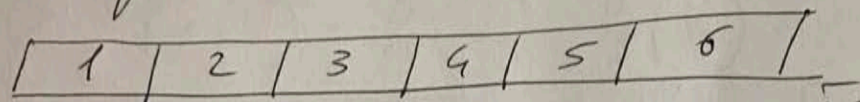
STATISTICA DELLA FRATTURA

Utilizzata per materiali fragili.

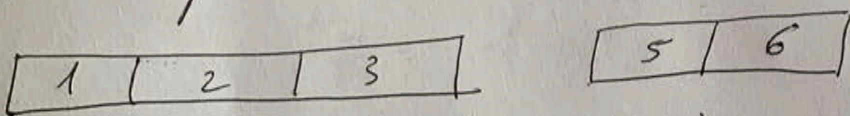
Il materiale in esame è pensato costituito da pezzi di volume, piccoli ma non infinitesimi.



Se il pezzo viene trazionato si spezzerà allo stress che rappresenta la resistenza dell'elemento meno resistente, supponiamo il 4

La resistenza dell'intero pezzo è $\sigma = \sigma_4$.

Rimangono



Conclusioni fino qui:

1. Ogni pezzo rimasto ha resistenza $\sigma > \sigma_4$
2. " " " è più piccolo di quello iniziale.

$\Rightarrow$ NEI MATERIALI FRAGILI, I PEZZI PICCOLI SONO PIÙ RESISTENTI!

Ora definiamo la probabilità di sopravvivenza di un pezzo di volume V, costituito da elementi $V = V_1 + V_2 + \dots V_n$

$$P_S(V) = P_S(V_1 + V_2 + \dots V_n)$$

LA probabilità di sopravvivenza è indipendente per ogni pezzo:

$$\Rightarrow P_S(V) = P_S(V_1) \cdot P_S(V_2) \cdots P_S(V_n)$$

$$\Rightarrow P_S(V) = \prod_i P_S(V_i) \qquad \boxed{\prod = \text{Produttoria}}$$

ove passiamo alla probabilità di fallimento:

$$P_F = 1 - P_S$$

$$\Rightarrow P_F(V_i) = 1 - P_S(V_i)$$

$$\Rightarrow P_S(V_i) = 1 - P_F(V_i)$$

Quindi l'espressione di sopra diviene

$$1 - P_F(V) = \prod_i \left[1 - P_F(V_i)\right]$$

Prendiamo il logaritmo naturale:

$$\ln\left[1 - P_F(V)\right] = \ln\left\{\prod_i \left[1 - P_F(V_i)\right]\right\}$$

Cioè

$$\ln[1-P_F(V)] = \sum_i \ln[1-P_F(V_i)]$$

Ora utilizziamo l'espansione di TAYLOR!

$$\ln(1-x) = -\left[x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots\right]$$

Per x piccoli $\Longrightarrow$

$$\ln[1-P_F(V)] = -\sum_i P_F(V_i)$$

Passando al continuo

$$\ln[1-P_F(V)] = -\int_V p \, dV$$

dove "p" è una funzione di distribuzione di probabilità. Quindi

$$P_F(V) = 1 - e^{-\int_V p \, dV}$$

Weibull negli anni Trenta propose:

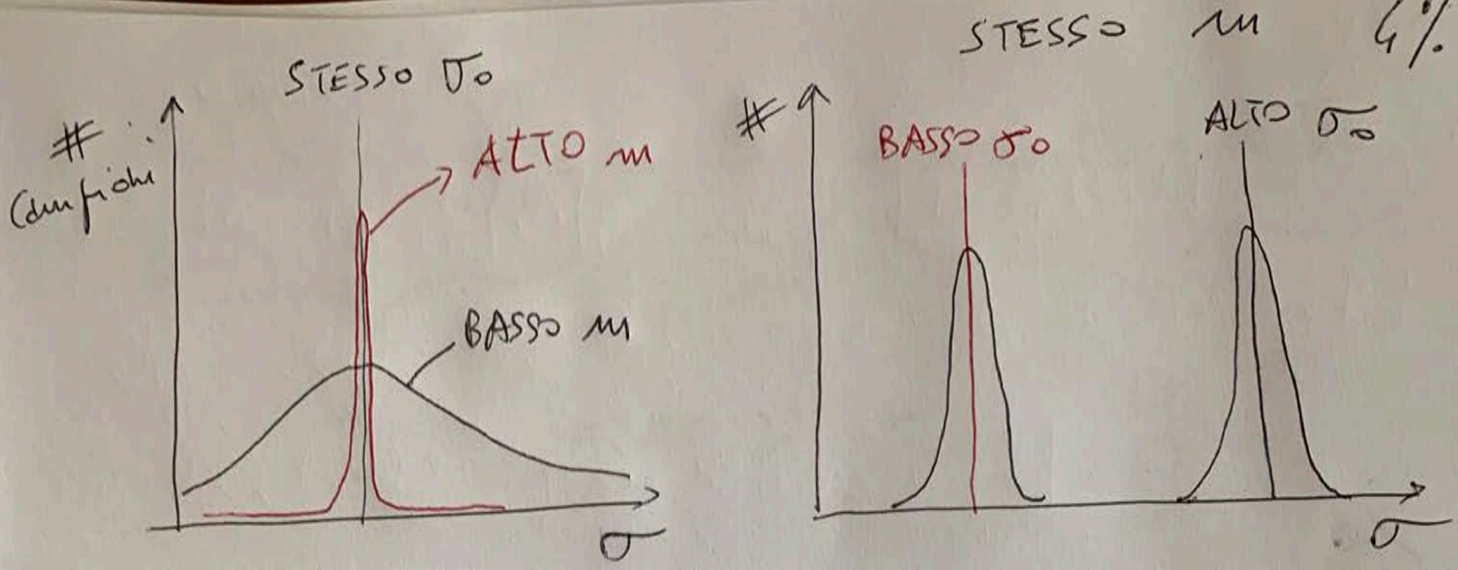
$$p = \left(\frac{\sigma - \sigma_{min}}{\sigma_0}\right)^m$$

σ = stress applicato

σ_0 = legato alla media

σ_{min} = stress MINIMO a cui si ha fallimento

m = MODULO DI WEIBULL

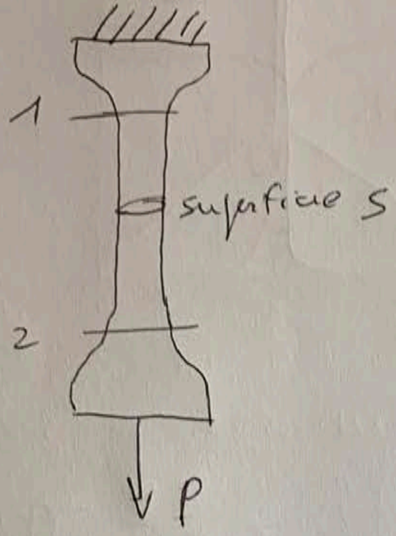


Per i ceramici normalmente si assume $\sigma_{min} = 0$ cioè si assume che qualche pezzo può fallire anche a stress bassissimi ($=0$)!!

$$P_F(V) = 1 - e^{-\int_{\bar{V}} \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m d\bar{V}}$$

Questa espressione mi dice qual è la probabilità di fallimento di un pezzo di Volume $\bar{V}$ sottoposto ad un carico σ.

Applichiamo il caso più semplice: 5%
Trazione pura:



$\sigma = \frac{P}{S}$, su tutto il volume tra le linee 1 e 2.

$$P_F = 1 - e^{-\int_V \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m d\bar{V}}$$

In questo caso lo stress σ non dipende dal punto nel volume:

$$\Longrightarrow \quad P_F = 1 - e^{-\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \bar{V}} \qquad \left(\int_V d\bar{V} = \bar{V}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad 1 - P_F = e^{\left(-\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \bar{V}}$$

$$\Longrightarrow \quad \ln(1 - P_F) = -\left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^{\bar{V}}$$

$$\ln 1 - \ln(1 - P_F) = \ln 1 + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \bar{V}$$

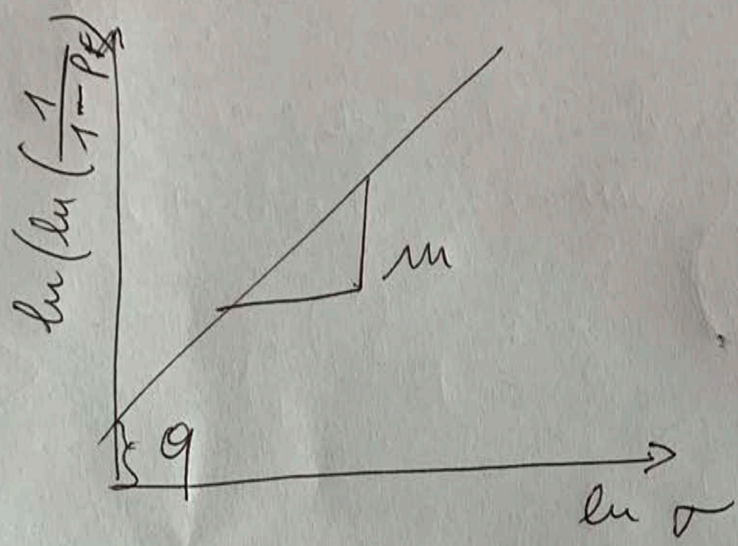
$$\ln\left(\frac{1}{1 - P_F}\right) = \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^m \bar{V}$$

$$\underbrace{\ln\left[\ln\left(\frac{1}{1-P_F}\right)\right]}_{y} = m\,\underbrace{\ln\sigma}_{x} \underbrace{- m\ln\sigma_0 + \ln V}_{q}$$

$$y = m\,x + q$$

m ↑ DERIVATA

q ↑ INTERCETTA



Ma praticamente come si fa??