)=A(1+m(t))\cos(2\pi f_0t+\phi)$$

in cui A e f_0 sono due costanti e ϕ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 2π, indipendente da $m(t)$.

Calcolare il valor medio e la funzione di auto correlazione di $x(t)$ e dire, giustificando la risposta, se il processo $x(t)$ è stazionario in senso lato.

Soluzione esercizio 4

Calcolo del valor medio:

$$E[A(1+m(t))\cos(2\pi f_0t+\phi)]=E[A(1+m(t))]\times E[\cos(2\pi f_0t+\phi)]$$

(per l'indipendenza tra $m(t)$ e ϕ)

$$E[A(1+m(t))]\times E[\cos(2\pi f_0t+\phi)]=0 \text{ (quindi indip. da } t\text{)}$$

Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t.t+\tau)=E\left[A^2(1+m(t))(1+m(t+\tau))\cos(2\pi f_0 t+\phi)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)\right]$$

$$=\underbrace{E\left[A^2(1+m(t))(1+m(t+\tau))\right]}_{=A^2(1+R_m(\tau)+2m_m)}\underbrace{E\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(2t+\tau)+2\phi)+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\right]}_{=0+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)}$$

$$R_x(\tau)=\frac{A^2}{2}(1+R_m(\tau)+2m_m)\cos(2\pi f_0\tau)$$

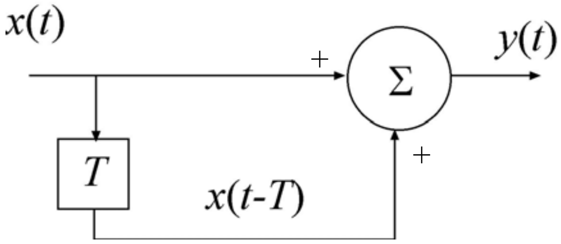
Il processo è stazionario in senso debole.

Esercizio N. 5

Nella figura seguente $x(t)$ è un processo aleatorio stazionario con con densità spettrale bilatera di potenza pari a:

$$S_x(f)=2\times10^{-3}\times\text{rect}\left[\frac{f\,T}{2}\right]\ \text{W/Hz}$$

Si calcoli la potenza media del processo $y(t)$, sapendo che $T=1\ \text{msec}$.



Soluzione esercizio 5

Il sistema ha risposta impulsiva pari a $\delta(t)+\delta(t-T)$ e risposta in frequenza $H(f)=1+e^{-j2\pi fT}$. La densità spettrale di potenza del processo in uscita è data da $S_y(f)=S_x(f)\left|1+e^{-j2\pi fT}\right|^2=S_x(f)[2+2\cos(2\pi fT)]$.

La potenza media risulta essere:

$$P=2\times10^{-3}\int_{-1/T}^{1/T}[2+2\cos(2\pi fT)]df=2\times10^{-3}\left\{\frac{4}{T}+0\right\}=\frac{8\times10^{-3}}{T}$$

Con $T=1\ \text{msec}$ si ha che $P=8\ \text{W}$.

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (b)

18 dicembre 2008

Esercizio N. 1

Un terminale mobile riceve un segnale costituito da due repliche del segnale passa banda $x(t) = Am(t)\cos(2\pi f_0 t)$, ove $m(t)$ è un segnale in banda base e $f_0 = 1\ GHz$. Le due repliche hanno ampiezze $A_1 = 1$ e $A_2 = 0.1$. Rispetto alla prima, la seconda arriva con un ritardo di $1/12\ ns$. Calcolare il rapporto tra la parte in fase e la parte in quadratura del segnale passa banda complessivo ricevuto dal terminale (N.B.: la risposta deve essere un numero).

Soluzione esercizio 1

Il segnale ricevuto ha la seguente espressione:

$$x(t) = m(t)\cos(2\pi 10^9 t) + 0.1m(t)\cos\left(2\pi 10^9 \left(t - 1/12\times 10^{-9}\right)\right)$$

$$= m(t)\cos(2\pi 10^9 t) + 0.1m(t)\cos\left(2\pi 10^9 t - \frac{\pi}{6}\right)$$

La forma canonica del segnale passa banda è:

$$= m(t)\left[1 + \frac{\sqrt{3}}{20}\right]\cos(2\pi 10^9 t) + m(t)\frac{1}{20}\sin\left(2\pi 10^9 t\right)$$

Il rapporto richiesto è: $-\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{3}}{20}}{\dfrac{1}{20}} = -\left(20+\sqrt{3}\right) = -21.7321$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{3z^4 + 1}{z^2}$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è causale e se è stabile. Determinare quindi la sua risposta al segnale $x[n] = \cos\left(\frac{2\pi}{7} n\right)u[n]$.

Soluzione esercizio 2

La risposta impulsiva del sistema è $h[n]=3\delta[n+2]+\delta[n-2]$. Il sistema non è causale (non è verificata la condizione $h[n]=0$ per $n<0$); esso è stabile, poiché la risposta impulsiva è un segnale di durata finita, con valori tutti finiti. La risposta è data da $3x[n+2]+x[n-2]=3\cos\left(\frac{2\pi}{7}n+\frac{4\pi}{7}\right)u[n+2]+\cos\left(\frac{2\pi}{7}n-\frac{4\pi}{7}\right)u[n-2]$.

Esercizio N. 3

La generica realizzazione di un processo aleatorio è così definita:

$$x(t)=1-\mathrm{rect}(t-\alpha)$$

in cui α è una variabile aleatoria con densità di probabilità $p(\alpha)=\begin{cases}1-|\alpha| & per\ |\alpha|\le 1\\ 0 & altrove\end{cases}$.

Calcolare il valor medio del processo per $t=0.5$

Soluzione esercizio 3

Nel generico istante t_0 la realizzazione può assumere soltanto due valori: 1 oppure 0. Pertanto il valor medio sarà:

$$m_x(t_0)=1\times P[1]+0\times P[0]=1\times P[1]=1-P[0].$$

La probabilità $P[0]$ corrisponde alla probabilità che la variabile α assuma un valore compreso tra $t_0-\frac{1}{2}$ e $t_0+\frac{1}{2}$ e quindi:

$$m_x(t_0)=1-\int_{t_0-1/2}^{t_0+1/2}1-|\alpha|d\alpha \quad\Rightarrow\quad m_x(0.5)=1-\int_0^1 1-|\alpha|d\alpha=\frac{1}{2}$$

Esercizio N. 4

Sia $m(t)$ un processo aleatorio stazionario in banda base. Si consideri il processo passa banda la cui generica realizzazione è data da:

$$x(t)=A(1+m(t))\cos(2\pi f_0 t+\phi)$$

in cui A e f_0 sono due costanti e ϕ è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e π, indipendente da $m(t)$.

Calcolare il valor medio e la funzione di auto correlazione di $x(t)$ e dire, giustificando la risposta, se il processo $x(t)$ è stazionario in senso lato.

Soluzione esercizio 4

Calcolo del valor medio:

$$E[A(1+m(t))\cos(2\pi f_0 t+\phi)] = E[A(1+m(t))]\times E[\cos(2\pi f_0 t+\phi)]$$

(per l'indipendenza tra $m(t)$ e ϕ)

$$E[A(1+m(t))]\times E[\cos(2\pi f_0 t+\phi)] = A(1+m_m)\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(2\pi f_0 t+\phi)d\phi$$

$$= -A(1+m_m)\frac{2}{\pi}\sin(2\pi f_0 t)$$

Esso dipende da t, quindi il processo non potrà essere stazionario in senso debole.

Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t.t+\tau) = E\left[A^2(1+m(t))(1+m(t+\tau))\cos(2\pi f_0 t+\phi)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)\right]$$

$$= \underbrace{E\left[A^2(1+m(t))(1+m(t+\tau))\right]}_{=A^2(1+R_m(\tau)+2m_m)}\underbrace{E\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(2t+\tau)+2\phi)+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\right]}_{=0+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)}$$

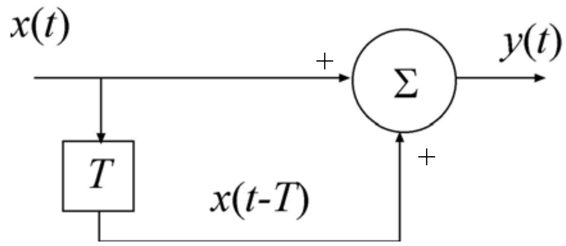
$$R_x(\tau) = \frac{A^2}{2}(1+R_m(\tau)+2m_m)\cos(2\pi f_0\tau)$$

Esercizio N. 5

Nella figura seguente $x(t)$è un processo aleatorio stazionario con con densità spettrale bilatera di potenza pari a:

$$S_x(f) = 1\times 10^{-3}\times \mathrm{rect}\left[\frac{fT}{2}\right] \text{ W/Hz}$$

Si trovi il valore di T in corrispondenza al quale la potenza media del processo $y(t)$ risulta pari a 2 W.



Soluzione esercizio 5

Il sistema ha risposta impulsiva pari a $\delta(t)+\delta(t-T)$ e risposta in frequenza $H(f)=1+e^{-j2\pi fT}$. La densità spettrale di potenza del processo in uscita è data da $S_y(f)=S_x(f)\left|1+e^{-j2\pi fT}\right|^2=S_x(f)[2+2\cos(2\pi fT)]$.

La potenza media risulta essere:

$$P=1\times10^{-3}\int_{-1/T}^{1/T}[2+2\cos(2\pi fT)]df=1\times10^{-3}\left\{\frac{4}{T}+0\right\}=\frac{4\times10^{-3}}{T}$$

Per avere $P=2$ W dovrà essere $T=2\times10^{-3}$ sec

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI ©

18 dicembre 2008

Esercizio N. 1

Un terminale mobile riceve un segnale costituito da due repliche del segnale passa banda $x(t) = Am(t)\cos(2\pi f_0 t)$, ove $m(t)$ è un segnale in banda base e $f_0 = 1\ GHz$. Le due repliche hanno ampiezze $A_1 = 0.5$ e $A_2 = 1$. Rispetto alla prima, la seconda arriva con un ritardo di $1/6\ ns$. Calcolare il modulo del rapporto tra la parte in quadratura e l'inviluppo naturale del segnale passa banda complessivo ricevuto dal terminale (N.B.: la risposta deve essere un numero).

Soluzione esercizio 1

Il segnale ricevuto ha la seguente espressione:

$$x(t) = \frac{1}{2}m(t)\cos(2\pi 10^9 t) + m(t)\cos\left(2\pi 10^9\left(t - 1/6\times 10^{-9}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}m(t)\cos(2\pi 10^9 t) + m(t)\cos\left(2\pi 10^9 t - \frac{\pi}{3}\right)$$

La forma canonica del segnale passa banda è:

$$= m(t)\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right]\cos(2\pi 10^9 t) + m(t)\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\left(2\pi 10^9 t\right)$$

Il rapporto richiesto è: $\dfrac{|m(t)|\frac{\sqrt{3}}{2}}{|m(t)|\sqrt{1+\frac{3}{4}}} = \sqrt{\dfrac{3}{7}} = 0.6547$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{z-1}{z^2}$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è causale e se è stabile. Determinare quindi la sua risposta al segnale $x[n] = u[n]$.

Soluzione esercizio 2

La risposta impulsiva del sistema è $h[n] = \delta[n-1] - \delta[n-2]$. Il sistema è causale (è verificata la condizione $h[n] = 0$ per $n < 0$); esso è stabile, poiché la risposta impulsiva è un segnale di durata finita, con valori tutti finiti. La risposta è data da $x[n-1] - x[n-2] = \delta[n-1]$.

Esercizio N. 3

La generica realizzazione di un processo aleatorio è così definita:

$$x(t) = 1 + \mathrm{rect}(t - \alpha)$$

in cui α è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra –5 e 5.

Calcolare il valor medio del processo per $t = 5$

Soluzione esercizio 3

Nel generico istante t_0 la realizzazione può assumere soltanto due valori: 1 oppure 2. Pertanto il valor medio sarà:

$$m_x(t_0) = 1 \times P[1] + 2 \times P[2] = 1 \times (1 - P[2]) + 2 \times P[2] = 1 + P[2].$$

La probabilità $P[2]$ corrisponde alla probabilità che la variabile α assuma un valore compreso tra $t_0 - \frac{1}{2}$ e $t_0 + \frac{1}{2}$ e quindi:

$$m_x(t_0) = 1 + \int_{t_0-1/2}^{t_0+1/2} \frac{1}{10}\mathrm{rect}\left[\frac{\alpha}{10}\right] d\alpha \quad \Rightarrow \quad m_x(5) = 1 + \frac{1}{10}\int_{4.5}^{5} d\alpha = \frac{21}{20}$$

Esercizio N. 4

Sia $m(t)$ un processo aleatorio stazionario in banda base. Si consideri il processo passa banda la cui generica realizzazione è data da:

$$x(t) = A(1 + m(t))\cos(2\pi f_0 t + \phi)$$

in cui A e f_0 sono due costanti e ϕ è una variabile aleatoria, indipendente da $m(t)$, che assume in modo equiprobabile solamente i valori 0 e π.

Calcolare il valor medio e la funzione di auto correlazione di $x(t)$ e dire, giustificando la risposta, se il processo $x(t)$ è stazionario in senso lato.

Soluzione esercizio 4

Calcolo del valor medio:

$$E[A(1 + m(t))\cos(2\pi f_0 t + \phi)] = E[A(1 + m(t))] \times E[\cos(2\pi f_0 t + \phi)]$$

(per l'indipendenza tra $m(t)$ e ϕ)

$$E[A(1+m(t))]\times E[\cos(2\pi f_0 t+\phi)] = A(1+m_m)\times\left\{\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t)+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0 t+\pi)\right\}=0$$

Esso è indipendente da *t*, quindi il processo potrebbe essere stazionario in senso debole.
Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t.t+\tau) = E\left[A^2(1+m(t))(1+m(t+\tau))\cos(2\pi f_0 t+\phi)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)\right]$$

$$=\underbrace{E\left[A^2(1+m(t))(1+m(t+\tau))\right]}_{=A^2(1+R_m(\tau)+2m_m)}\underbrace{E\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(2t+\tau)+2\phi)+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\right]}_{=\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(2t+\tau))+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)}$$

$$R_x(t,t+\tau)=\frac{A^2}{2}(1+R_m(\tau)+2m_m)\{\cos(2\pi f_0\tau)+\cos(2\pi f_0(2t+\tau))\}$$

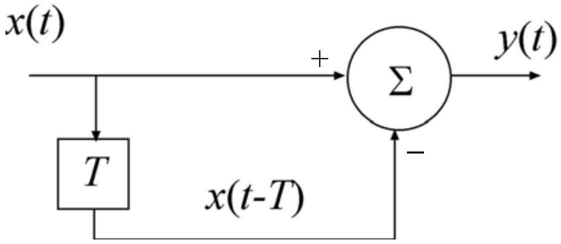
Il processo non è stazionario in senso debole.

Esercizio N. 5

Nella figura seguente $x(t)$ è un processo aleatorio stazionario con con densità spettrale bilatera di potenza pari a:

$$S_x(f)=1\times 10^{-3}\times \mathrm{rect}\left[\frac{fT}{2}\right] \quad \text{W/Hz}$$

Calcolare il rapporto tra la potenza media del processo di uscita e quella del processo di ingresso.



Soluzione esercizio 5

Il sistema ha risposta impulsiva pari a $\delta(t)-\delta(t-T)$ e risposta in frequenza $H(f)=1-e^{-j2\pi fT}$. La densità spettrale di potenza del processo in uscita è data da $S_y(f)=S_x(f)\left|1-e^{-j2\pi fT}\right|^2 = S_x(f)[2-2\cos(2\pi fT)]$.

La potenza media P_x del processo di ingresso è pari a $1\times 10^{-3}\times\frac{2}{T}$ W, mentre quella del processo di uscita è:

$$P_y = 1\times10^{-3}\int_{-1/T}^{1/T}\left[2-2\cos(2\pi fT)\right]df = 1\times10^{-3}\left\{\frac{4}{T}-0\right\} = \frac{4\times10^{-3}}{T}$$

Pertanto il rapporto $\dfrac{P_y}{P_x} = 2$

PROVETTA DI TEORIA DEI SEGNALI (d)

18 dicembre 2008

Esercizio N. 1

Un terminale mobile riceve un segnale costituito da due repliche del segnale passa banda $x(t) = Am(t)\cos(2\pi f_0 t)$, ove $m(t)$ è un segnale in banda base e $f_0 = 1\ GHz$. Le due repliche hanno ampiezze $A_1 = 0.25$ e $A_2 = 1$. Rispetto alla prima, la seconda arriva con un ritardo di $1/2\ ns$. Calcolare il modulo del rapporto tra la parte in fase e l'inviluppo naturale del segnale passa banda complessivo ricevuto dal terminale (N.B.: la risposta deve essere un numero).

Soluzione esercizio 1

Il segnale ricevuto ha la seguente espressione:

$$x(t) = \frac{1}{4}m(t)\cos(2\pi 10^9 t) + m(t)\cos\left(2\pi 10^9\left(t - 1/2\times 10^{-9}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{4}m(t)\cos(2\pi 10^9 t) - m(t)\cos\left(2\pi 10^9 t\right)$$

La forma canonica del segnale passa banda è:

$$= m(t)\left[\frac{1}{4} - 1\right]\cos(2\pi 10^9 t)$$

Il rapporto richiesto è ovviamente uguale a 1 .

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente funzione di trasferimento:

$$H(z) = \frac{2z^2 - z - 1}{z^2}$$

Dire, giustificando la risposta, se il sistema è causale e se è stabile. Determinare quindi la sua risposta al segnale $x[n] = u[n]$

Soluzione esercizio 2

La risposta impulsiva del sistema è $h[n]=2\delta[n]-\delta[n-1]-\delta[n-2]$. Il sistema è causale (è verificata la condizione $h[n]=0$ per $n<0$); esso è stabile, poiché la risposta impulsiva è un segnale di durata finita, con valori tutti finiti. La risposta è data da $2x[n]-x[n-1]-x[n-2]=2u[n]-u[n-1]-u[n-2]=2\delta[n]+\delta[n-1]$.

Esercizio N. 3

La generica realizzazione di un processo aleatorio è così definita:

$$x(t)=1+\mathrm{rect}(t-\alpha)$$

in cui α è una variabile aleatoria uniformemente distribuita tra 0 e 5.

Calcolare il valor medio del processo per $t=0$

Soluzione esercizio 3

Nel generico istante t_0 la realizzazione può assumere soltanto due valori: 1 oppure 2. Pertanto il valor medio sarà:

$$m_x(t_0)=1\times P[1]+2\times P[2]=1\times(1-P[2])+2\times P[2]=1+P[2].$$

La probabilità $P[2]$ corrisponde alla probabilità che la variabile α assuma un valore compreso tra $t_0-\frac{1}{2}$ e $t_0+\frac{1}{2}$ e quindi:

$$m_x(t_0)=1+\int_{t_0-1/2}^{t_0+1/2}\frac{1}{5}\mathrm{rect}\left[\frac{\alpha}{5}\right]d\alpha \quad\Rightarrow\quad m_x(0)=1+\frac{1}{5}\int_0^{0.5}d\alpha=\frac{11}{10}$$

Esercizio N. 4

Sia $m(t)$ un processo aleatorio stazionario in banda base. Si consideri il processo passa banda la cui generica realizzazione è data da:

$$x(t)=A(1+m(t))\cos(2\pi f_0 t+\phi)$$

in cui A e f_0 sono due costanti e ϕ è una variabile aleatoria, indipendente da $m(t)$, che assume in modo equiprobabile solamente i 4 valori $0, \frac{\pi}{2}, \pi, 3\frac{\pi}{2}$.

Calcolare il valor medio e la funzione di auto correlazione di $x(t)$ e dire, giustificando la risposta, se il processo $x(t)$ è stazionario in senso lato.

Soluzione esercizio 4

Calcolo del valor medio:

$$E[A(1+m(t))\cos(2\pi f_0 t+\phi)]=E[A(1+m(t))]\times E[\cos(2\pi f_0 t+\phi)]$$

(per l'indipendenza tra $m(t)$ e ϕ)

$$E[A(1+m(t))]\times E[\cos(2\pi f_0 t+\phi)]=$$

$$= A(1+m_m)\times\left\{\frac{1}{4}\cos(2\pi f_0 t)+\frac{1}{4}\cos\left(2\pi f_0 t+\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{4}\cos(2\pi f_0 t+\pi)+\frac{1}{4}\cos\left(2\pi f_0 t+3\frac{\pi}{2}\right)\right\}=0$$

Esso è indipendente da *t*, quindi il processo potrebbe essere stazionario in senso debole.
Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t.t+\tau)=E\left[A^2(1+m(t))(1+m(t+\tau))\cos(2\pi f_0 t+\phi)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)\right]$$

$$=\underbrace{E\left[A^2(1+m(t))(1+m(t+\tau))\right]}_{=A^2(1+R_m(\tau)+2m_m)}\underbrace{E\left[\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0(2t+\tau)+2\phi)+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)\right]}_{=0+\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)}$$

$$R_x(t,t+\tau)=\frac{A^2}{2}(1+R_m(\tau)+2m_m)\cos(2\pi f_0\tau)$$

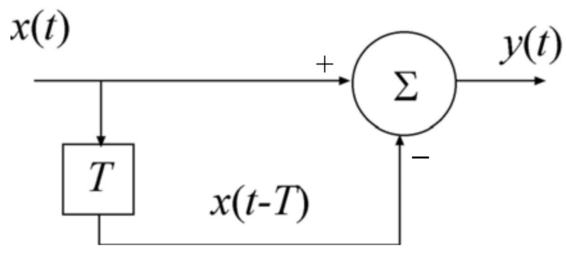
Il processo è stazionario in senso debole.

Esercizio N. 5

Nella figura seguente $x(t)$ è un processo aleatorio stazionario con con densità spettrale bilatera di potenza pari a:

$$S_x(f)=1\times10^{-3}\times\text{rect}\left[\frac{f}{2f_M}\right]\ \text{W/Hz}$$

Trovare la relazione che deve esistere tra f_M e *T* affinché la potenza media del processo di uscita risulti metà di quella del processo di ingresso.



Soluzione esercizio 5

Il sistema ha risposta impulsiva pari a $\delta(t)-\delta(t-T)$ e risposta in frequenza $H(f)=1-e^{-j2\pi fT}$. La densità spettrale di potenza del processo in uscita è data da $S_y(f)=S_x(f)\left|1-e^{-j2\pi fT}\right|^2=S_x(f)[2-2\cos(2\pi fT)]$.

La potenza media P_x del processo di ingresso è pari a $1\times10^{-3}\times2f_M$ W, mentre quella del processo di uscita è:

$$P_y = 1\times10^{-3}\int_{-f_M}^{f_M}\left[2-2\cos(2\pi fT)\right]df = 1\times10^{-3}\left\{4f_M - 4f_M\frac{\sin(2\pi f_M T)}{2\pi f_M T}\right\}$$

Pertanto per avere $\frac{P_y}{P_x} = 0.5$ dovrà essere

$4f_M - 4f_M\frac{\sin(2\pi f_M T)}{2\pi f_M T} = f_M$, da cui $\frac{\sin(2\pi f_M T)}{2\pi f_M T} = \frac{3}{4}$.