Teoria dei Segnali

(Appello del 27 gennaio 2009)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso ideale centrato in t_0 con il segnale $h(t,t_0)=u(2t-t_0)$.

a) Si tratta di un sistema tempo-invariante? (Giustificare la risposta).
b) Ricavare la sua risposta al segnale $x(t)=\cos(\omega_0 t)u(t)$

Soluzione

Il sistema non è tempo invariante: infatti per $t_0=0$ la risposta è $u(2t)$. Per essere tempo-invariante, quando l'impulso è centrato in t_0 dovrebbe rispondere con $u(2t-2t_0)$.

La risposta cercata è data da:

$$y(t)=\begin{cases} 0 & per\, t<0 \\ \displaystyle\int_0^{2t}\cos(\omega_0\tau)d\tau=\frac{\sin(2\omega_0 t)}{\omega_0} & per\, t>0 \end{cases}$$

Esercizio N. 2

Un sistema LTI tempo discreto ha la seguente risposta in frequenza:

$$H\left(e^{j\Omega}\right)=\left|\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\right|+j\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right) \qquad -\pi<\Omega<\pi$$

Calcolare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

Antitrasformando $H\left(e^{j\Omega}\right)$ si ottiene:

$$h[n]=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\cos(\Omega n)d\Omega-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)\sin(\Omega n)d\Omega=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\left\{\sin\left(\frac{\Omega}{2}+\Omega n\right)-\sin\left(\Omega n-\frac{\Omega}{2}\right)+\cos\left(\frac{\Omega}{2}+\Omega n\right)+\cos\left(\Omega n-\frac{\Omega}{2}\right)\right\}d\Omega$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{1}{n+\frac{1}{2}} - \frac{1}{n-\frac{1}{2}} + \frac{(-1)^n}{n+\frac{1}{2}} - \frac{(-1)^n}{n-\frac{1}{2}}\right] = -\frac{1}{2\pi}\frac{1+(-1)^n}{n^2-\frac{1}{4}}$$

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo continuo ha la seguente risposta in frequenza:

$$H(\omega) = \frac{\cos(2\omega)}{(1+j\omega)^2}$$

Calcolare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

La funzione $\frac{1}{(1+j\omega)}$ è la trasformata di Fourier del segnale $x_1(t) = e^{-t}u(t)$. Pertanto la funzione $\frac{1}{(1+j\omega)^2}$ è la trasformata di Fourier del segnale $x_2(t) = x_1(t) \otimes x_1(t) = te^{-t}u(t)$. A sua volta la funzione $\cos(2\omega)$ è la trasformata di Fourier del segnale $x_3(t) = \frac{1}{2}\delta(t-2) + \frac{1}{2}\delta(t+2)$. Quindi $h(t) = x_2(t) \otimes x_3(t)$. In conclusione:

$$h(t) = \frac{1}{2}(t-2)e^{-(t-2)}u(t-2) + \frac{1}{2}(t+2)e^{-(t+2)}u(t+2).$$

Esercizio N. 4

Lo spettro della trasformata di Hilbert di un segnale $x(t)$ è dato da:

$$\hat{X}(\omega) = \mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$$

Chi è il segnale $x(t)$?

Soluzione

Il segnale $x(t)$ avrà spettro pari a $X(\omega) = j\,\mathrm{sgn}(\omega)\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2\omega_0}\right)$.

Antitrasformando si ottiene:

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_0}^{0}-je^{j\omega t}d\omega+\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\omega_0}je^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\frac{e^{-j\omega_0 t}-1}{t}+\frac{1}{2\pi}\frac{e^{j\omega_0 t}-1}{t}=$$
$$=\frac{\cos(\omega_0 t)-1}{\pi t}$$

Esercizio N. 5

La generica realizzazione di un processo aleatorio è data da:

$$x(t)=\cos(2\pi f_0 t+\phi)$$

ove f_0 e ϕ sono due variabili aleatorie tra loro indipendenti. La variabile f_0 è uniformemente distribuita tra 1 MHz e 2 MHz, mentre la variabile ϕ è uniformemente distribuita tra 0 e 2π .

a) Il processo aleatorio è stazionario in senso debole? (giustificare la risposta).
b) Disegnare con cura la densità spettrale di potenza del processo.

Soluzione

Le densità di probabilità delle variabili f_0 e ϕ sono rispettivamente:

$$p_{f_0}(f_0)=\frac{1}{10^6}\mathrm{rect}\left(\frac{f_0}{10^6}-1.5\right)\qquad p_\phi(\phi)=\frac{1}{2\pi}\mathrm{rect}\left(\frac{\phi}{2\pi}-\frac{1}{2}\right)$$

Il valor medio del processo è nullo: infatti

$$E[x(t)]=\int_{10^6}^{2\cdot 10^6}\frac{1}{10^6}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi f_0 t+\phi)d\phi\right\}df_0=0$$

La funzione di auto correlazione risulta:

$$E[x(t)x(t+\tau)]=\int_{10^6}^{2\cdot 10^6}\frac{1}{10^6}\left\{\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi}\cos(2\pi f_0 t+\phi)\cos(2\pi f_0(t+\tau)+\phi)d\phi\right\}df_0=$$
$$=\int_{10^6}^{2\cdot 10^6}\frac{1}{10^6}\frac{1}{2}\cos(2\pi f_0\tau)df_0\quad \textit{che dipende solo da } \tau$$

Quindi il processo è stazionario in senso debole.

La potenza media è pari a $\frac{1}{2}$. Essa è uniformemente distribuita tra 1 MHz e 2 MHz e quindi la densità spettrale di potenza (unilatera) è costante e pari a $\frac{1}{2}\times 10^{-6}$ tra 1 MHz e 2 MHz e nulla altrove.

Esercizio N. 6

Un processo aleatorio gaussiano, stazionario, ha la seguente funzione di auto correlazione:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{|\tau|}{6}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{12}\right)$$

Scrivere l'espressione della sua densità di probabilità del primo ordine.

Soluzione

Si tratta di trovare il valor medio e la varianza del processo. Dall'espressione della funzione di auto correlazione si deduce che il valor medio del processo è pari a $\frac{1}{2}$, mentre il suo valore quadratico medio, che corrisponde a $R_x(0)$, risulta uguale a $\frac{3}{4}$. Dalla relazione:

$$\sigma_x^2 = E\left[(x(t))^2\right] - m_x^2$$

si ottiene $\sigma_x^2 = \frac{1}{2}$. L'espressione della densità di probabilità è dunque:

$$p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\left(x - \frac{1}{2}\right)^2}$$