Teoria dei Segnali

(Appello del 11 giugno 2009)

Prova scritta

Parte prima

Esercizio N. 1

Un sistema lineare risponde all'impulso centrato in $t = \tau$ con il segnale $\delta(t - |\tau|)$.

Ricavare la sua risposta ai segnali $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$ e $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$.

(sugg.: è molto importante distinguere i due casi $t > 0$ e $t < 0$)

Soluzione

Il sistema non è tempo invariante (perché)?

a) $x(t) = \cos(2\pi f_0 t)$

La risposta è data da $y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \cos(2\pi f_0 \tau)\delta(t - |\tau|)d\tau$, che per $t > 0$ diventa:

$$y(t) = \cos(2\pi f_0 (-t)) + \cos(2\pi f_0 t) = 2\cos(2\pi f_0 t)$$

mentre per $t < 0$ si ha $y(t) = 0$

b) $x(t) = \sin(2\pi f_0 t)$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sin(2\pi f_0 \tau)\delta(t - |\tau|)d\tau,$$

in questo caso la risposta è identicamente nulla.

Esercizio N. 2

Di un segnale tempo discreto $x[n]$ con trasformata di Fourier $X(e^{j\Omega})$ si sa che:

1). $x[n] = 0$ per $n < 0$

2). $x[0] > 0$

3). $\mathrm{Im}\{X(e^{j\Omega})\} = -\sin(\Omega) + \sin(2\Omega)$

4). $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi} |X(e^{j\Omega})|^2 d\Omega = 3$

Determinare $x[n]$.

(sugg.: il punto 3 ci permette di conoscere la parte dispari di $x[n]$; ma il punto 1 ci dice che $x[n] = 0$ per $n < 0$. Quindi come deve essere la parte pari?...)

Soluzione

La parte immaginaria della trasformata di Fourier corrisponde alla trasformata della parte dispari del segnale. Quindi, antitrasformando, si ottiene:

$$x_d[n] = F^{-1}\{-j\sin(\Omega) + j\sin(2\Omega)\} = \frac{1}{2}\delta[n+2] - \frac{1}{2}\delta[n+1] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-2]$$

Siccome $x[n]$ deve essere nullo per $n < 0$, la parte pari deve annullare i due impulsi presenti in $n = -2$ e $n = -1$ epertanto dovrà essere del tipo

$$x_p[n] = -\frac{1}{2}\delta[n+2] + \frac{1}{2}\delta[n+1] + A\delta[n] + \frac{1}{2}\delta[n-1] - \frac{1}{2}\delta[n-2]$$

Per il momento sappiamo allora che $x[n] = +A\delta[n] + \delta[n-1] - \delta[n-2]$

Il punto 4) permette di determinare *A*. Per il teorema di Parseval dovrà essere $A = 1$.

<u>Esercizio N. 3</u>

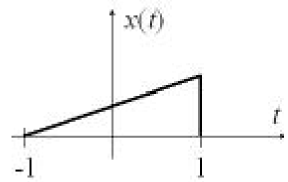
Si consideri il segnale tempo continuo così definito:

$$x(t) = \begin{cases} 0 & per\ |t| > 1 \\ \dfrac{(t+1)}{2} & per\ -1 < t < 1 \end{cases}$$

Calcolare la trasformata di Fourier della sua parte dispari.

Soluzione

La funzione $x(t)$ ha l'andamento mostrato nella seguente figura.



Pertanto esso può essere espresso nella seguente maniera:

$$x(t) = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{2}\mathrm{rect}\left(\frac{\tau}{2}\right)d\tau - u(t-1)$$

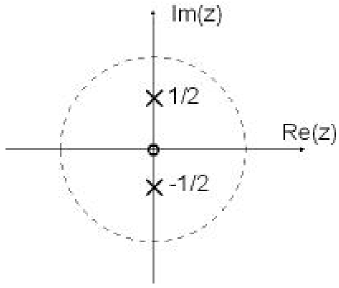
La trasformata di Fourier della parte dispari coincide con la parte immaginaria della trasformata di $x(t)$. Sfruttando la proprietà della trasformata dell'integrale e ricordando la trasformata di Fourier della funzione rect si arriva al seguente risultato:

$$\mathrm{Im}(X(\omega)) = -\frac{\sin(\omega)}{\omega^2} + \frac{\cos(\omega)}{\omega}$$

Parte seconda

Esercizio N. 4

Un sistema LTI tempo – discreto ha una funzione di trasferimento caratterizzata dal seguente diagramma zeri – poli:



Il sistema è stabile e la sua risposta impulsiva vale 2 per $n = 1$. Calcolare la sua risposta impulsiva.

Soluzione

Dalla distribuzione degli zeri e dei poli si deduce che la funzione di trasferimento del sistema avrà la seguente espressione:

$$H(z) = \frac{Az}{\left(z + j\frac{1}{2}\right)\left(z - j\frac{1}{2}\right)} = \frac{Az^{-1}}{2}\left[\frac{1}{1 + j\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1 - j\frac{1}{2}z^{-1}}\right]$$

La sua antitrasformata è data da:

$$h[n] = A\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\left[\cos\left(\frac{(n-1)\pi}{2}\right)\right]u[n-1]$$

Affinché tale risposta valga 2 per $n = 1$, deve essere A =2.

Esercizio N. 5

Calcolare la funzione di auto correlazione del processo aleatorio così definito:

$$x(t) = \cos(2\pi f\, t + \varphi)$$

con f e φ variabili aleatorie indipendenti, uniformemente distribuite rispettivamente tra 1 MHz e 2 MHz e tra 0 e 2π radianti.

Si tratta di un processo aleatorio stazionario? (almeno in senso debole).

Soluzione

Calcolo della funzione di autocorrelazione:

$$R_x(t, t+\tau) = E[\cos(2\pi ft + \varphi)\cos(2\pi f(t+\tau) + \varphi)] =$$

$$= E\left[\frac{1}{2}\cos(4\pi ft + 2\pi f\tau + 2\varphi) + \frac{1}{2}\cos(2\pi f\tau)\right]$$

$$= \int_{f_1}^{f_2}\int_{0}^{2\pi}\left[\frac{1}{2}\cos(4\pi ft+2\pi f\tau+2\varphi)+\frac{1}{2}\cos(2\pi f\tau)\right]\frac{1}{2\pi}\frac{1}{f_2-f_1}d\varphi\, df$$

avendo indicato con f_1 e f_2 le frequenze di 1 MHz e 2 MHz. L'integrale in φ della prima parte è nullo. Il tutto si riduce quindi a

$$R_x(\tau)=\int_{f_1}^{f_2}\frac{1}{2}\cos(2\pi f\tau)\frac{1}{f_2-f_1}df=\frac{1}{2}\frac{1}{f_2-f_1}\frac{\sin(2\pi f_2\tau)-\sin(2\pi f_1\tau)}{2\pi\tau}$$

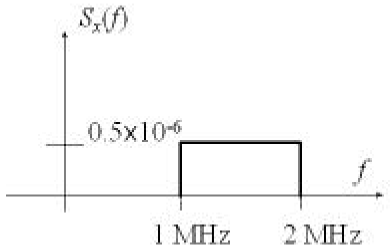
Siccome si verifica facilmente che il valor medio è nullo, si conclude che il processo è stazionario in senso debole.

Esercizio N. 6

Il processo aleatorio dell'esercizio precedente è posto all'ingresso di un sistema LTI con risposta impulsiva $h(t)=e^{-\frac{1}{2}t}u(t)$. Calcolare la densità spettrale di potenza del processo all'uscita del sistema.

Soluzione

La potenza media del processo è pari a 0.5 W. Essa è distribuita in maniera uniforme tra 1 e 2 MHz. Pertanto la sua densità spettrale di potenza unilatera avrà il seguente andamento:



Analiticamente si può scrivere:

$$S_x(f)=0.5\times10^{-6}\,\text{rect}\left[\frac{f-1.5\times10^6}{10^6}\right]$$

La risposta in frequenza del sistema è pari a $\dfrac{1}{\frac{1}{2}+j2\pi f}$ e quindi la densità spettrale di potenza unilatera del processo di uscita è data da:

$$S_y(f)=0.5\times10^{-6}\,\text{rect}\left[\frac{f-1.5\times10^6}{10^6}\right]\frac{4}{1+16\pi^2 f^2}$$