Teoria dei Segnali
(Appello del 13 gennaio 2009)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema LTI ha la seguente risposta impulsiva:

$$h(t) = \frac{1}{2} t^2 \operatorname{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$$

Ricavare la sua risposta al segnale $x(t) = 2t \operatorname{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)$

Soluzione

La risposta prevede il calcolo della convoluzione tra $x(t)$ e $h(t)$.

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{per } t < 0 \\ \int_0^t \tau^2 (t-\tau) d\tau = t\left.\frac{\tau^3}{3}\right|_0^t - \left.\frac{\tau^4}{4}\right|_0^t = \frac{1}{12} t^4 & \text{per } 0 < t < 1 \\ \int_{t-1}^1 \tau^2 (t-\tau) d\tau = t\left.\frac{\tau^3}{3}\right|_{t-1}^1 - \left.\frac{\tau^4}{4}\right|_{t-1}^1 = \frac{t}{3} - \frac{(t-1)^3}{3} - \frac{1}{4} + \frac{(t-1)^4}{4} & \text{per } 1 < t < 2 \\ 0 & \text{per } t > 2 \end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto è caratterizzato dalla seguente equazione alle differenze:

$$y[n] = -\frac{1}{8} y[n-2] + \frac{3}{4} y[n-1] + x[n]$$

Calcolare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

Eseguendo la trasformata di Fourier di entrambi i membri dell'equazione si ottiene:

$$Y\left(e^{j\Omega}\right) = -\frac{1}{8} Y\left(e^{j\Omega}\right) e^{-j2\Omega} + \frac{3}{4} Y\left(e^{j\Omega}\right) e^{-j\Omega} + X\left(e^{j\Omega}\right)$$

da cui si può calcolare la risposta in frequenza del sistema:

$$H\left(e^{j\Omega}\right) = \frac{1}{1 + \frac{1}{8} e^{-j2\Omega} - \frac{3}{4} e^{-j\Omega}}$$

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)}=\frac{2}{\left(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}\right)}-\frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}\right)}$$

La corrspondente risposta impulsiva è: $h[n]=\left[2\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right]u[n]$

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta in frequenza:

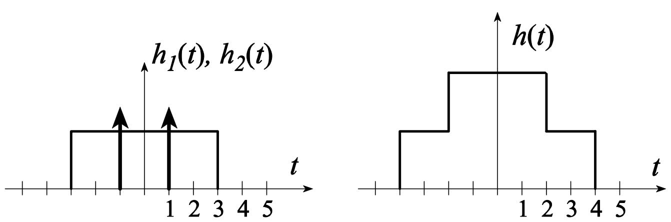
$$H(\omega)=\frac{\sin(3\omega)\cos(\omega)}{\omega}$$

Calcolare e disegnare con cura la sua risposta impulsiva.

Soluzione

La risposta in frequenza è il prodotto di $3\frac{\sin(3\omega)}{3\omega}$, che ha per antitrasformata la funzione $h_1(t)=\frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{t}{6}\right)$, con $\cos(\omega)$, che ha per antitrasformata la funzione $h_2(t)=\frac{1}{2}\delta(t+1)+\frac{1}{2}\delta(t-1)$. La risposta impulsiva corrisponde a $h_1(t)\otimes h_2(t)$, e cioè:

$$h(t)=\frac{1}{4}\mathrm{rect}\left(\frac{t+1}{6}\right)+\frac{1}{4}\mathrm{rect}\left(\frac{t-1}{6}\right)$$



Esercizio N. 4

Si consideri il segnale avente spettro $X(\omega)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$. Ricavare l'espressione $\hat{x}(t)$ della sua trasformata di Hilbert.

Soluzione

Lo spettro del segnale analitico $x(t)+j\hat{x}(t)$ è pari a $X(\omega)=2\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)u(\omega)$, per cui

$$x(t)+j\hat{x}(t)=\frac{1}{\pi}\int_0^1\cos\left(\frac{\pi}{2}\omega\right)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{j\omega\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}}{j\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}+\frac{e^{j\omega\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}}{j\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\right]_0^1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{je^{jt}-1}{j\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{je^{jt}+1}{j\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\right]=\frac{1}{2\pi}\left[\frac{e^{jt}}{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{e^{jt}}{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}+j\frac{1}{\left(t+\frac{\pi}{2}\right)}+j\frac{1}{\left(t-\frac{\pi}{2}\right)}\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\frac{-\pi e^{jt}+j2t}{t^2-\frac{\pi^2}{4}}=\frac{1}{2\pi}\frac{-\pi\cos(t)}{t^2-\frac{\pi^2}{4}}+j\frac{1}{2\pi}\frac{2t-\pi\sin(t)}{t^2-\frac{\pi^2}{4}}$$

Pertanto $\hat{x}(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{2t-\pi\sin(t)}{t^2-\frac{\pi^2}{4}}$

Esercizio N. 5

Un processo aleatorio stazionario in senso debole ha la seguente funzione di auto correlazione:

$$R_x(\tau)=e^{-|\tau|}$$

Calcolare il valor medio e la varianza del processo. Il processo è inviato all'ingresso di un sistema LTI avente risposta in frequenza data da:

$$H(f)=\mathrm{rect}\left(\frac{f}{2f_M}\right)$$

Calcolare la potenza media del processo all'uscita del sistema quando $f_M=\frac{1}{2\pi}$.

Soluzione

La densità spettrale di potenza del processo è data dalla trasformata di Fourier di $R_x(\tau)$. Risulta $S_x(f)=\frac{2}{1+4\pi^2f^2}$. Non essendo presente in $S_x(f)$ un impulso nell'origine, il valor medio del processo è nullo. Di conseguenza la varianza coincide con il valore quadratico medio, che è pari a $R_x(0)$, e quindi $\sigma_x=1$.

La potenza media del processo all'uscita del sistema è data da:

$$P_y = \int_{-f_M}^{f_M} \frac{2}{1+4\pi^2 f^2} df = \frac{2}{2\pi} \int_{-2\pi f_M}^{2\pi f_M} \frac{1}{1+x^2} dx = \frac{2}{\pi} \arctan(2\pi f_M)$$

Se $f_M = \frac{1}{2\pi}$, si ha $P_y = \frac{1}{2}$

Esercizio N. 6

Si considerino i seguenti due processi aleatori, associati al medesimo esperimento costituito dal lancio di un dado:

a) $x(t) = \begin{cases} \cos(2\pi f_0 t) & \text{uscita pari} \\ -\cos(2\pi f_0 t) & \text{uscita dispari} \end{cases}$

b) $y(t) = \begin{cases} \sin(4\pi f_0 t) & \text{uscita} \leq 4 \\ -\sin(4\pi f_0 t) & \text{uscita} > 4 \end{cases}$

Dire, giustificando la risposta, se i due processi sono correlati o incorrelati.

Soluzione

Per decidere se i due processi sono incorrelati è necessario valutare la mutua correlazione $R_{xy}(t, t+\tau)$ e verificare se per ogni coppia $t, t+\tau$ si ha che:

$$R_{xy}(t, t+\tau) = E[x(t)y(t+\tau)] = E[x(t)]E[y(t+\tau)]$$

I sei casi possibili (ognuno avente probabilità $\frac{1}{6}$) sono riportati in tabella:

Uscita	$x(t)y(t+\tau)$
1	$-\cos(2\pi f_0 t)\sin(4\pi f_0 (t+\tau))$
2	$\cos(2\pi f_0 t)\sin(4\pi f_0 (t+\tau))$
3	$-\cos(2\pi f_0 t)\sin(4\pi f_0 (t+\tau))$
4	$\cos(2\pi f_0 t)\sin(4\pi f_0 (t+\tau))$
5	$\cos(2\pi f_0 t)\sin(4\pi f_0 (t+\tau))$
6	$-\cos(2\pi f_0 t)\sin(4\pi f_0 (t+\tau))$

Come si vede facilmente, per ogni coppia $t, t+\tau$ $R_{xy}(t, t+\tau) = 0$. Poichè $E[x(t)] = 0$, la condizione $E[x(t)y(t+\tau)] = E[x(t)]E[y(t+\tau)]$ è rispettata e pertanto i due processi sono incorrelati.