Teoria dei Segnali

(Appello del 13 febbraio 2009)

Prova scritta

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso ideale centrato in $t=\tau$ con il segnale $h(t,\tau)=e^{-|\tau|}u(t)$. Calcolare la sua risposta al segnale $x(t)=u(t-1)$.

Soluzione

Il sistema non è tempo-invariante. La risposta ad un generico segnale $x(t)$ deve essere calcolata con l'integrale:

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(\tau)h(t,\tau)d\tau$$

che in questo caso diventa:

$$y(t)=u(t)\int_{1}^{\infty}e^{-\tau}d\tau=\frac{1}{e}u(t)$$

Esercizio N. 2

Si calcoli la trasformata di Fourier del segnale $x(t)=\cos(2\pi t)u(t)$.

Soluzione

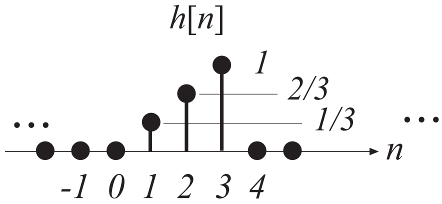
La trasformata è data dalla seguente convoluzione:

$$\frac{1}{2\pi}F(\cos(2\pi t))\otimes F\{u(t)\}=$$

$$=\frac{1}{2j(\omega+2\pi)}+\frac{1}{2j(\omega-2\pi)}+\frac{\pi}{2}(\delta(\omega+2\pi)+\delta(\omega-2\pi))$$

Esercizio N. 3

Un sistema LTI tempo discreto è caratterizzato dalla risposta impulsiva riportata in figura 2. Calcolare la risposta al segnale $x[n]=\cos\left(\frac{\pi}{14}n\right)u[n]$.



Soluzione

Invertendo tra loro $x[n]$ e $h[n]$ si ricava:

$$y[n] = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{\pi}{14}(n-1)\right)u[n-1] + \frac{2}{3}\cos\left(\frac{\pi}{14}(n-2)\right)u[n-2] + \cos\left(\frac{\pi}{14}(n-3)\right)u[n-3]$$

<u>Esercizio N. 4</u>

La funzione di sistema di un sistema LTI tempo discreto è:

$$H(z) = \frac{1 - z^{-1}}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}z^{-1} - z^{-2}}$$

Calcolare la sua risposta al gradino unitario, sapendo che il sistema è stabile.

Soluzione

La funzione $H(z)$ presenta due poli, in $z = 2$ e $z = -3$. Pertanto esistono tre differenti regioni di convergenza, ma l'unica regione contenente la circonferenza di raggio unitario è quella caratterizzata da $|z| < 2$. Poiché la trasformata Z del gradino unitario è pari a $\frac{1}{1 - z^{-1}}$, la trasformata Z della risposta del sistema al gradino unitario sarà:

$$Y(z) = \frac{1}{\frac{1}{6} + \frac{1}{6}z^{-1} - z^{-2}} = \frac{12}{5}\frac{1}{1 - 2z^{-1}} + \frac{18}{5}\frac{1}{1 + 3z^{-1}}$$

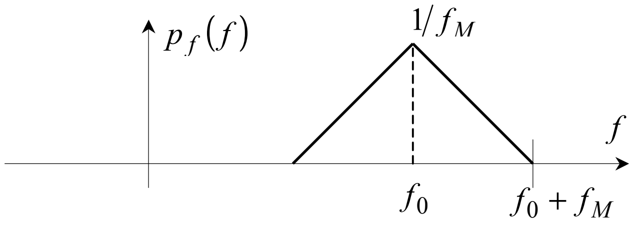
A questa trasformata corrisponde il segnale $y[n] = \left(-\frac{12}{5}2^n - \frac{18}{5}(-3)^n\right)u[-n-1]$.

<u>Esercizio N. 5</u>

Si consideri il processo aleatorio così definito:

$$x(t) = \cos(2\pi f t + \phi)$$

ove f e ϕ sono due variabili aleatorie indipendenti. La variabile f è caratterizzata dalla densità di probabilità rappresentata in figura:



La variabile aleatoria ϕ assume, in maniera equiprobabile, i valori $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ e $\frac{3\pi}{2}$.

Dire, giustificando la risposta, se il processo è stazionario e se è regolare (ovviamente in senso debole).

Soluzione

Verifichiamo la stazionarietà:

a) Valor medio
Viste le caratteristiche della variabile aleatoria ϕ, si può immediatamente concludere che il valor medio sarà nullo in corrispondenza ad ogni valore della variabile t e che pertanto esso è indipendente dal tempo.

b) Funzione di auto correlazione
$$R_x(t,t+\tau)=E[\cos(2\pi ft+\phi)\cos(2\pi f(t+\tau)+\phi)]=$$
$$=\frac{1}{2}E[\cos(4\pi ft+2\pi f\tau+2\phi)]+\frac{1}{2}E[\cos(2\pi f\tau)]$$
Il primo valor medio è nullo (la variabile 2ϕ assume in modo equiprobabile i valori $0,\ \pi, 2\pi$ e 3π), mentre il calcolo del secondo valor medio porta ad un valore comunque dipendente solamente da τ.

Pertanto si può concludere che il processo è stazionario in senso debole.

Verifichiamo la regolarità:

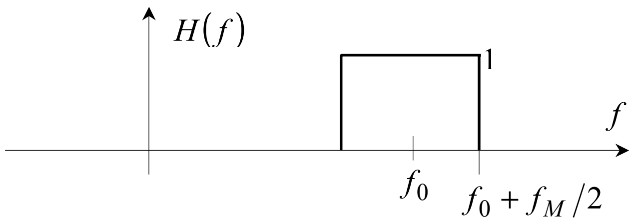
a) Valor medio temporale
Chiaramente per ogni realizzazione esso è nullo.

b) Funzione di autocorrelazione temporale
$$R(\tau)=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi ft+\phi)\cos(2\pi f(t+\tau)+\phi)dt$$
$$=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(4\pi ft+2\pi f\tau+2\phi)dt+\lim_{T\to\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T/2}^{T/2}\cos(2\pi f\tau)dt$$
$$=0+\frac{1}{2}\cos(2\pi f\tau)$$

Ogni realizzazione è caratterizzata da un diverso valore di frequenza, per cui la funzione di auto correlazione temporale risulta dipendente dalla realizzazione. IL processo quindi non è regolare.

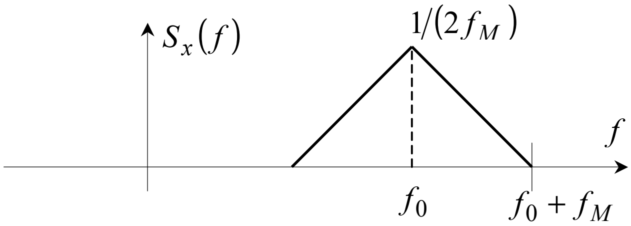
Esercizio N. 6

Il processo aleatorio dell'esercizio N. 5 è applicato ad un filtro con risposta in frequenza indicata in figura. Calcolare la densità spettrale di potenza e la potenza media del processo in uscita. (N.B. La risposta in frequenza è disegnata solo per le frequenze positive)

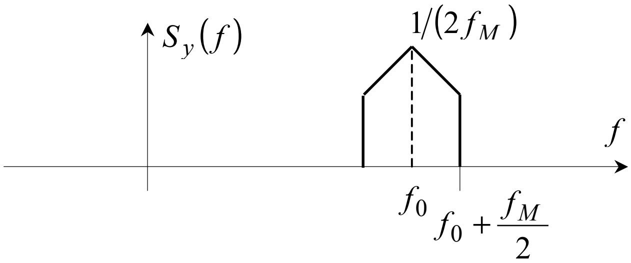


Soluzione

Calcoliamo innanzitutto la densità spettrale di potenza del processo di uscita. Siccome la potenza media di ogni realizzazione è pari a $1/2$, anche la potenza media del processo avrà questo valore. Tale potenza è distribuita nell'intervallo tra $f_0 - f_M$ e $f_0 - f_M$ in maniera proporzionale alla densità di probabilità della variabile aleatoria f. La densità spettrale di potenza unilatera sarà pertanto fatta così:



Vista la forma della risposta in frequenza del filtro, si conclude che la densità spettrale del processo di uscita ha il seguente andamento:



La potenza media è data dall'area sotto la funzione $S_y(f)$. . La potenza dunque sarà pari a $\frac{3}{8}$.