

meccanica delle vibrazioni

laurea magistrale
ingegneria meccanica

parte 1.0
scrittura equazioni del moto

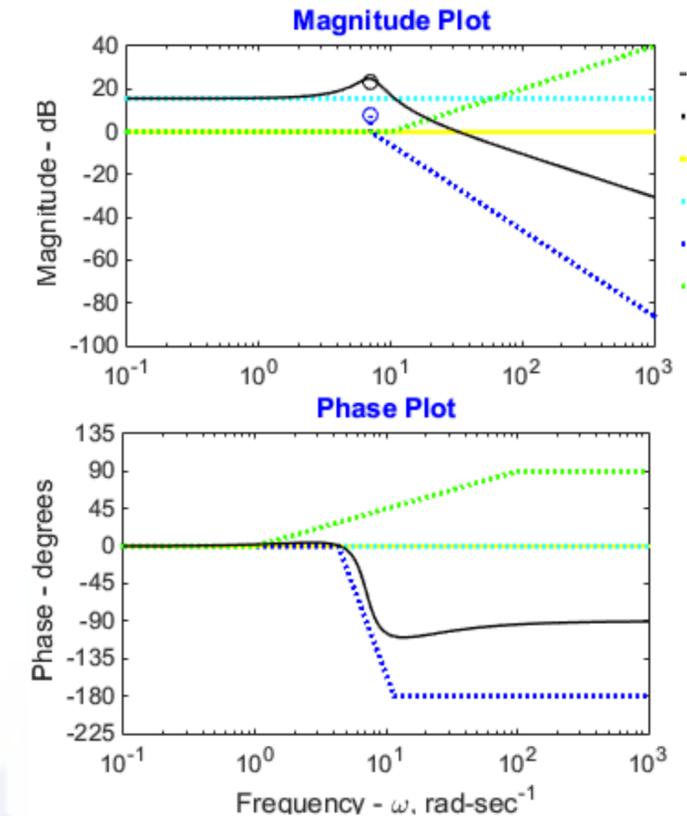
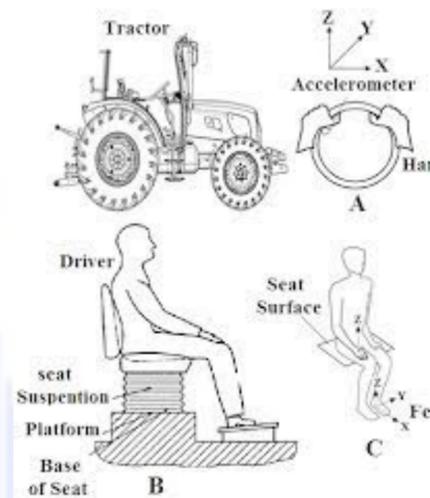
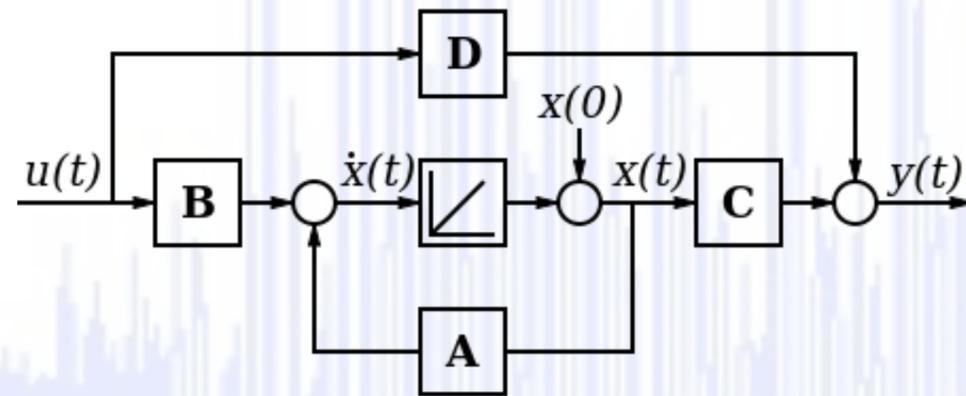
Lo studio di un sistema dinamico può essere fatto in molti modi differenti, in funzione dell'utilizzo del sistema, della sua rappresentazione matematica e degli scopi richiesti quali i:

- studiarne l'evoluzione nel dominio del tempo...
(delle grandezze caratteristiche, degli stati...)
- studiarne la risposta in funzione della forzante applicata
(impulsiva, armonica, random, operativa..)
- controllarne la risposta in funzione delle caratteristiche del sistema e della forzante applicata per ottenere specifici risultati..
(controllo velocità, vibrazione residua..)
- ...

variazione freq. naturale vs presenza di danno

risposta sospensioni vs eccitazione strada

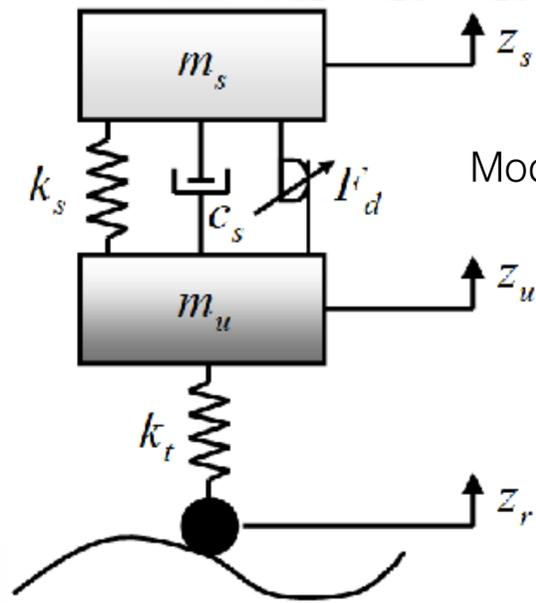
controllo attivo gimbal macchina fotografica



Risulta Comunque utile avere una formulazione "matematica" del problema!

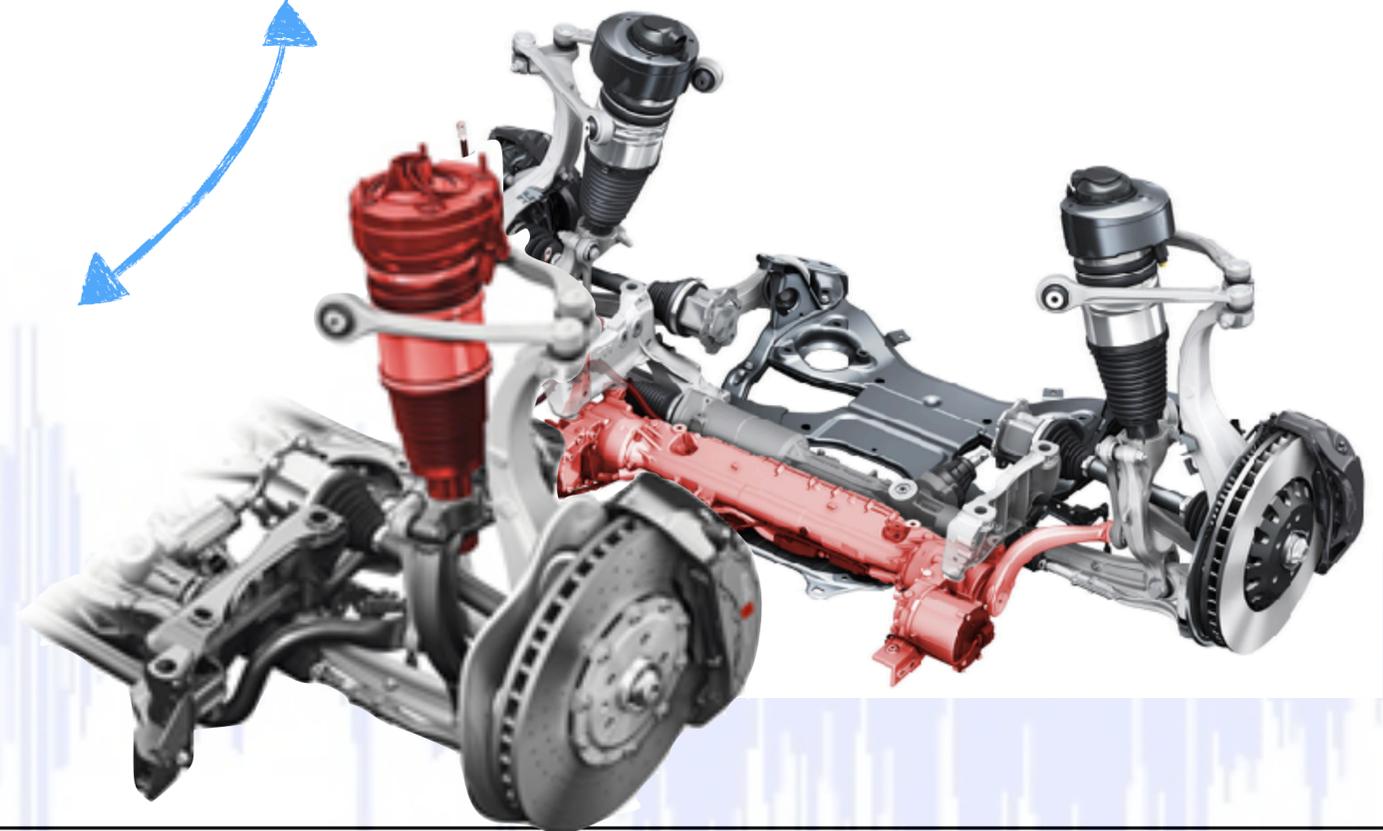


Sistema fisico

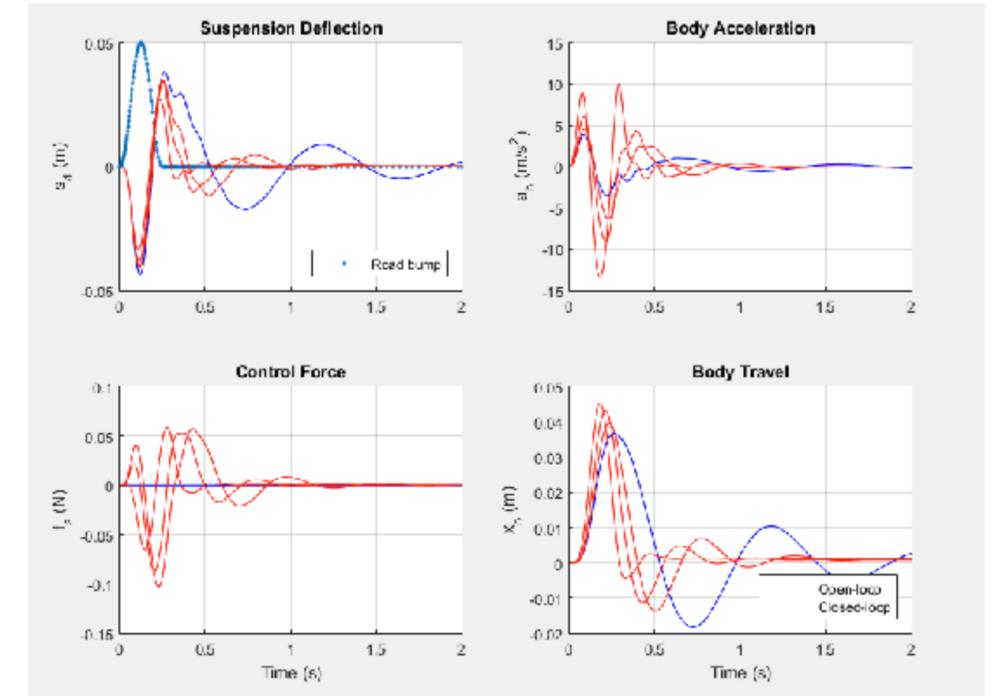


Modello numerico

Sottosistemi

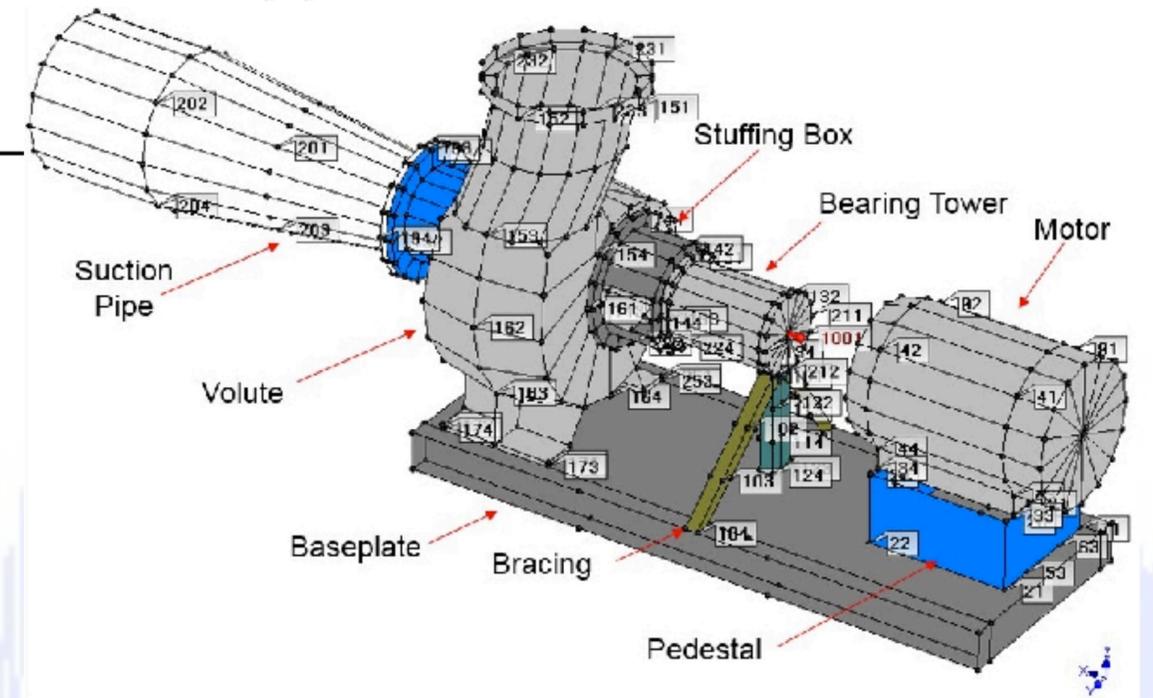
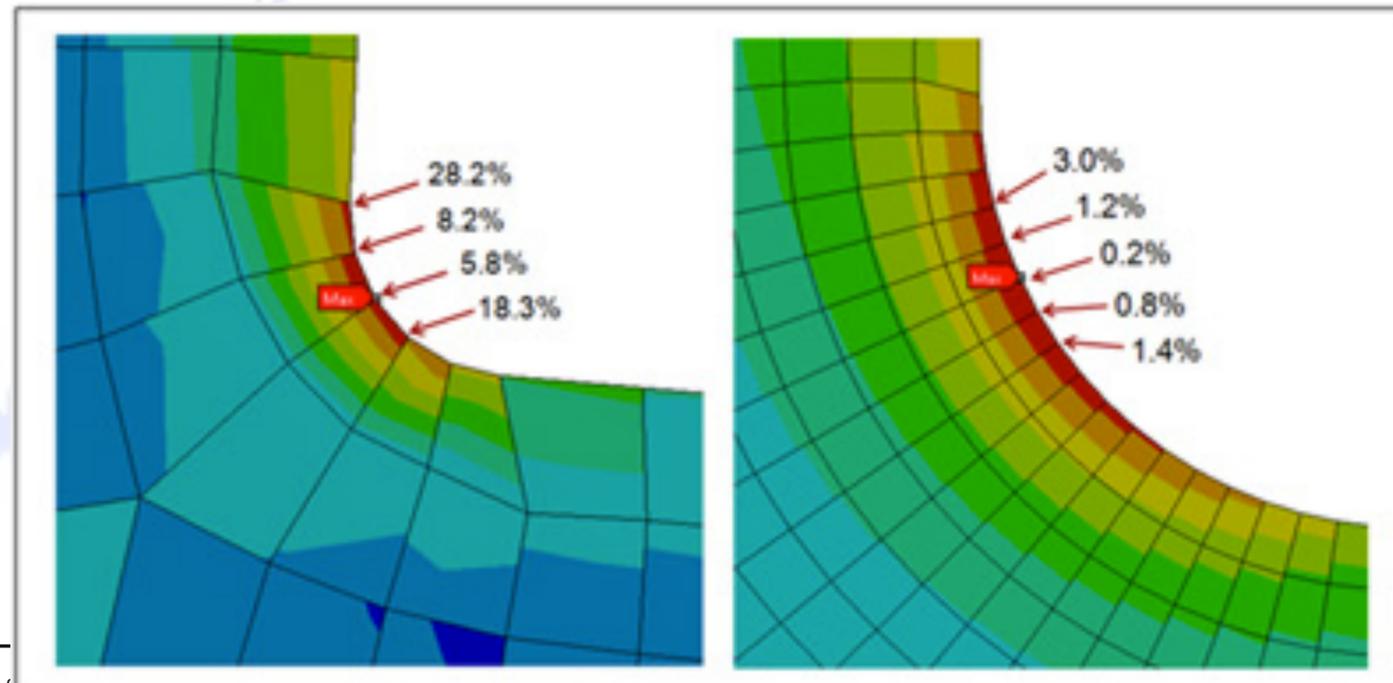
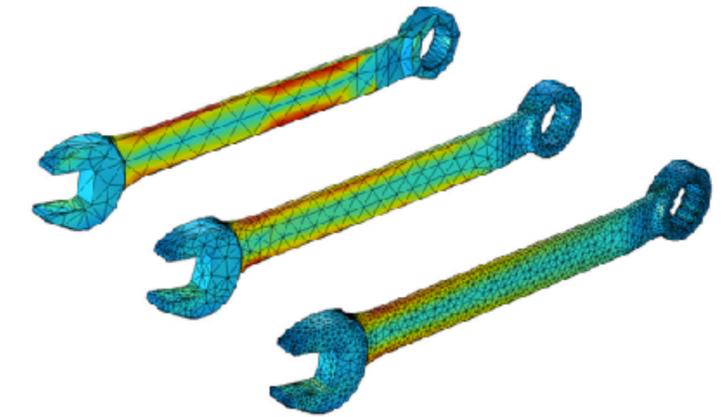
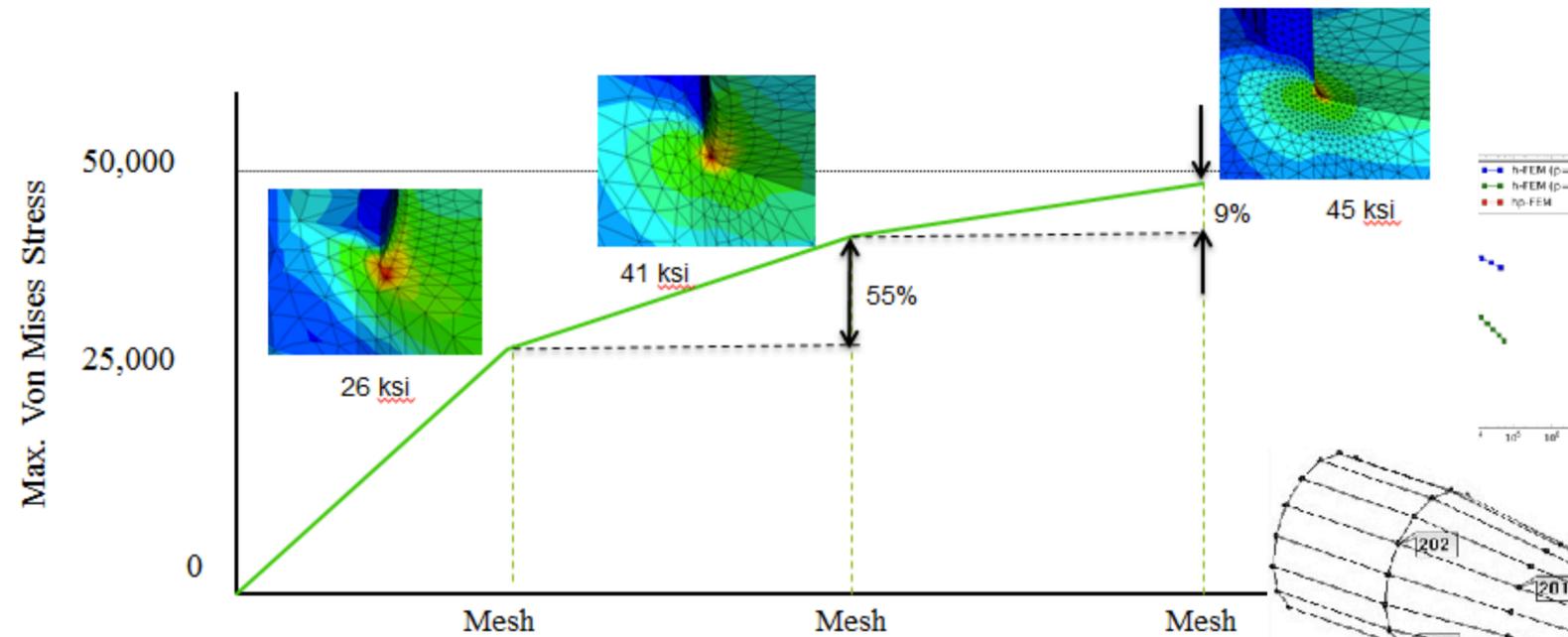


Risposte dinamiche



- ..semplificare
- ..modellare
- ..ottimizzare i parametri
- ..rimettere assieme tutto...
- ..reiterare!

Grazie alla rappresentazione matematica del sistema, è possibile analizzare il comportamento (dinamico), con livelli di dettaglio definiti dall'ordine del modello e dall'utilizzo del risultato!



La rappresentazione "matematica" di partenza (ben nota) per lo studio dei sistemi dinamici è:

$$[m] \{ \ddot{x}(t) \} + [c] \{ \dot{x}(t) \} + [k] \{ x(t) \} = \{ f(t) \}$$



(eq. differenziale del secondo ordine...
a termini costanti...lineare... non omogenea...)

in cui ci sono 4 termini fondamentali, che determinano il tipo di modello che l'equazione rappresenta.

$$[m] \{ \ddot{x} \} + [c] \{ \dot{x} \} + [k] \{ x \} = \{ f \}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

Forze Dissipative

Forzanti Esterne

per semplicità tralasciamo
per un po' da dipendenza da (t)

Variano i termini potremmo studiare un sistema..

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{0\}$$

...non forzato

$$[m]\{\ddot{x}\} + [0]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\}$$

...non smorzato

$$[m]\{\ddot{x}\} + [k]\{x^3\} = \{0\}$$

...non lineare

$$[I]\{\ddot{\theta}\} + [c_\theta]\{\dot{\theta}\} + [k_\theta]\{\theta\} = \{M\}$$

...torsionale

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix} c_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_1 + c_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{Bmatrix}
 +
 \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 \\ 0 & -k_2 & k_2 \end{bmatrix}
 \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix}
 =
 \begin{Bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{Bmatrix}$$

...accoppiato

Riguardiamo un attimo i gli elementi fondamentali:..

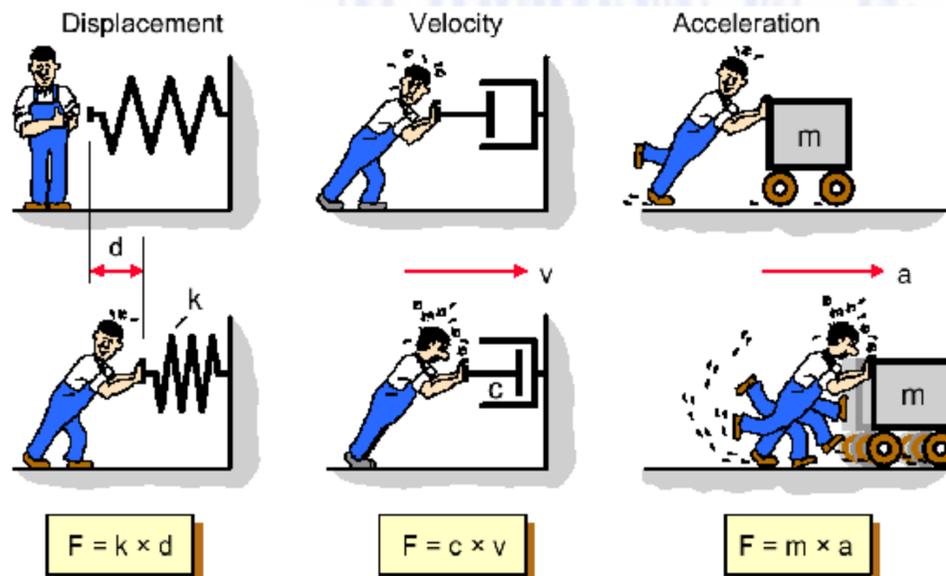
$$[m] \{\ddot{x}\} + [c] \{\dot{x}\} + [k] \{x\} = \{f\}$$

$[m] \{\ddot{x}\}$..forze inerziali, .. nella "massa" si immagazzina l'energia cinetica e potenziale di posizione

$[c] \{\dot{x}\}$..forze dissipative .. nello "smorzatore" si dissipa l'energia trasformandola in calore

$[k] \{x\}$..forze elastiche .. nella "molla" si immagazzina l'energia elastica

$\{f\}$..forzanti .. definiscono il tipo di moto



Nell'equazione del moto tutte queste forze sono in equilibrio!

NB solitamente considereremo elementi IDEALI con una sola proprietà alla volta!
MOLLA > pura rigidezza, no massa, no smorzamento



Elemento Inerziale - massa [kg], momento d'inerzia [kgm²]

$$\left[\text{kg} * \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right] = [\text{N}]$$

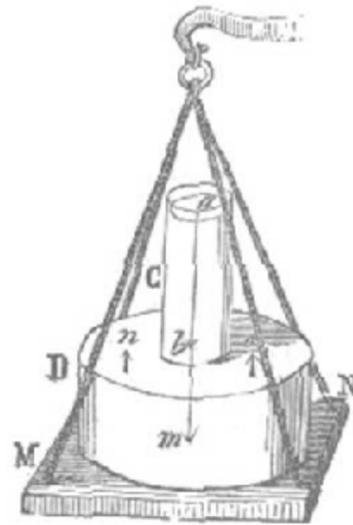
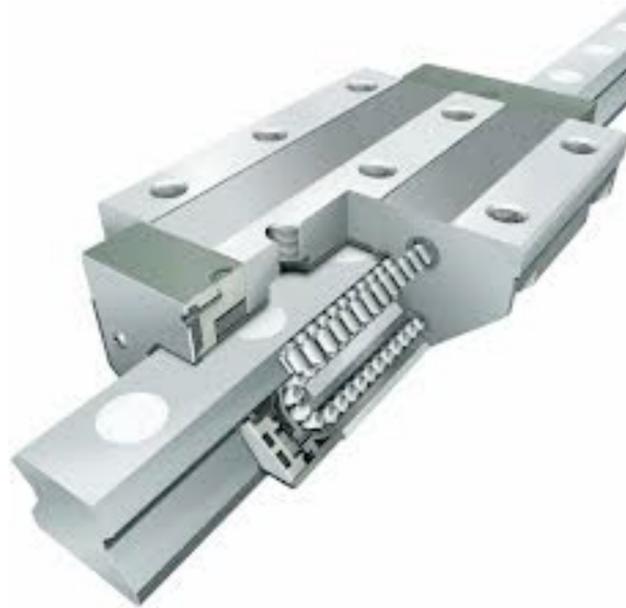
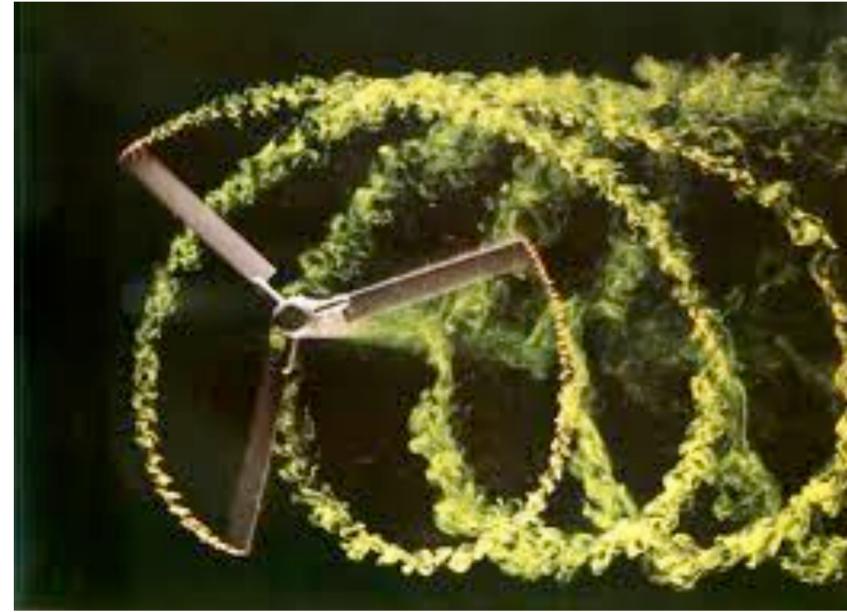


Fig. 49.



Abituatevi a considerare tutti i gradi di libertà della "massa" :

$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2$$

moto lineare 1D, 1 coordinata

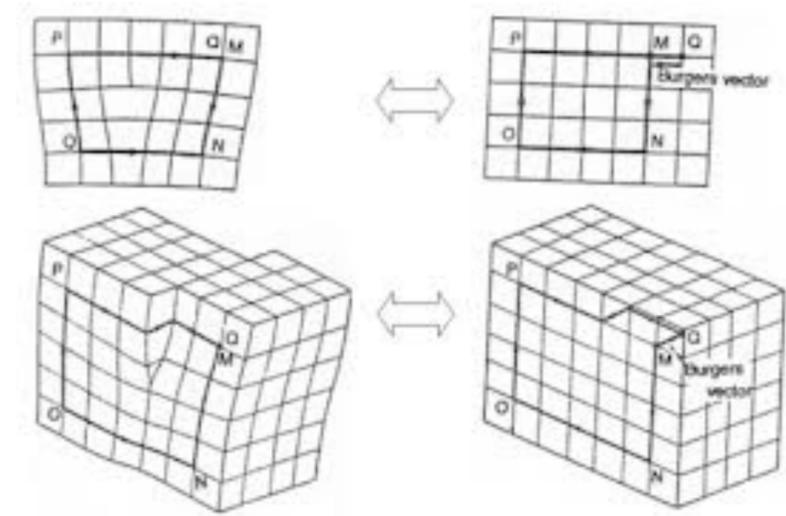
$$E_c = \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$$

moto piano 2D, tre coordinate

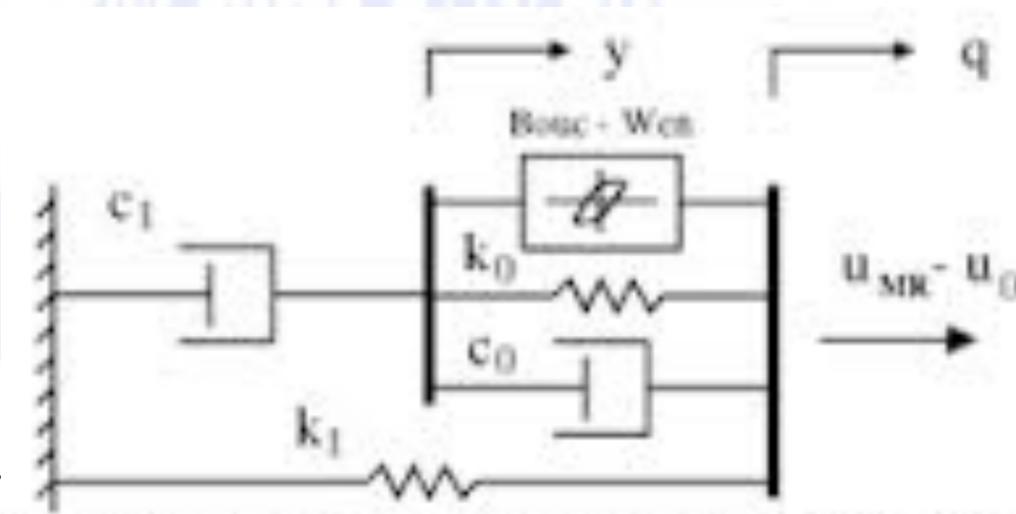
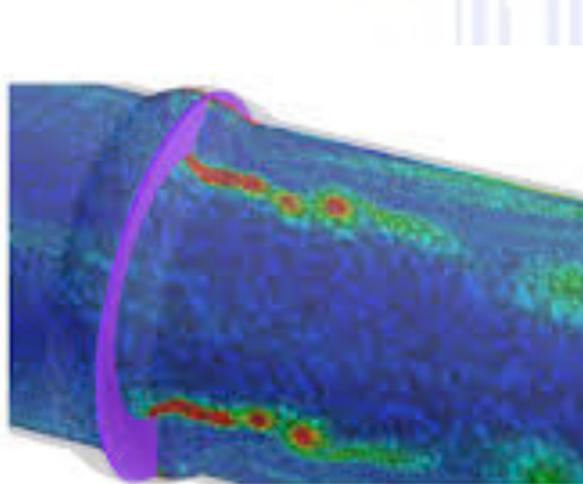
Abituatevi a risolvere problemi
Traslazionali e Rotazionali!

Elemento Dissipativo - smorzatore lineare [Ns/m], torsionale [Ns/rad]

$$\left[\frac{Ns}{m} * \frac{m}{s} \right] = [N]$$



Esistono molti meccanismi "dissipativi", ciascuno caratterizzato dalla propria equazione. Possono essere costanti e non, lineari e non, indipendenti e dipendenti dalla frequenza, dal tempo..



I più comuni modelli sono:

Viscoso (es. ammortizzatori veicoli)

$$f_d = c\dot{x}$$

forza in fase con velocità

Coulombiano (es. smorzatori lavatrici)

$$f_d = -\mu mg \text{sign}(\dot{x})$$

forza in opposizione fase con
segno della velocità

Strutturale / Isteretico (es. cricche)

$$f_d = jhx$$

forza in fase con spostamento

Fluidodinamico (es. moto in fluido)

$$f_d = d\dot{x}^2$$

forza in fase con quadrato velocità

Frazionale (es. feltro)

$$f_d = ja \frac{\delta^r x}{\delta t}$$

Combinato (es.
magneroreologici - modello Bouc Wen)

$$f_d = \dots$$

..la stima dello smorzamento non è facile!
solitamente più meccanismi assieme!

.. ad esempio quali sono i meccanismi dissipativi in un rigello fatto vibrare sul bordo del tavolo?



Almeno tre!
Quali??

1 > ..

2 > ..

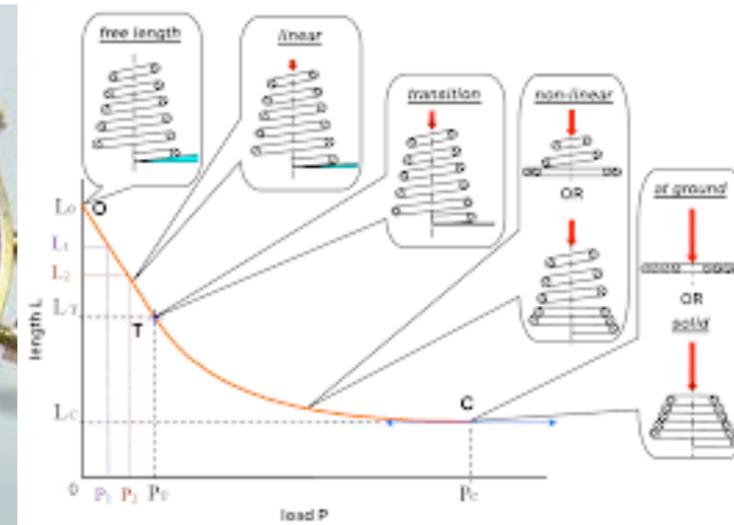
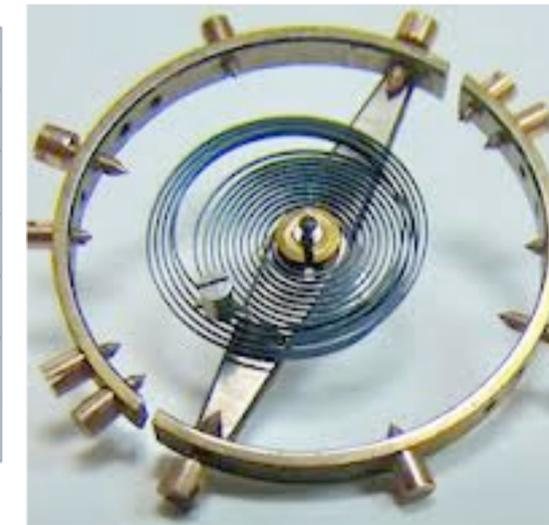
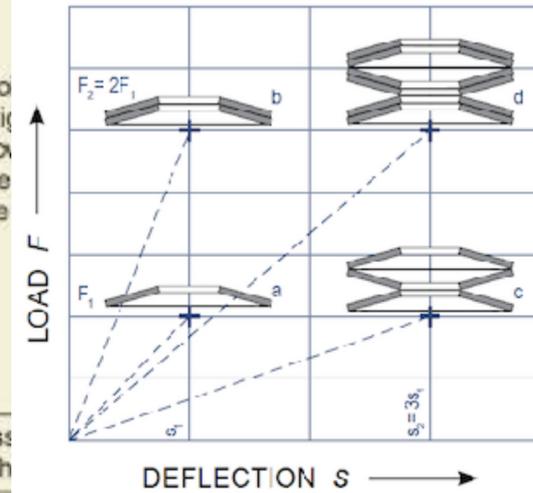
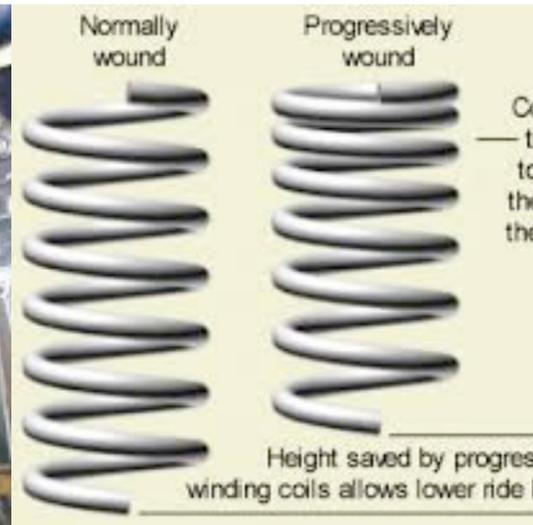
3 > ..

Quale il più importante?

Esercitazione pratica laboratorio
freq naturale lama, decremento logaritmico, ...

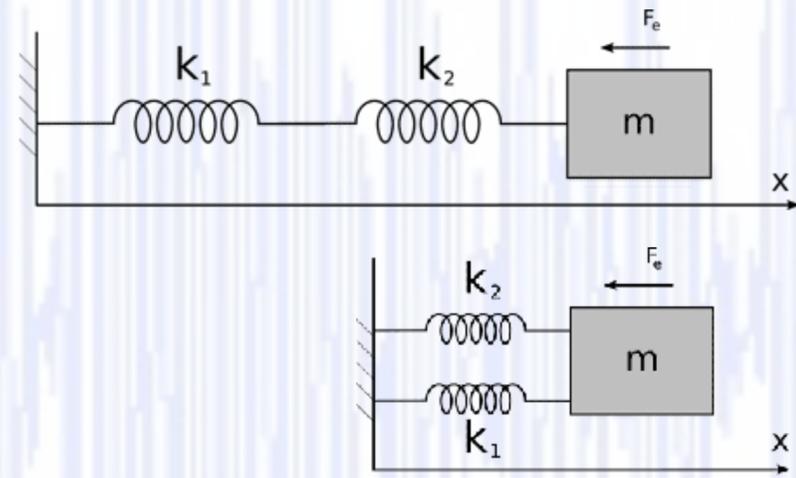
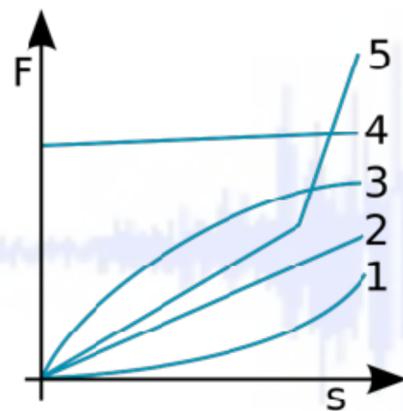
Elemento Elastico - rigidezza lineare [N/m], torsionale [N/rad]

$$\left[\frac{N}{m} * m \right] = [N]$$



Lineari, non lineare, traslazioni, torsionali, serie / parallelo ..

$$f_s = kx \quad f_s = k_\theta \theta$$

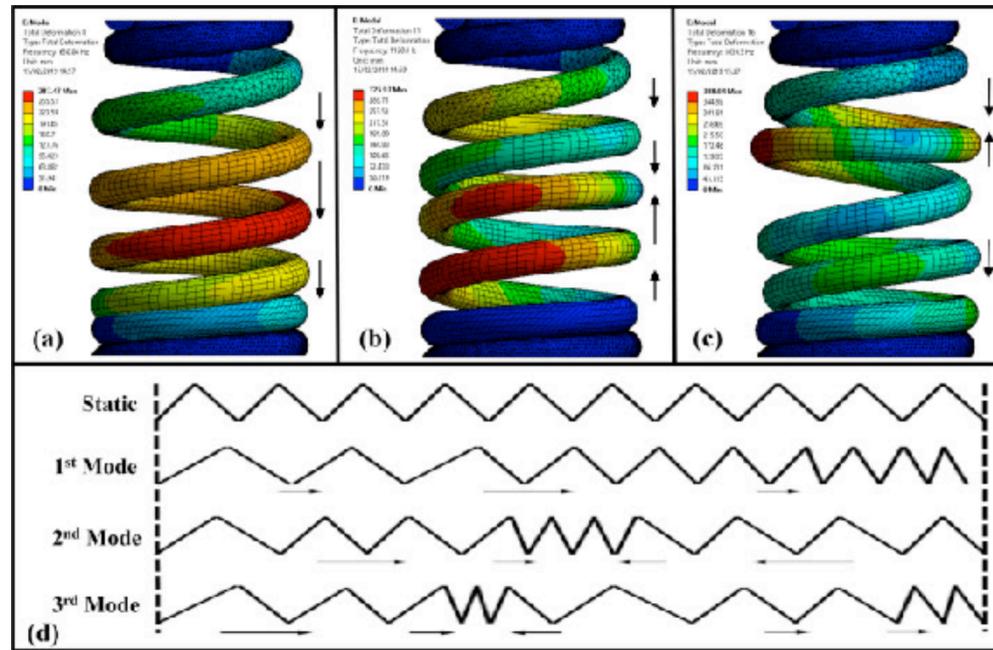


$$k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$$

$$k_e = k_1 + k_2$$

Abituatevi a risolvere problemi Traslazionali e Rotazionali!

Se l'elemento non è più ideale ... può esibire una dinamica interna

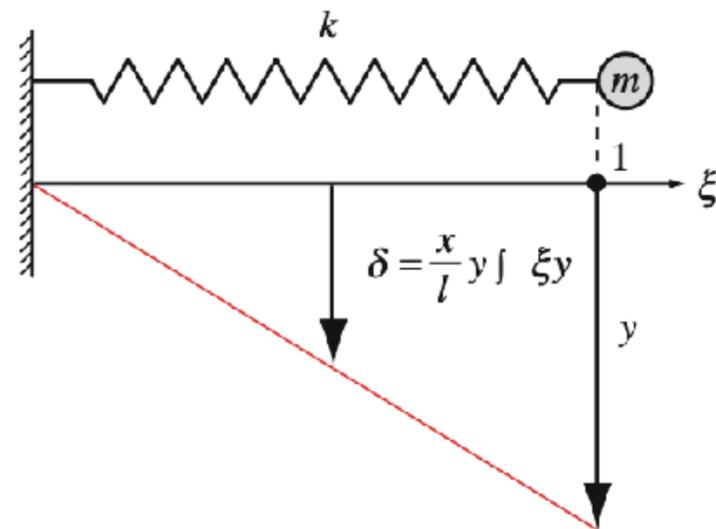


Se si considera la massa della molla come cambia l'equazione del moto di un sistema SDOF?

Sia m_s la massa della molla l la sua lunghezza e si supponga che l'elongazione varii linearmente in modo da poter scrivere :

$$\delta = \frac{x}{l}y = \zeta y$$

L'energia cinetica del sistema si potrà scrivere come:



$$T = \frac{1}{2}m\dot{y}^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \rho \dot{\delta}^2 dx = \dot{y}^2 \left(\frac{m}{2} + \frac{m_s}{2} \int_0^1 \zeta^2 d\zeta \right) = \frac{1}{2} \left(m + \frac{m_s}{3} \right) \dot{y}^2$$

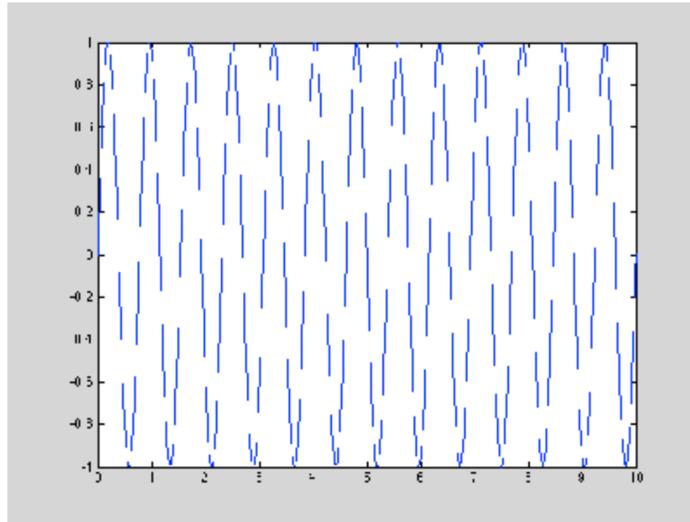
da cui:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m + \frac{m_s}{3}}}$$

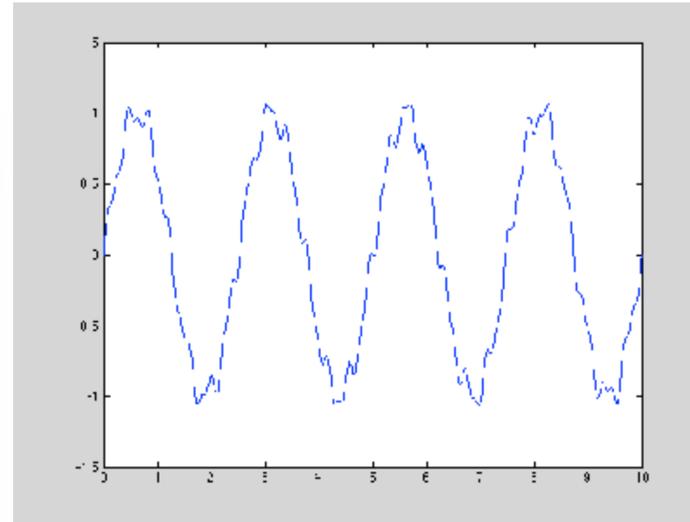
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ caso ideale}$$

Forzanti - forze [N], momenti [Nm]

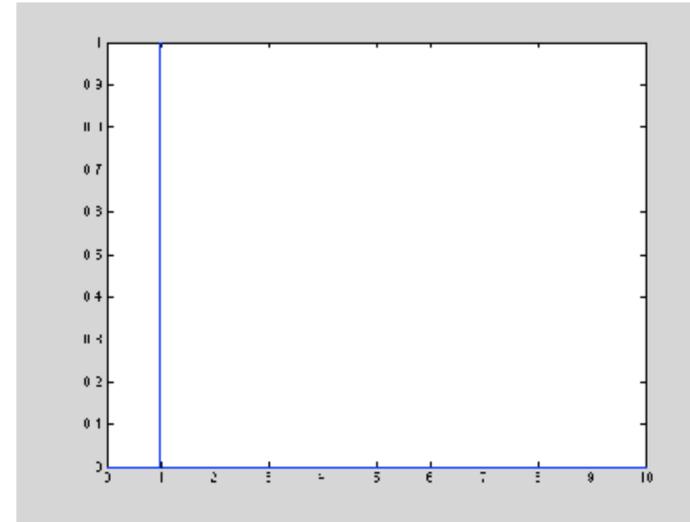
$$a = \sin(2\pi \cdot 1.3 \cdot t);$$



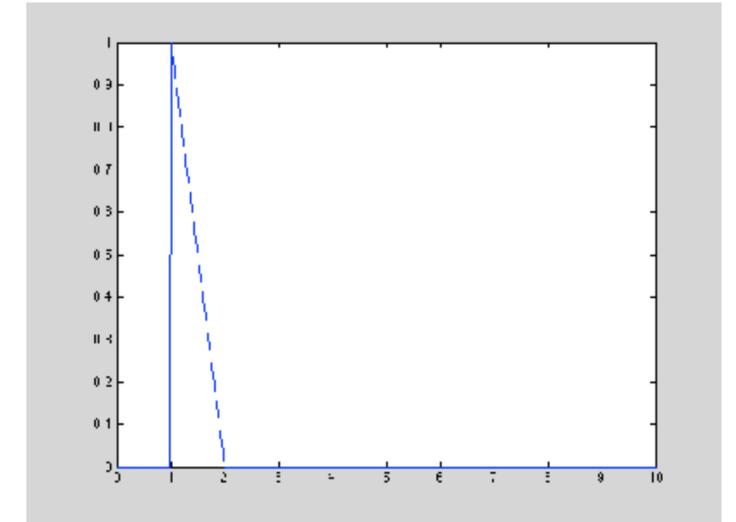
$$a = \sin(2\pi \cdot 0.4 \cdot t) + 0.09 \cdot \sin(2\pi \cdot 2.7 \cdot t) + 0.05 \cdot \sin(2\pi \cdot 5.1 \cdot t);$$



$$a = [\text{zeros}(1,100) \text{ ones}(1,3) \text{ zeros}(1,898)];$$

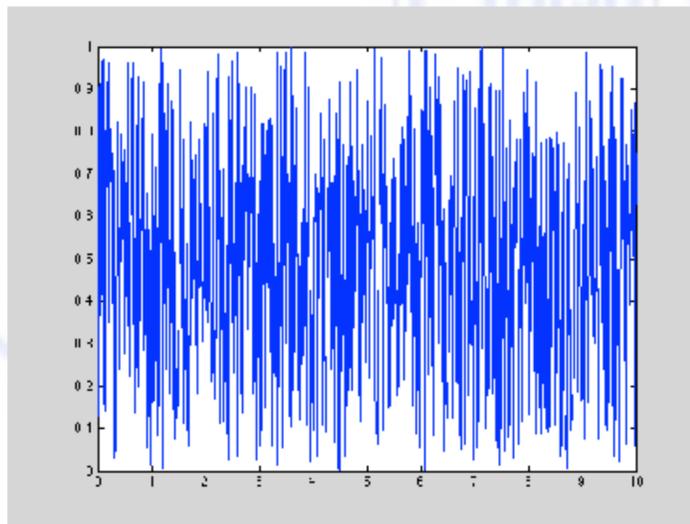


$$a = [\text{zeros}(1,100) 1-t(1:100) \text{ zeros}(1,801)];$$



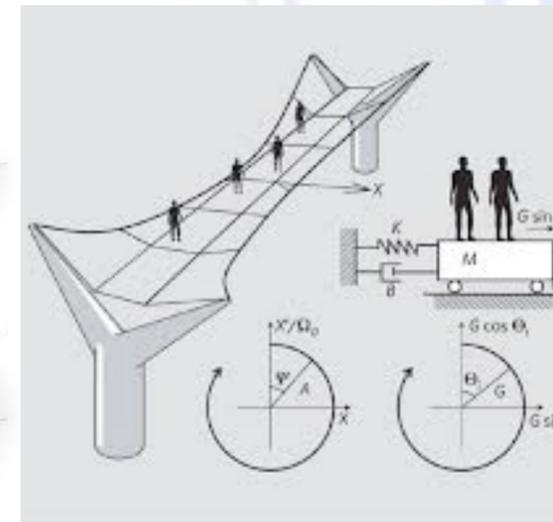
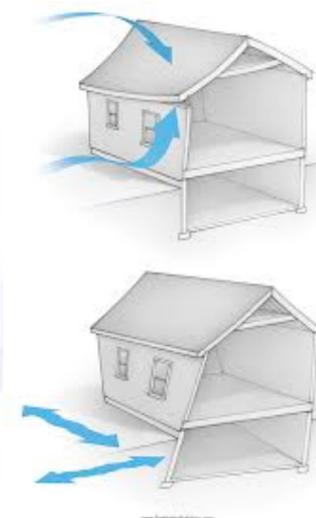
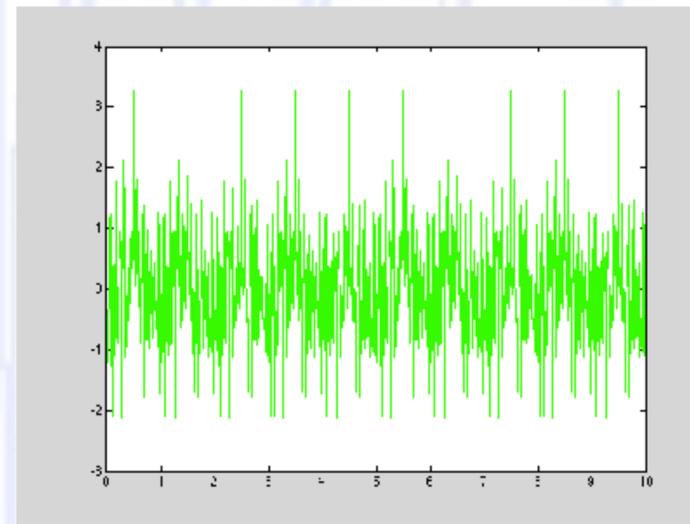
Possono essere deterministiche, transitorie, random, psudorandom, operative ..

$$a = \text{rand}(1, \text{size}(t, 2));$$



$$a = \text{randn}(1, 100);$$

$$a = [a \ a \ a \ a \ a \ a \ a \ a \ a \ a];$$



..in rete si trovano prontuari, raccolte di formule, calcolatori per valutare le caratteristiche di tutti gli elementi necessari a scrivere le equazioni del moto..

shaft system		shaft system	
(1) cantilever $k = \frac{3EI}{l^3}$		(3) thrust of bar $k_a = \frac{EA}{l}$	
(a) circular cross-section $I = \frac{\pi d^4}{64}$	(c)	(4) simple supported beam at both sides $k = \frac{3EI}{l^3 I_1^2 I_2^2}$	
(b) rectangular cross-section $I = \frac{bh^3}{12}$	(d)	$I_1 = I_2 = l/2$ cantilever $k = \frac{48EI}{l^3}$	
(2) torsion of bar $k_t = \frac{GJ}{l}$		(5) overhang $k = \frac{3EI}{l^3}$	

Table 1.5 Properties of plane sections, continued

Section	Area A and Centroid C	Area Moments of Inertia I_x, I_y	Area Products of Inertia I_{xy}
24. Semicircle 	$x_C = R$ $y_C = \frac{4R}{3\pi}$ $A = \frac{1}{2}\pi R^2$	$I_{x_C} = \frac{R^4(9\pi^2 - 64)}{72\pi}$, $I_{y_C} = \frac{\pi R^4}{8}$ $I_x = \frac{\pi R^4}{8}$, $I_y = \frac{5\pi R^4}{8}$	$I_{x_C y_C} = 0$ $I_{xy} = \frac{2}{3}R^4$
25. Circular Sector 	$x_C = \frac{2R \sin \theta}{3}$ $y_C = 0$ $A = R^2 \theta$	$I_x = \frac{R^4}{4}(\theta - \sin \theta \cos \theta)$ $I_y = \frac{R^4}{4}(\theta + \sin \theta \cos \theta)$	$I_{x_C y_C} = 0$ $I_{xy} = 0$
26. Crescent 	$x_C = \frac{2R}{3} \left(\frac{\sin^3 \theta}{\theta - \sin \theta \cos \theta} \right)$ $y_C = 0$	$I_x = \frac{R^4}{4}(\theta - \sin \theta \cos \theta - \frac{2}{3} \sin^3 \theta \cos \theta)$ $I_y = \frac{R^4}{4}(\theta - \sin \theta \cos \theta + 2 \sin^3 \theta \cos \theta)$ $I_{xy} = 0, I_p = I_x + I_y$	

Table 3.4 Natural frequency of torsion spring systems, continued

Torsion Spring, Rigid Body	Natural Frequency f , Hz	Mode Shape and Comments
8. Two Unequal Bodies and Three Unequal Torsion Springs 	$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_3}{J_1} + \frac{k_1 + k_2 + k_3 - k_3}{J_2} \right)^{1/2} = \left[\left(\frac{k_1 + k_2 + k_3 + k_3}{J_1} + \frac{k_1 + k_2 + k_3 - k_3}{J_2} \right)^2 - \frac{4}{J_1 J_2} (k_1 k_2 + k_2 k_3 + k_1 k_3) \right]^{1/2}$, $\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 + \frac{k_1 - J_1}{k_2} (2\pi f_1)^2 \end{bmatrix}$, $i=1,2$	
9. Two Equal Bodies and Spring 	$0, \frac{1}{2\pi} \left(\frac{2k}{J} \right)^{1/2}$ $\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$	This and other torsion spring systems can be obtained from translation spring and mass systems, Table 3.2, substituting k for k and J for M .
10. Two Unequal Bodies and Spring 	$0, \frac{1}{2\pi} \left(\frac{k(J_1 + J_2)}{J_1 J_2} \right)^{1/2}$	$\begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{J_1}{J_2} \end{bmatrix}$

https://www.tribology-abc.com/calculators/damping_1.htm

<https://www.calqlata.com/productpages/00076-help.html>

<https://www.acxesspring.com/spring-stiffness-calculator.html>

<https://www.newcombspring.com/springulator/>

<https://www.modalshop.com/vibration-calculator?ID=1036>

$$[m]\{\ddot{x}\} + [c]\{\dot{x}\} + [k]\{x\} = \{f\}$$

Forze Inerziali

Forze Elastiche

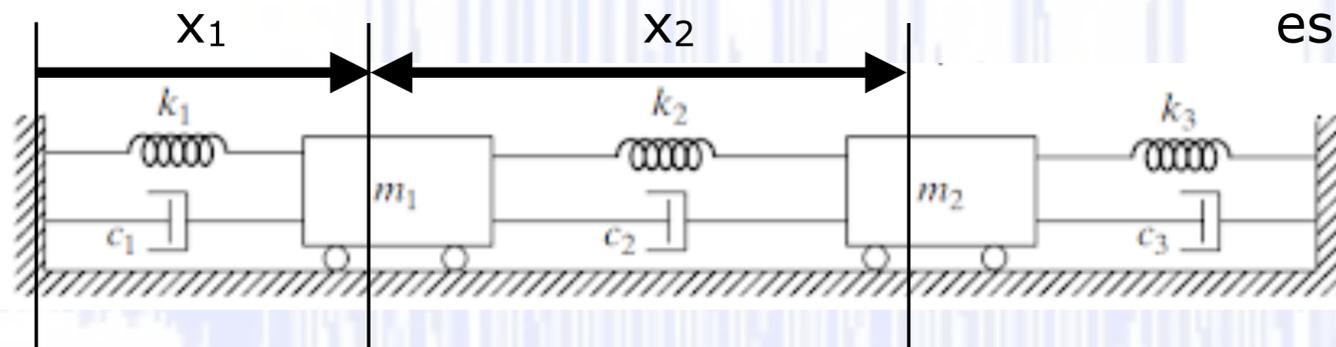
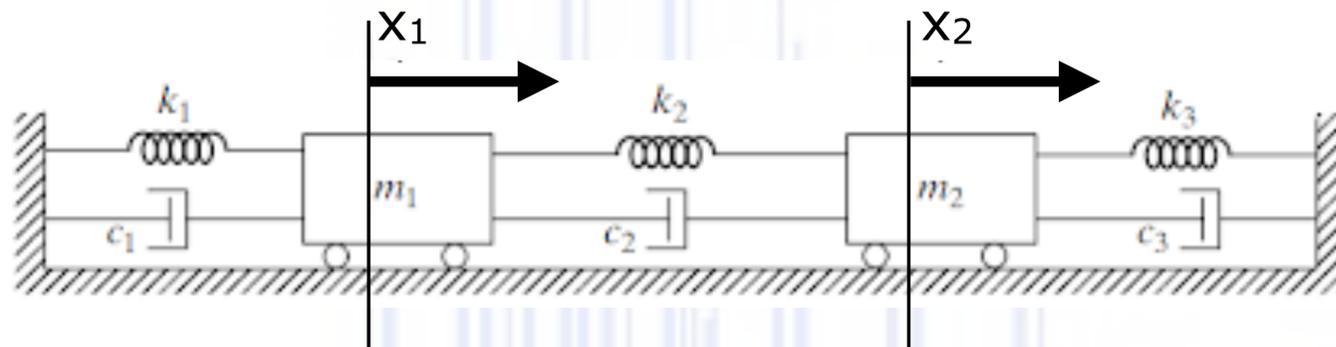
Forze Dissipative

Forzanti Esterne

Coordinate

Le coordinate rappresentano il set di informazioni necessarie e sufficienti per descrivere lo stato del sistema istante per istante.

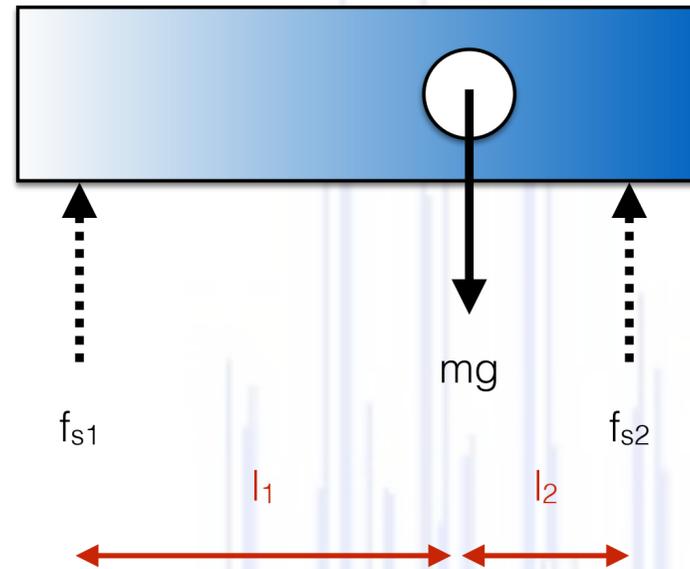
Sono scelte per dare luogo alle equazioni del moto più semplici..
o quelle in grado di fornire immediatamente la soluzione ricercata senza ulteriori elaborazioni!



es. spostamento relativo tra m_1 e m_2

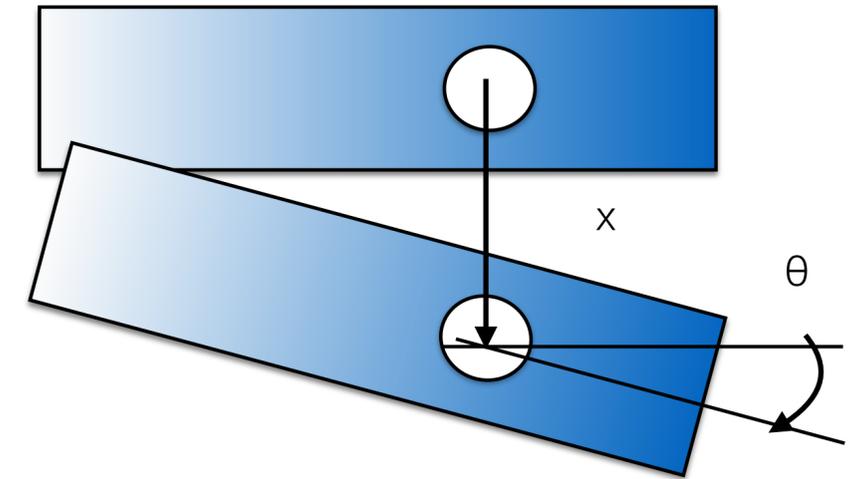
L'accoppiamento tra le equazioni cambia in funzione della scelta della coordinate!

Consideriamo un sistema che ruota e trasla sul piano



Scelta Coordinate 1

x abbassamento baricentro
 θ rotazione attorno al baricentro



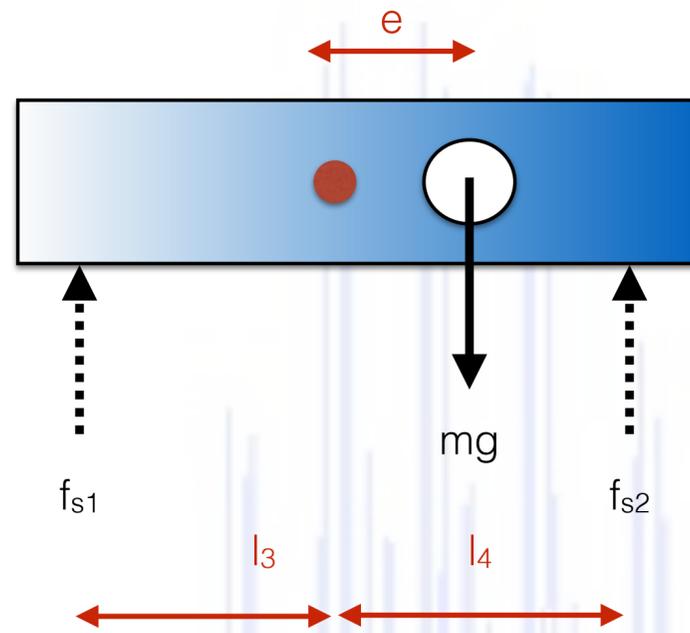
$$\begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l_2 - k_1 l_1 \\ k_2 l_2 - k_1 l_1 & k_1 l_1^2 + k_2 l_2^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

la matrice di massa è diagonale
 la matrice di rigidità NON è diagonale

> accoppiamento STATICO

NB le matrici sono simmetriche!
 principio di Maxwell

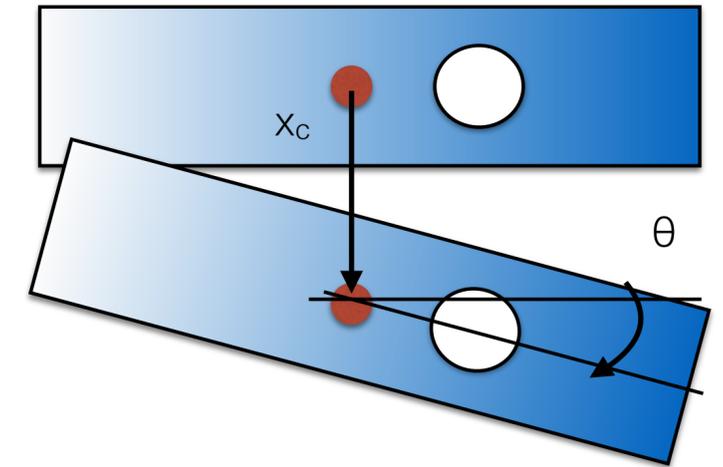
Consideriamo un sistema che ruota e trasla sul piano



Scelta Coordinate 2

x_e abbassamento centro elastico
 θ_e rotazione attorno al baricentro

Il centro elastico= punto di equilibrio delle forze applicate $l_3 k_1 = l_4 k_2$



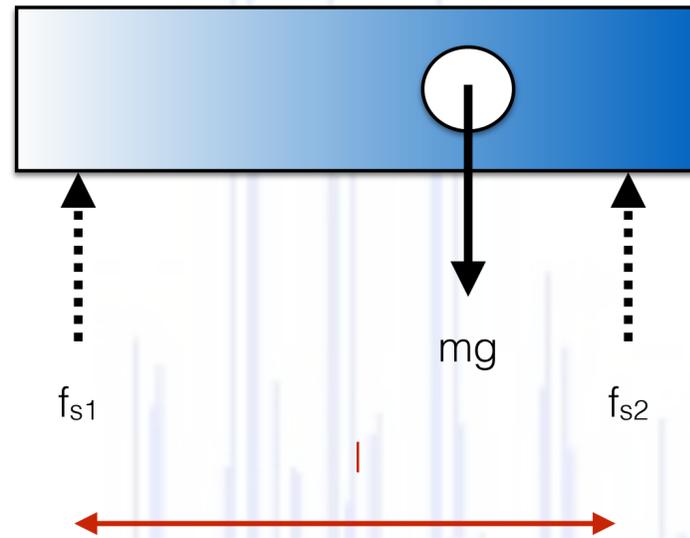
$$\begin{bmatrix} m & me \\ me & J_{ce} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_e \\ \ddot{\theta}_e \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & 0 \\ 0 & k_1 l_3^2 - k_2 l_4^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_e \\ \theta_e \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

la matrice di massa NON è diagonale
 la matrice di rigidezza è diagonale

> accoppiamento DINAMICO

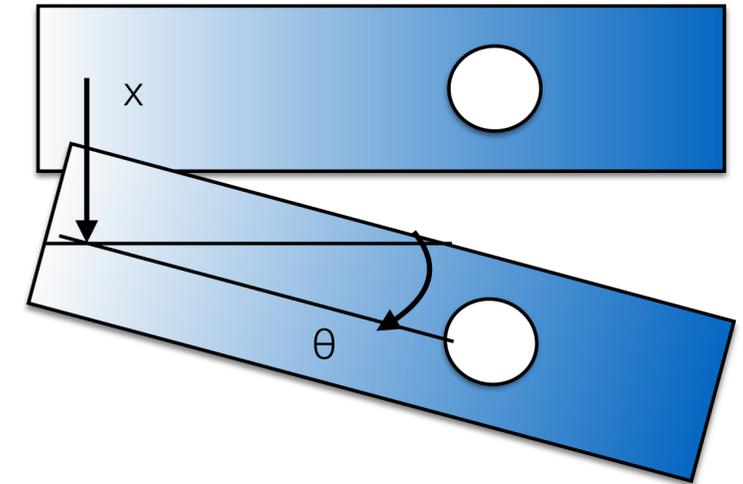
NB le matrici sono simmetriche!
 principio di Maxwell

Consideriamo un sistema che ruota e trasla sul piano



Scelta Coordinate 3

x_1 abbassamento vincolo 1
 θ_1 rotazione attorno al vincolo 1



$$\begin{bmatrix} m & ml \\ ml & J_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{\theta}_1 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & k_2 l \\ k_2 l & k_2 l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ \theta_1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

la matrice di massa NON è diagonale
la matrice di rigidità NON è diagonale

> accoppiamento STATICO e DINAMICO

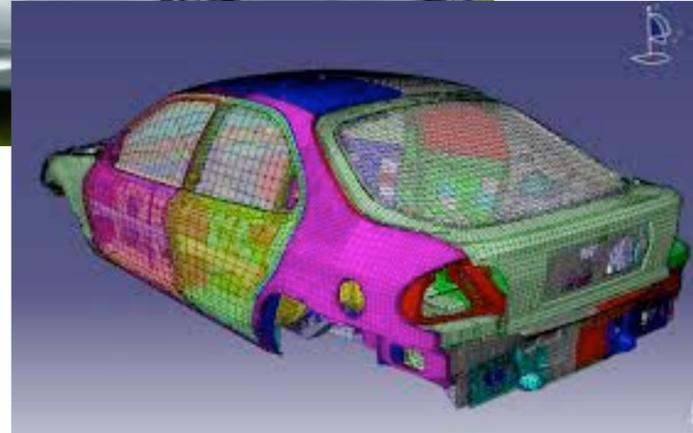
NB le matrici sono simmetriche!
principio di Maxwell

Sistemi Continui



..semplificare..

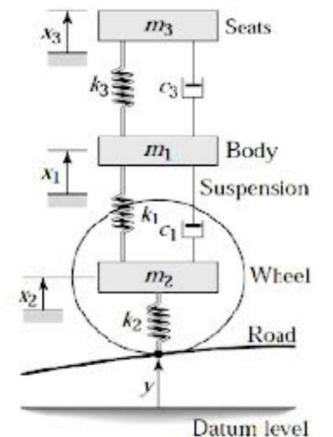
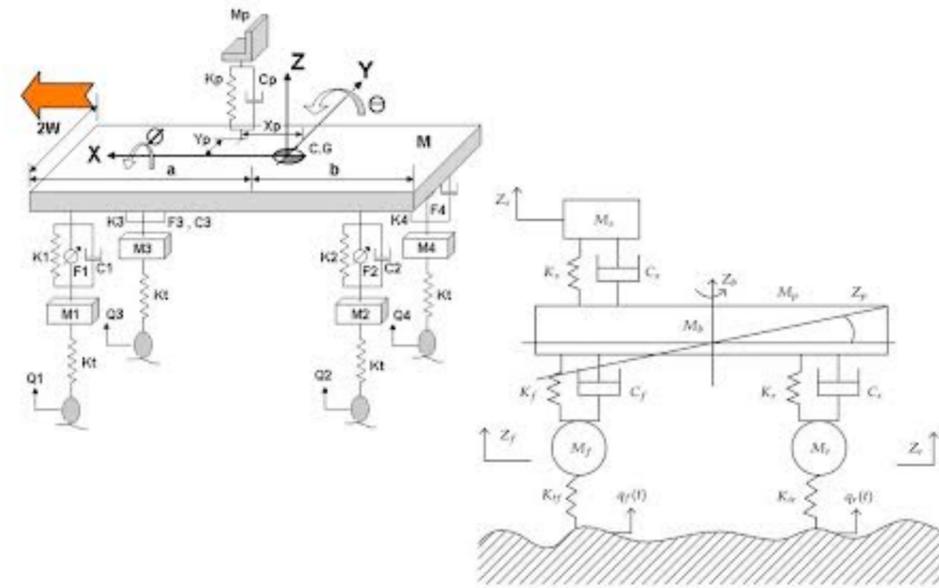
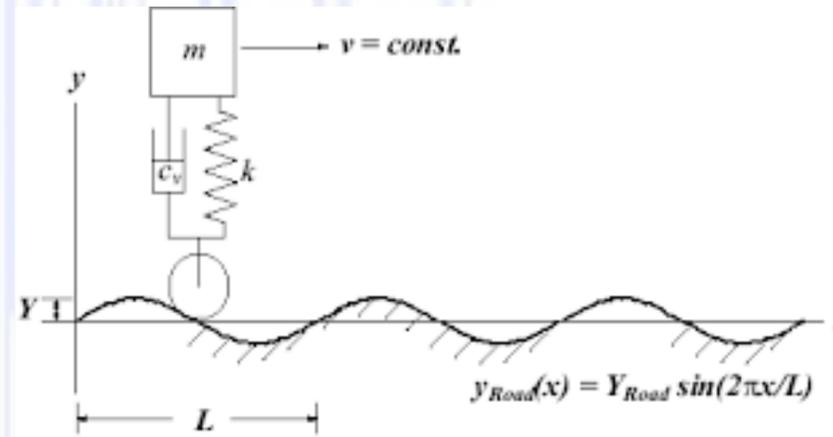
Sistemi MDOF



..semplificare..

..semplificare..

Sistemi SDOF



La scelta della rappresentazione determina i risultati ottenibili!

Linerizzazione

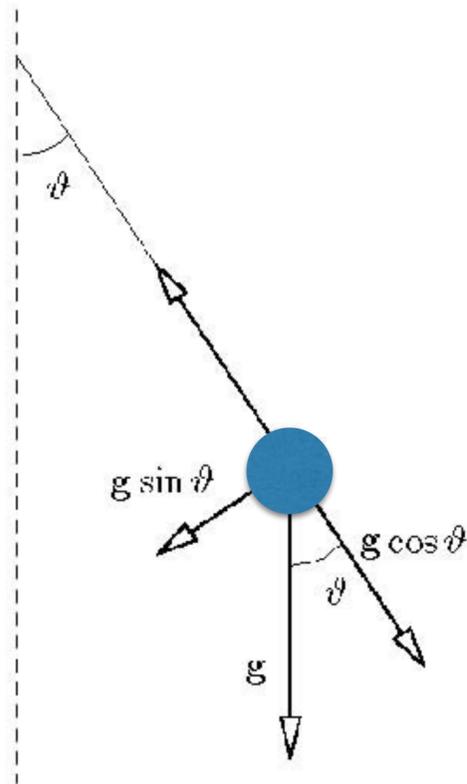
I sistemi reali non sono ideali!

All'aumentare degli spostamenti il legame tra le grandezze non è più di tipo proporzionale

> le equazioni non sono più lineari!

Si possono però linearizzare in un piccolo intorno della posizione di equilibrio

> ipotesi dei piccoli spostamenti!



L'equazione del pendolo:

$$\begin{cases} ma_c = T - mg \cos \theta \\ ma_t = -mg \sin \theta \end{cases}$$

con il vincolo di moto circolare:

$$\begin{cases} a_c = L\dot{\theta}^2 \\ a_t = L\ddot{\theta} \end{cases}$$

$$\begin{cases} mL\dot{\theta}^2 = T - mg \cos \theta \\ mL\ddot{\theta} = -mg \sin \theta \end{cases}$$

dividendo per mL ottengo l'equazione non lineare

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} \right) \text{sen}\theta = 0$$

non lineare

nell'ipotesi di piccoli spostamenti
(senθ circa uguale a θ)

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} \right) \theta = 0$$

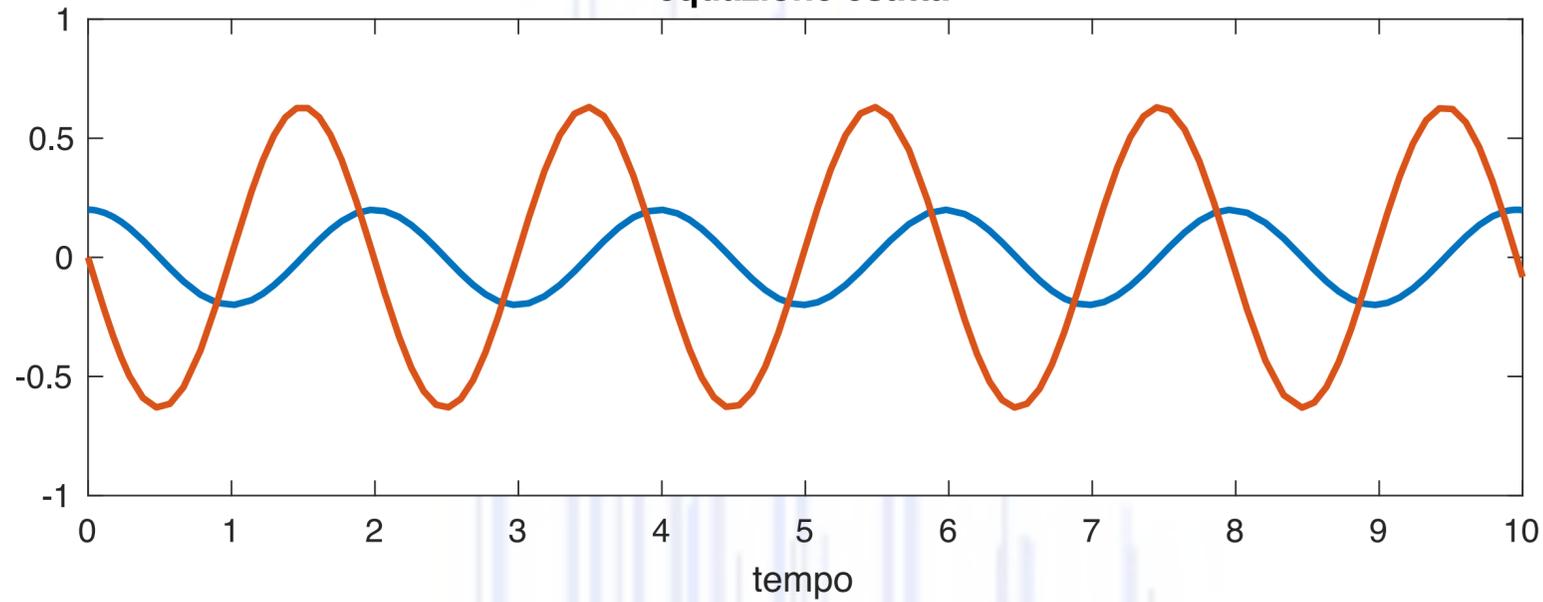
lineare

..i risultati ovviamente cambiano..

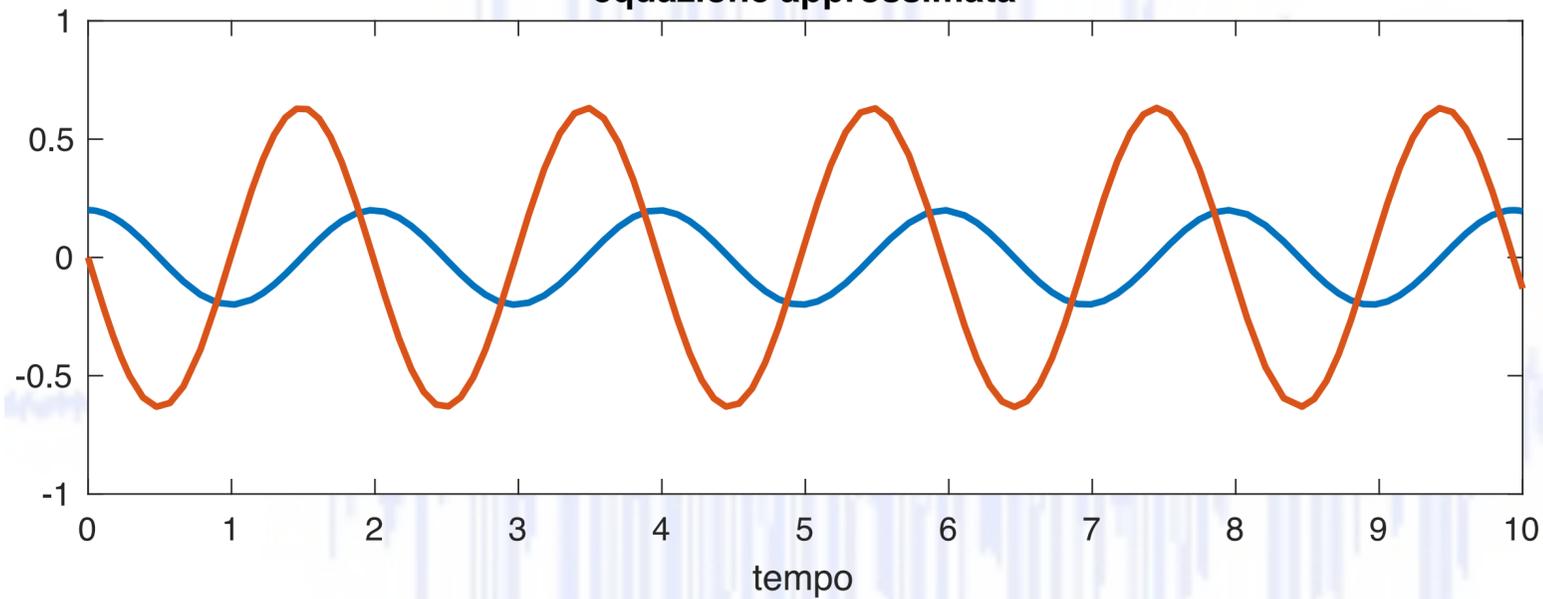
Piccoli Spostamenti

$\omega^2=10\text{rad/s}^2$
condizioni iniziali [.2 0]

equazione esatta



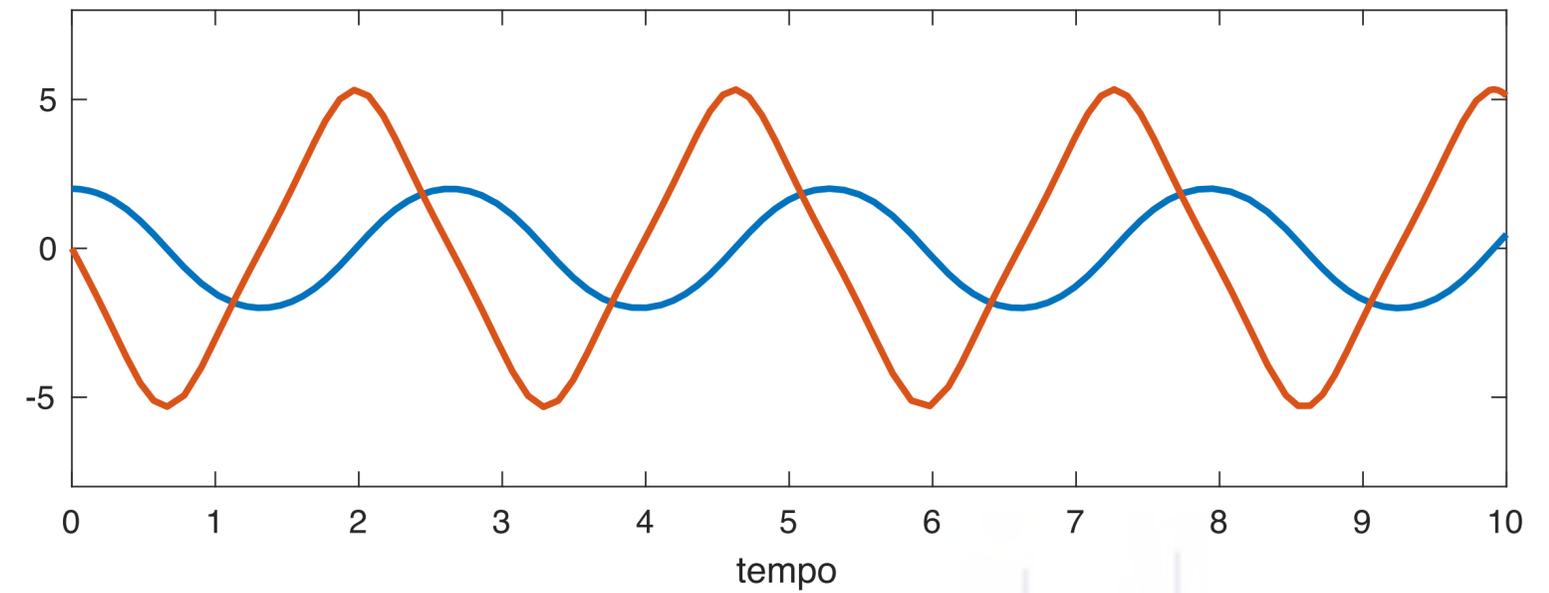
equazione approssimata



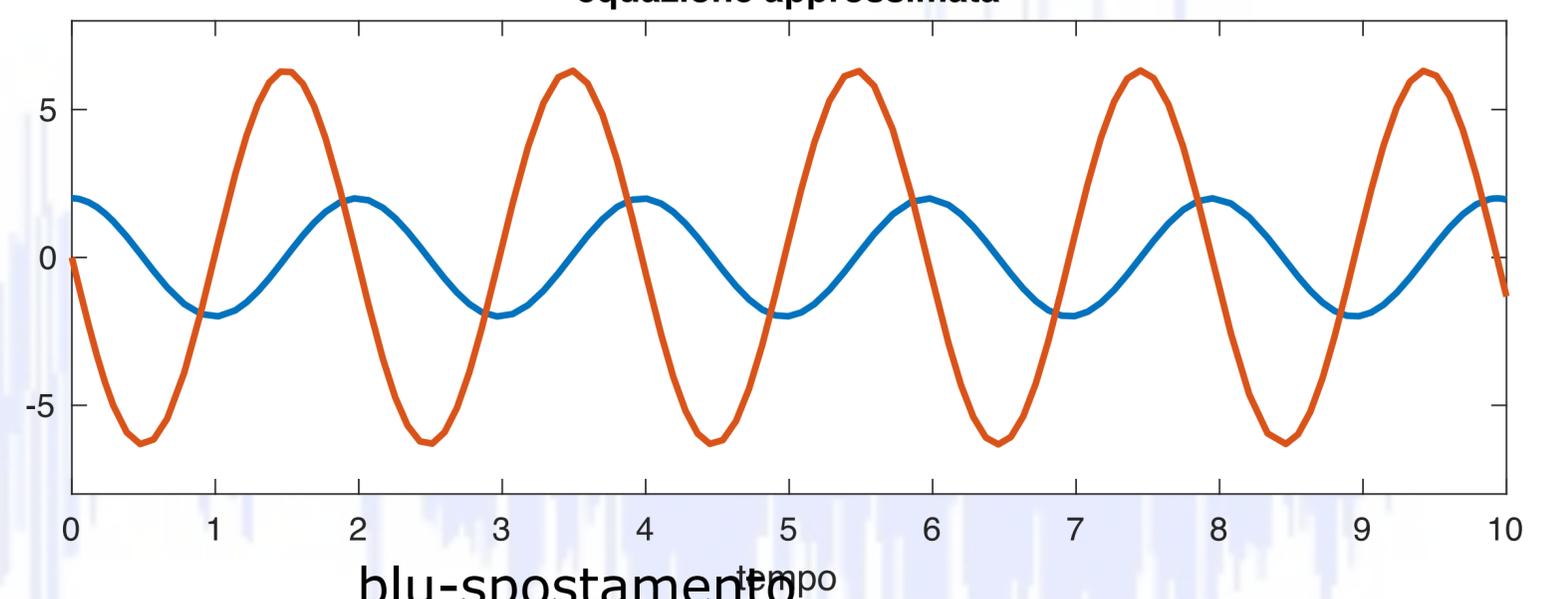
$\omega^2=10\text{rad/s}^2$
condizioni iniziali [2 0]

Grandi Spostamenti

equazione esatta



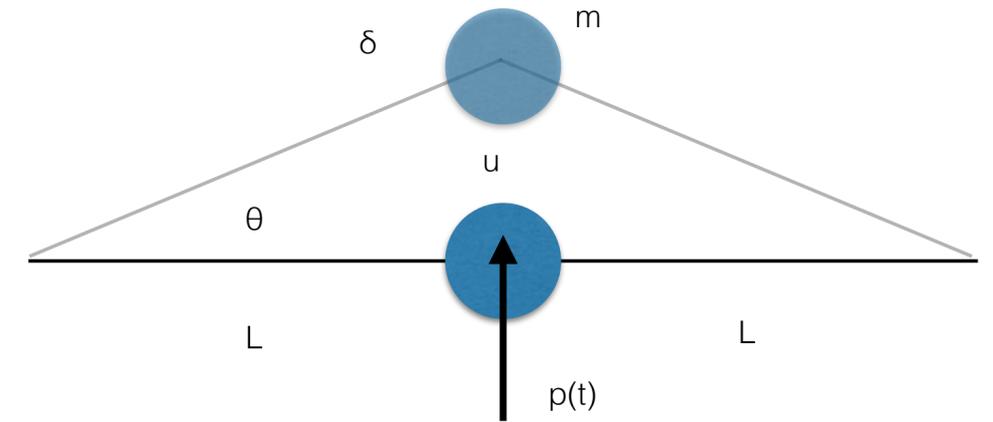
equazione approssimata



blu-spostamento
arancio-velocità

L'equazioni della fune tesa

Consideriamo una fune tesa (lunghezza $2L$, sezione A , modulo di Young E), con una massa m al centro, spostata di una quantità u (da cui deriva un allungamento δ della fune)



Per l'equilibrio delle forze agenti sulla massa $m\ddot{u} + 2T \sin \theta = p$

L'allungamento della fune vale $\delta = (L^2 + u^2)^{1/2} - L$

la tensione $T = T_0 + \left(\frac{AE}{L}\right)\delta$ l'angolo $\sin \theta = \frac{u}{(L^2 + u^2)^{1/2}}$

sostituendo tutto si ottiene l'equazione esatta che è altamente non lineare:

$$m\ddot{u} + 2 \left[T_0 + \left(\frac{AE}{L} \right) \left[(L^2 + u^2)^{1/2} - L \right] \right] \left[\frac{u}{(L^2 + u^2)^{1/2}} \right] = p$$

esatta

Si può stimare l'allungamento con un'espansione:

$$\delta = L \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{u}{L} \right)^2 \right] - L = \left(\frac{1}{2L} \right) u^2$$

$$m\ddot{u} + \left(\frac{2T_0}{L} \right) u + \left(\frac{AE}{L^3} \right) u^3 = p$$

cubica

o ipotizzare una linearizzazione più brutale con $u \ll L$

$$m\ddot{u} + \left(\frac{2T_0}{L} \right) u = p$$

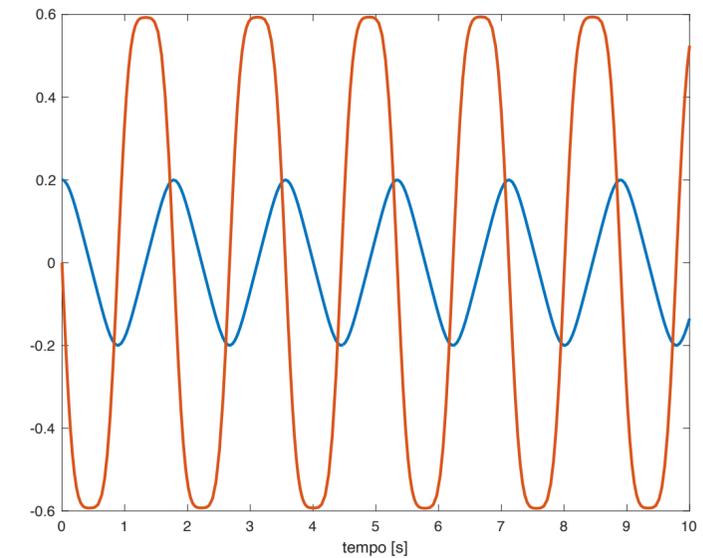
lineare

Le equazioni ed i risultati sono molto differenti!!

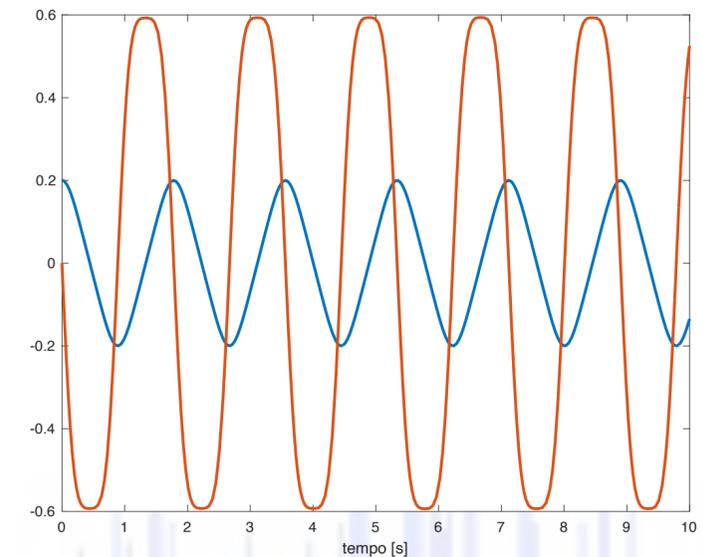
blu-spostamento
arancio-velocità

L=10; % [m]
T=100; % [N]
m=50 % [kg]
A=1.0000e-04; % [m^2]
E=210000000000; % [Pa]

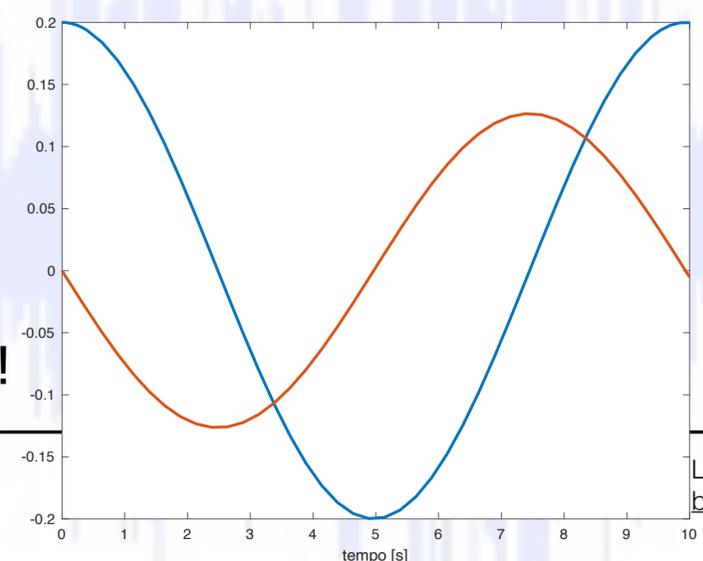
t=[0 10]
init=[.2 0];



esatta



cubica



lineare

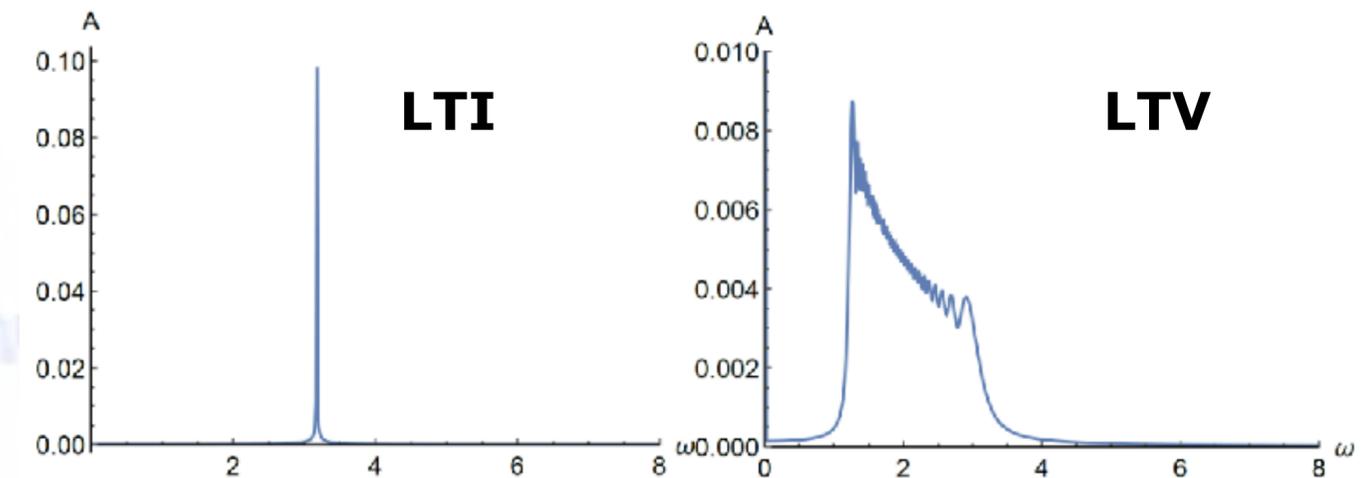
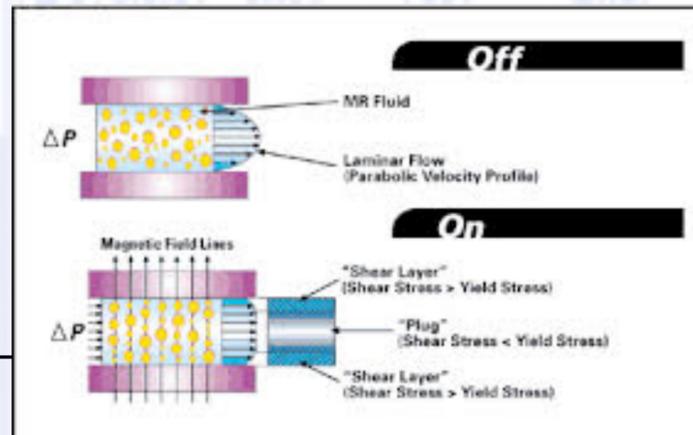
La linearizzazione amplifica di molto lo studio del sistema (!) ma modifica pesantemente i risultati ottenibili (!)
 ..eseguire con attenzione!

Se il sistema è "lineare" o "linearizzato" si può sfruttare il principio di sovrapposizione degli effetti!!

$$\begin{aligned} x(t) &\rightarrow p(t) \\ y(t) &\rightarrow q(t) \end{aligned} \quad \alpha x(t) + \beta y(t) \rightarrow \alpha p(t) + \beta q(t)$$

Sfrutteremo questa proprietà nella parte modale tra un po'

Nel scorso MDV oltre che sistemi lineari, si ipotizza che i parametri del sistema non cambino nel tempo!
 >> **Sistemi LTI** - Linear Time Invariant



Scrittura equazioni del moto - Approcci

Approccio
Newtoniano

↓
Diagramma di
corpo libero

↓
Equilibrio delle
Forze / Momenti

↓
$$\sum \vec{F} = m\ddot{\vec{x}}$$

↓
$$\sum \vec{M} = J\ddot{\theta}$$

Approccio
Energetico

Principio
Lavori Virtuali

↓
Equilibrio Lavoro
per ogni spostamento
virtuale

↓
$$\delta W' =$$

$$\delta W_{\text{forze reali}} + \delta W_{\text{forze inerzia}} = 0$$

Metodo
Lagrangiano

↓
Calcolo En.
Cinetica e Potenziale

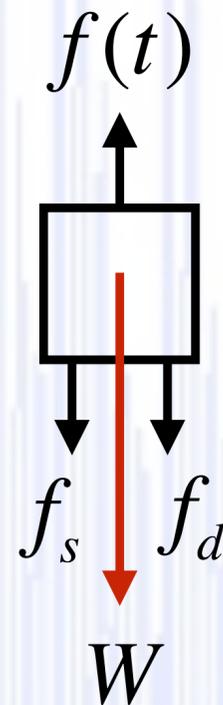
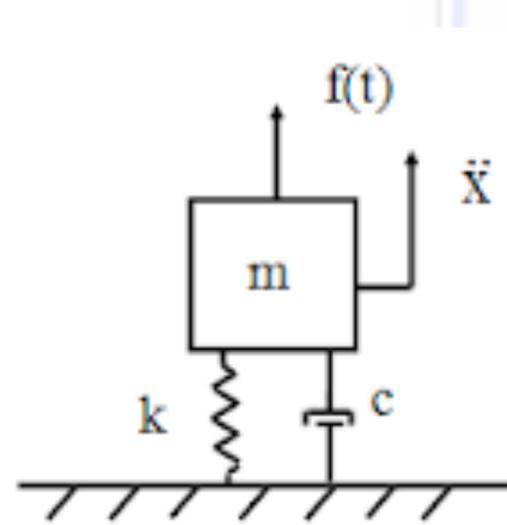
↓
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k_{\text{noncons}}$$

Approccio Newtoniano

$$\sum \vec{F} - m\vec{\ddot{x}} = 0$$

In condizioni di equilibrio.. la sommatoria delle forze agenti su un corpo è nulla!
(forze d'inerzia incluse!)

- Definizione di un sistema di coordinate
- Tracciamento diagramma di corpo libero
- Equilibrio delle forze agenti



$$f(t) - f_s - f_d - W = m\ddot{x}$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f - W$$

$$x(0) = x_0$$

$$\dot{x}(0) = \dot{x}_0$$

con i modelli di smorzamento e rigidità già visti..

riordinando in funzione della coordinata x > eq. differenziale **II ordine**, non omogenea, lineare, a termini costanti

servono 2 condizioni iniziali!

..nel caso torsionale.. non cambia molto!

$$\sum \vec{M} - m\vec{\ddot{\theta}} = 0$$

$$m\ddot{x} + c\dot{x} + kx = f \longrightarrow J\ddot{\theta} + c_{\theta}\dot{\theta} + k_{\theta}\theta = f$$

Non cambia nulla rispetto al caso traslazionale!!



$$-M_0 - WL \sin \theta = J_o \ddot{\theta}$$

$$M_0 = k_{\theta} \theta$$

$$J_0 = J_g + mL^2$$

$$(J_g + mL^2) \ddot{\theta} + k_{\theta} \theta + WL \sin \theta = 0$$

Non dimenticare le 2 condizioni iniziali!

Approccio Lavori Virtuali

coordinata : quantità che descrive una configurazione del sistema;

vincolo : limite cinematico sulle configurazioni del sistema;

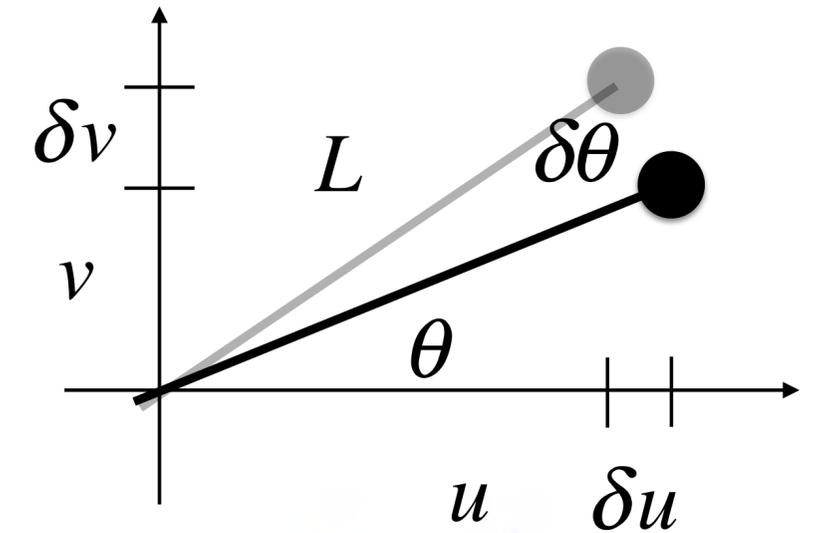
coordinate generalizzate : un set di spostamenti lin. indipendenti, congrui ai vincoli capace, di descrivere ogni configurazione del sistema (q_i);

spostamento virtuale : un infinitesimo spostamento di configurazione del sistema permesso dai vincoli (δq_i)

lavoro virtuale : lavoro delle forze applicate al sistema quando sottoposto ad uno spostamento virtuale

forze generalizzate : quei moltiplicatori di δq_i che forniscono il lavoro virtuale di δq_i (qualora $\delta q_i=1$ e $\delta q_j=0$ per ogni i diverso da j)

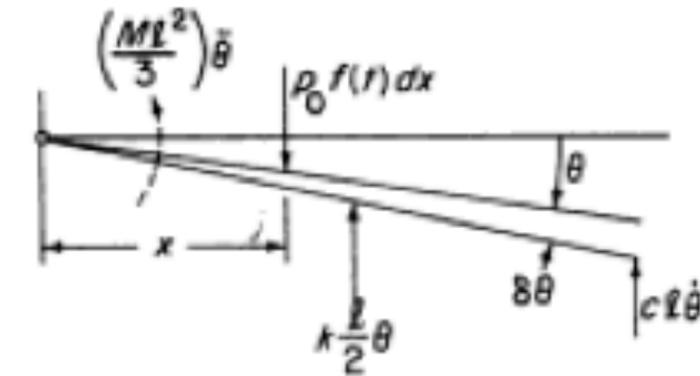
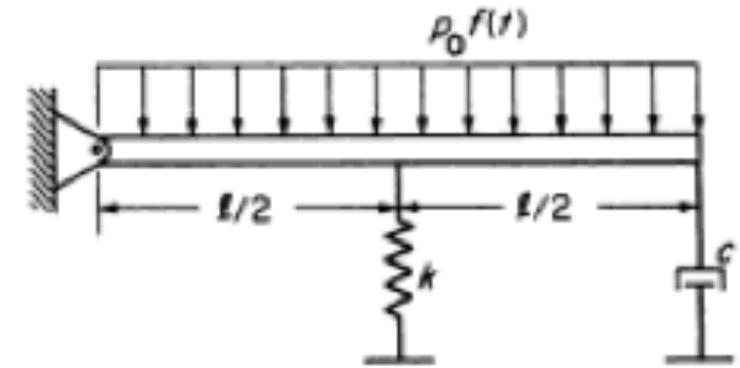
principio dei lavori virtuali: per qualsiasi spostamento virtuale del sistema la somma dei lavori virtuali delle forze applicate e di quelle d'inerzia è nullo



$$\delta W = \sum_{i=1}^N Q_i \delta q_i$$

$$\delta W' = \delta W_{\text{forze reali}} + \delta W_{\text{forze inerzia}} = 0$$

Scriviamo l'equazione del moto della trave vincolata ad un estremo con un carico distribuito (con approccio Newtoniano come gestiremmo il vincolo? la forza distribuita? ..)



$$\delta W_{\text{forze inerzia}} = -\left(\frac{ML^2}{3}\right)\ddot{\theta}\delta\theta$$

$$\delta W_{\text{forze smorzamento}} = -(cL\dot{\theta})L\delta\theta$$

$$\delta W_{\text{forze rigidezza}} = -\left(k\frac{L}{2}\theta\right)\frac{L}{2}\delta\theta$$

$$\delta W_{\text{forze carico}} = \int_0^L p_0 f(t)x dx \delta\theta = p_0 f(t)\frac{L^2}{2}\delta\theta$$



$$\left(\frac{ML^2}{3}\right)\ddot{\theta} + (cL^2)\dot{\theta} + \left(k\frac{L^2}{4}\right)\theta = p_0\frac{L^2}{2}f(t)$$

Approccio Lagrangiano

Si parte dal principio di D'Alembert* > Principio di Hamilton** > Equazioni Lagrange

Si valutano quantità scalari (energia cinetica T e potenziale V) con cui si costruisce il Lagrangiano (L=T-V) non si usano più quantità vettoriali!

Ci sono diverse forme delle'eq. di Lagrange..

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k$$

noncons

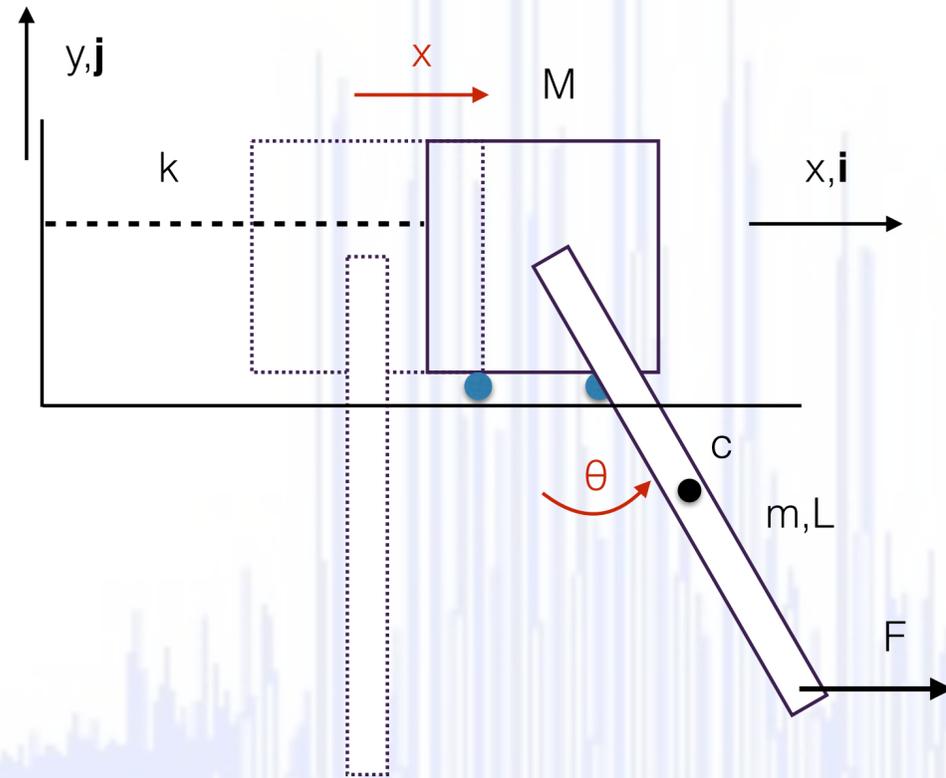
$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} = Q_k$$

*D'Alembert combina l'approccio Newtoniano e il principio dei lavori virtuali esteso al caso dinamico

$$\left(\sum \vec{F} - m \vec{\ddot{x}} \right) \delta x = 0$$

** Hamilton estende il principio di D'Alembert alle coordinate generalizzate

Scriviamo l'equazione del moto di un sistema costituito da una molla k , un carrello di massa M che scorre sul piano ed una pendolo di massa m e lunghezza L a questo attaccato.
 Schema e coordinate scelte sono riportate in figura.



Momento d'inerzia $J_c = \frac{mL^2}{12}$

Velocità del punto c $v_c = \left(\dot{x} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \cos \theta \right) \vec{i} + \frac{L}{2} \dot{\theta} \sin \theta \vec{j}$

Energia Cinetica $T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m v_c \cdot v_c + \frac{1}{2} J_c \dot{\theta}^2$

Energia Potenziale $V = \frac{1}{2} k x^2 + mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta)$

Lagrangiano $L = \frac{1}{2} \left[(M + m) \dot{x}^2 + mL \dot{x} \dot{\theta} \cos \theta + \frac{1}{3} mL^2 \dot{\theta}^2 \right] +$
 $-\frac{1}{2} k x^2 - mg \frac{L}{2} (1 - \cos \theta)$

Con le derivate rispetto alle coordinate scelte (x, θ) e le loro derivate,
..si arriva alla scrittura delle equazioni del moto

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = (M + m)\dot{x} + \frac{1}{2}mL\dot{\theta}\cos\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial x} = -kx$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = \frac{1}{2}mL\dot{x}\cos\theta + \frac{1}{3}mL^2\dot{\theta}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = -\frac{1}{2}mL\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + mgL\sin\theta$$

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_k}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_k} = Q_k_{noncons}$$

Fate le derivate parziali rispetto al tempo
Cosa si ottiene?
>..?

Le coordinate sono accoppiate?
>..?

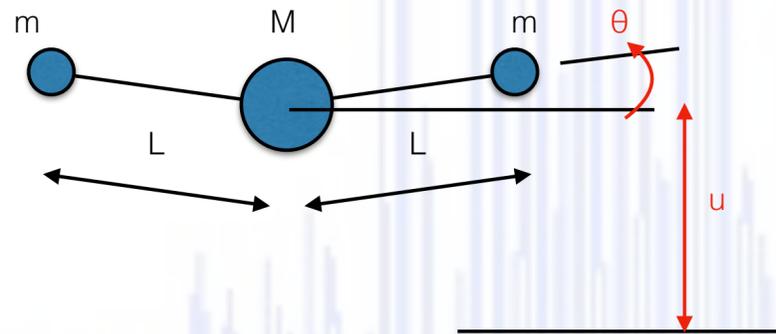
Quante condizioni al contorno servono?
>..?

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[(M + m)\dot{x} + \frac{1}{2}mL\dot{\theta}\cos\theta\right] + kx = F$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{1}{6}mL(3\dot{x}\cos\theta + 2L\dot{\theta})\right] + \frac{1}{2}mL\dot{x}\dot{\theta}\sin\theta + \frac{1}{2}mgL\sin\theta = FL\cos\theta$$

Approccio Lagrangiano 2

Scriviamo l'equazione del moto di un sistema costituito da tre masse rappresentante un aereo in volo
Schema e coordinate scelte sono riportate in figura.



Coordinata masse m $y_m = u + L \sin \theta \approx u + L\theta$..piccoli spostamenti

Energia cinetica T $T = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 + 2 \left[\frac{1}{2} m \dot{y}_m^2 \right]$

$$T = \frac{1}{2} M \dot{u}^2 + m (\dot{u} + L \dot{\theta})^2$$

Energia Potenziale Elastica $V = 2 \frac{1}{2} k \theta^2$

..eseguimo tutte le derivate necessarie $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{knc}$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{u}} = M\dot{u} + 2m(\dot{u} + L\dot{\theta})$$

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 2mL(\dot{u} + L\dot{\theta})$$

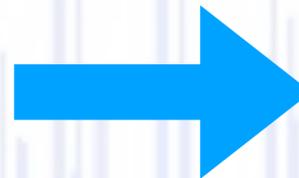
$$\frac{\partial T}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta} = 2k\theta$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_k} + \frac{\partial V}{\partial q_k} = Q_{knc}$$



$$M\ddot{u} + 2m(\ddot{u} + L\ddot{\theta}) = 0$$

$$2mL(\ddot{u} + L\ddot{\theta}) + 2k\theta = 0$$



$$\begin{bmatrix} M + 2m & 2mL \\ 2mL & 2mL^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{u} \\ \ddot{\theta} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Le coordinate sono accoppiate?
>..?

Quante condizioni al contorno servono?
>..?

La matrice di rigidità è singolare,
come si vede? cosa implica?
>..?
>..?

Scrittura equazioni del moto

Se i gradi di libertà aumentano, e le equazioni che descrivono le rigidità e gli smorzamenti si complicano, gli approcci presentati non cambiano!

Bisogna fare più attenzione!!

