Principi di Ingegneria Elettrica
Ingegneria Industriale

– CAMPI ELETTROMAGNETICI–

Stefano Pastore

Dipartimento di Ingegneria e Architettura
a.a. 2018-19

Forza di Coulomb

- Nel 1785, Charles Coulomb fece degli esperimenti con una bilancia di torsione sulle cariche elettriche. Trovò che, per cariche puntiformi, vale la seguente legge:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{{R_{12}}^2}$$

- Dove la forza *F* è misurata in [N], le cariche *Q* in Coulomb [C], la distanza R_{12} in [m], la costante, detta permittività del vuoto, $\varepsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}$ $C^2/N\ m^2$

- La forza F_2, agente sulla carica Q_2 da parte di Q_1, è diretta secondo la congiungente le cariche puntiformi, da Q_2 a Q_1, ed è attrattiva o repulsiva a seconda del segno delle cariche. Analogamente, la carica Q_1 subisce il campo creato dalla carica Q_2 mediante una forza: $F_1 = -F_2$.

- La carica è quantizzata. La carica fondamentale è quella dell'elettrone che è pari a: $1.6021892 \times 10^{-19}$ C.

Campo elettrico

- Per definire il vettore campo elettrico E_1 di una carica Q_1, in modo operativo, poniamo una piccola carica di prova positiva Q_2 nel punto che si deve esaminare, a distanza R_{12} da Q_1, e misuriamo la forza elettrica F_{12} che agisce sulla carica. L'intensità del campo elettrico E_1 è data dalla forza esercitata sulla carica unitaria positiva:

$$\mathbf{E}_1 = \frac{F_{12}}{Q_2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_1}{R_{12}{}^2} \mathbf{a}_{12}$$

- dove $\mathbf{a}_{12}$ è il versore che esce da Q_1 e punta a Q_2 e ε_0 è la costante dielettrica (permittività) del vuoto.

Additività del campo elettrico

- In un mezzo diverso dal vuoto si ha:

$$\varepsilon = \varepsilon_r \, \varepsilon_0$$

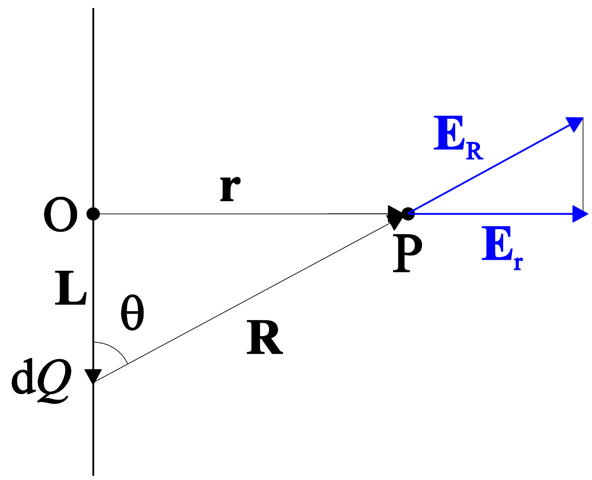
- Dove ε_r è la costante dielettrica relativa del mezzo in cui è immersa la carica elettrica

- Per trovare il campo **E** dovuto a N cariche puntiformi, si possono sommare vettorialmente i campi $\mathbf{E}_\mathrm{n}$ dovuti alle singole cariche:

$$\mathbf{E} = \sum_n \mathbf{E}_n$$

Campo elettrico di una linea

- Consideriamo una linea infinita di cariche di densità di carica ρ_L. Possiamo calcolarne il campo in P estendendo la formula precedente.



- Poiché $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{L}$

$$\mathrm{d}E_r = \frac{\rho_L \mathrm{d}L}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \sin\theta = -\frac{\rho_L \sin\theta \,\mathrm{d}\theta}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

- Visto che:

$$L = \frac{r}{tg\theta}, \qquad dL = -\frac{r d\theta}{\sin^2\theta}, \qquad R = \frac{r}{\sin\theta}$$

Campo elettrico di una superficie

- Integrando il campo da $-\infty$ a ∞, che equivale a dire sommando i contributi infinitesimi del campo su tutta la linea, otteniamo:

$$E_r = -\frac{\rho_L}{4\pi\varepsilon_0 r}\int_{\pi}^{0}\sin\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{\rho_L}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

- Agendo analogamente per una superficie piana con carica superficiale ρ_S, si ottiene che la componente del campo lungo un asse x perpendicolare alla superficie è:

$$E_x = \frac{\rho_s}{2\varepsilon_0}$$

- Il campo **E** di due conduttori piani, posti a $x = 0$ (carica: ρ_s) e a $x = a > 0$ (carica: $-\rho_s$), è: $\mathbf{E} = \mathbf{E}^+ + \mathbf{E}^-$:

$$\begin{cases} x > a & E_x = \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0} - \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0} = 0 \\ x < 0 & E_x = -\dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0} = 0 \\ 0 < x < a & E_x = \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0} + \dfrac{\rho_s}{2\varepsilon_0} = \dfrac{\rho_s}{\varepsilon_0} \end{cases}$$

Flusso elettrico

- Le linee di flusso sono utili per rappresentare il campo elettrico e sono tracciate seguendo le due regole:
- 1. sono tangenti al campo elettrico in ogni punto,
- 2. il numero di linee che attraversano una superficie di area unitaria è proporzionale all'intensità del campo **E**.

- ***Teorema di Gauss***
- Il flusso elettrico passante attraverso una qualsiasi superficie chiusa è proporzionale alla carica totale contenuta all'interno della superficie:

$$\Psi_E = \int_S \mathrm{d}\Psi = \int_S \mathbf{E}_S \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

- Come conseguenza del teorema di Gauss, si può ricavare la seguente legge: un eccesso di carica, posto su un conduttore isolato, si distribuisce sulla superficie esterna.

Lavoro su una carica elettrica

- Se vogliamo muovere una carica Q a distanza d**L** in un campo elettrico **E**, dobbiamo esercitare una forza sulla carica Q uguale e opposta alla forza esercitata dal campo elettrico sulla carica, quindi:

$$\mathbf{F}_{\mathrm{E}} = Q\,\mathbf{E} \Rightarrow \mathbf{F}_{\mathrm{L}} = -\,\mathbf{F}_{\mathrm{E}} \cdot \mathbf{a}_{\mathrm{L}} = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{a}_{\mathrm{L}}$$

- Componente della forza $\mathbf{F}_{\mathrm{E}}$ sulla direzione $\mathbf{a}_{\mathrm{L}}$ di d**L**
- Il lavoro differenziale esercitato è allora:

$$\mathrm{d}W = -Q\mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L}$$

- Il lavoro per spostare una carica di una distanza finita è pari a:

$$W = -Q \int_{inizio}^{fine} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L}$$

Differenza di potenziale elettrico

- E' un integrale di linea, esteso lungo tutta la linea su cui si vuol far muovere la carica. Se il campo è uniforme lungo tutto il percorso, si ottiene che:

$$W = -Q \int_{inizio}^{fine} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L} = -Q\mathbf{E}\int_{B}^{A} \mathrm{d}\mathbf{L} = -Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{BA}$$

- Definiamo come **differenza di potenziale tra A e B** il lavoro fatto per spostare una carica unitaria positiva dal punto B al punto A in un campo elettrico:

$$\boxed{V_{AB} = -\int_{B}^{A} \mathbf{E} \cdot \mathrm{d}\mathbf{L}}$$

- L'unità di misura è il volt [V], che corrisponde a 1 joule/ 1coulomb [J/C])

Potenziale di una carica puntiforme

- Troviamo la differenza di potenziale tra due punti A e B a distanze radiali r_A e r_B dalla carica Q. Si ha che:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathbf{a}_r, \ \mathrm{d}\mathbf{L} = \mathrm{d}r\,\mathbf{a}_r$$

- Quindi:

$$V_{AB} = -\int_B^A \mathbf{E}\cdot\mathrm{d}\mathbf{L} =$$

$$= -\int_B^A \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right)$$

- Se $r_A < r_B$ e $Q > 0$, allora la differenza di potenziale è positiva, indicando che la sorgente esterna spende dell'energia per portare la carica positiva vicina all'altra carica positiva.

Conservatività del campo elettrico

- In caso di campo elettrostatico (o a bassa frequenza), si dimostra che l'integrale del campo elettrico non dipende dal percorso fatto per congiungere i punti di partenza e arrivo:

$$\oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{L} = 0$$

- Ogni campo che soddisfa questa equazione è detto conservativo, nel senso che l'energia si conserva in un ciclo, nessun lavoro viene fatto su un percorso chiuso.

- Il secondo principio di Kirchoff delle tensioni è basato su questa proprietà.

Definizione di potenziale

- La differenza di potenziale tra due punti qualsiasi A e B in un campo generato da una carica puntiforme Q è:

$$V_{AB} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B}\right) = \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A}}_{V_A} - \underbrace{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_B}}_{V_B}$$

- Se $r_B \rightarrow \infty$, il valore di V_B tende a zero. Possiamo allora definire un punto di riferimento a potenziale zero situato all'infinito. Si ottiene così l'espressione del potenziale in A riferito al potenziale zero posto all'infinito:

$$V_A = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r_A}$$

- Quindi V_A rappresenta il lavoro che deve essere compiuto per portare la carica di 1 C dall'infinito al punto posto a r_A dalla carica Q.

Potenziale e campo

- In generale, il potenziale V di un punto a distanza r dalla carica Q vale:

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r} + C_1$$

- Dove la costante C_1 mi permette di mettere a zero il potenziale di qualsiasi punto.
- Una superficie equipotenziale è una superficie composta da tutti i punti aventi lo stesso potenziale, per cui non si compie nessun lavoro spostando una carica lungo una superficie equipotenziale. Per la carica puntiforme Q, le superfici equipotenziali sono delle sfere concentriche.

- Vale la seguente relazione inversa:

$$\mathbf{E} = -\mathrm{grad}\ V$$

Corrente elettrica

- La corrente elettrica è formata da cariche in movimento libero all'interno di un materiale, per esempio un filo di rame.
- L'unità di misura è l'ampere [A], definita come il passaggio di 1 coulomb per secondo in una data sezione di un filo. Si ha perciò:

$$i = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

- Il filo avrà una certa sezione, per cui possiamo pensare alla corrente che scorre nell'unità di superficie del filo. Chiamiamo questa grandezza densità di corrente **J**. Definita la densità di corrente elettrica **J**, la corrente I corrisponde al flusso di **J** attraverso superficie S del filo:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S}$$

Principio di conservazione delle cariche

- Esiste un **principio di conservazione delle cariche**, per cui si possono solo separare le cariche di segno opposto, ma non si possono creare dal nulla. Questo si traduce nella seguente equazione che esprime la corrente I che fluisce attraverso una superficie chiusa:

$$I = \oint \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = -\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t}$$

- Questa equazione è la versione integrale della equazione di continuità della corrente, che porterà al primo principio di Kirchhoff dei circuiti.

Conduttività nei metalli

- I conduttori metallici sono dei solidi che non hanno intervallo energetico tra la banda di conduzione e la banda di valenza. Gli elettroni dei livelli energetici più alti della banda di valenza possono entrare facilmente nella banda di conduzione, se sollecitati opportunamente. Quindi, sotto l'azione di un campo elettrico, gli elettroni si muovono liberamente lungo il reticolo cristallino del materiale conduttore. La relazione tra il campo elettrico applicato e la densità di corrente ottenuta è:

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$$

- Dove σ **è la conduttività misurata** in Siemens per metro [S/m]. E' una funzione del metallo e della temperatura.

- Gli elettroni si muovono liberamente lungo il reticolo cristallino del materiale conduttore, ad una velocità di deriva $\mathbf{v}_d$. In generale vale la seguente relazione:

$$\mathbf{J} = \mathbf{v}_d \, \rho_v$$

- Con ρ_v densità volumetrica di carica

Legge di Ohm

- Prendiamo in considerazione un conduttore cilindrico omogeneo in cui il campo e la densità di corrente siano considerati uniformi. Si ha:

$$I = \int_S \mathbf{J} \cdot d\mathbf{S} = JS$$

$$J = \sigma \mathbf{E}$$

$$V_{AB} = -\mathbf{E}\int_B^A \mathrm{d}\mathbf{L} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{BA} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{L}_{AB} = EL$$

$$\begin{cases} \sigma E = \sigma \dfrac{V_{AB}}{L} \\ \sigma E = J = \dfrac{I}{S} \end{cases}$$

$$\sigma \frac{V_{AB}}{L} = \frac{I}{S} \Rightarrow V_{AB} = \frac{L}{\sigma S} I = \rho \frac{L}{S} I$$

- la costante ρ **= 1/σ è la resistività del materiale**. Essa varia con il materiale e quasi linearmente con la temperatura e si misura in [Ω·m].

Legge di Ohm (2)

- La resistenza elettrica è definita come:

$$R = \rho \frac{L}{S}$$

- Si misura in [Ω]
- Si definisce come conduttanza:

$$G = \frac{1}{R} = \sigma \frac{S}{L}$$

- Si misura in [S]=[Ω^{-1}]

- La legge di Ohm è:

$$V = RI$$

$$I = GV$$

Effetto Joule

- Consideriamo un conduttore in cui è presente un campo elettrico **E**. Una carica Q è sottoposta ad una forza: $\mathbf{F} = Q\mathbf{E}$, per cui si muove lungo il reticolo cristallino ad una velocità di deriva $\mathbf{v}_\mathrm{d}$. La potenza dissipata p e la potenza per unità di volume sono:

$$p = \frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{v}_d = Q\mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_d$$

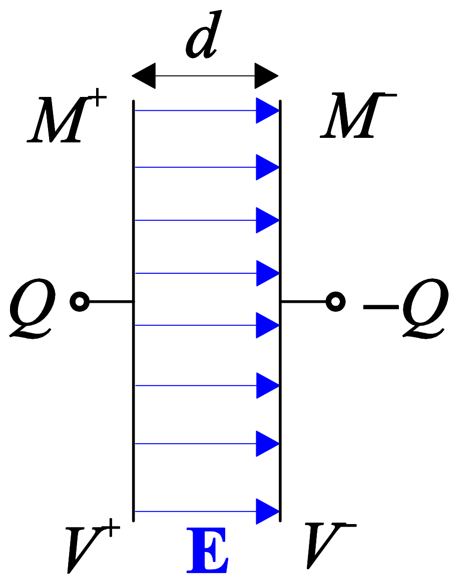
$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_d \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}V} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{v}_d \, \rho_V = \mathbf{E} \cdot \mathbf{J}$$

- Le dimensioni sono [W/m^3]. Quando i vettori **E** e **J** sono concordi, la potenza dissipata è positiva, come succede in una resistenza. Quando, invece, i due vettori sono discordi, la potenza dissipata è negativa, quindi fornita al circuito, come succede in una batteria. Quando la potenza è dissipata in calore, si parla di **effetto Joule**.
- Se noi integriamo la densità di potenza su un volume cilindrico, otteniamo l'espressione tipica dei circuiti:

$$p = V_{\mathrm{AB}} \, I$$

Capacità

- Consideriamo due conduttori separati da un materiale dielettrico. Un conduttore M^+ ha una carica totale positiva Q, mentre l'altro conduttore M^- ha una carica totale negativa $-Q$.



- Si ha un flusso elettrico (vettore **E**) uscente da M^+ e diretto verso M^-, perpendicolare ai conduttori (trascuriamo gli effetti di bordo).

- Il campo elettrico **E** genera una differenza di potenziale tra le piastre pari a $\Delta V = V^+ - V^-$. Le superfici dei conduttori sono equipotenziali, $V^+ > V^-$.

Condensatore

- Calcolando ΔV in funzione di Q, si trova:

$$Q = C\,\Delta V$$

- Si definisce come capacità del sistema dielettrico-conduttori (condensatore) il rapporto:

$$C = \frac{Q}{\Delta V}$$

- Dove:

$$C = \varepsilon \frac{S}{d}$$

- La capacità si misura in farad [F] (1C/1V)

Equazione di un condensatore

- La legge costitutiva di un condensatore lineare è:

$$q = Cv$$

- Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}, \; i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$

- Si ottiene:

$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}}$$

- L'energia immagazzinata in un condensatore è:

$$W_E = \frac{1}{2}Cv^2 = \frac{1}{2}qv = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$$

Corrente di spostamento

- Il condensatore è formato da due piastre separate da un isolante, nondimeno è percorso da una corrente, come abbiamo visto nella diapositiva precedente, se è sottoposto a una tensione variabile.

- La corrente in questo caso è chiamata di «spostamento». Se il conduttore ha una superficie *S*, è uguale a:

$$I_d = \int_S \mathbf{J}_d \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}$$

Legge di Biot-Savart

- Introduciamo ora il campo magnetico e le sue leggi.
- La legge di Biot-Savart permette di calcolare il campo magnetico in dipendenza dalle correnti elettriche, precisamente da un elemento differenziale di corrente in continua:

$$\mathrm{d}\mathbf{H} = \frac{I_1 \mathrm{d}\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

- L'elemento di corrente nel punto 1 produce un campo magnetico nel punto 2.
- Il vettore **H**, chiamato intensità di campo magnetico, si misura in [A/m].

Legge di Ampere

- La legge di Ampere afferma che, per una corrente continua *I*, si ha:

$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathrm{dL} = I$$

- Definiamo come positiva la corrente che fluisce nella direzione di avanzamento di una vite destrorsa fatta ruotare nel senso del percorso della linea chiusa.
- Consideriamo un filo rettilineo molto lungo percorso da una corrente *I*. Per la simmetria del sistema e altre considerazioni, il campo sarà costante a distanza *r* dal filo e consisterà solo della componente H_φ. Si può calcolare come:

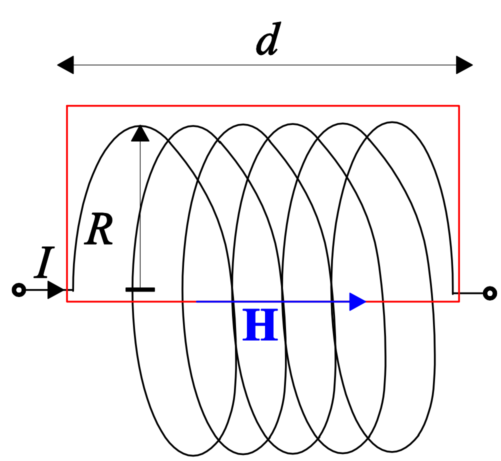
$$\oint_L \mathbf{H} \cdot \mathrm{dL} = \int_0^{2\pi} H_\varphi r \, \mathrm{d}\varphi = H_\varphi r 2\pi = I$$

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r}$$

Campo magnetico in un solenoide

- Consideriamo ora una bobina, o solenoide, di raggio *R*, con *N* spire avvolte in aria su una lunghezza d, percorse da una corrente *I*.
- Il campo, ben dentro al solenoide, è disposto lungo l'asse del solenoide, con il verso determinato dalla regola della mano destra (vite destrorsa, etc) secondo il verso di percorrenza delle spire da parte della corrente.
- Supponiamo nullo il campo esterno al solenoide stesso. Si può calcolare l'intensità di campo applicando la legge di Ampere su un percorso che passa all'interno e all'esterno del solenoide:

$$Hd = NI \Rightarrow H = \frac{NI}{d}$$



Densità di flusso magnetico

- Introduciamo ora il vettore **B**, chiamato densità di flusso magnetico, nello spazio vuoto, come:

$$\mathbf{B} = \mu_0 \, \mathbf{H}$$

- dove **B** è misurato in weber per metro quadro [Wb/m2] o in tesla [T]. La costante μ_0, chiamata permeabilità magnetica, ha il valore nello spazio vuoto di:

$$\mu_0 = 4\pi \; 10^{-7} \text{ H/m}$$

- dove il simbolo [H] sta per henry, come vedremo più tardi. Notate che, poiché H è misurato in [A/m], il weber ha una dimensione uguale a [H·A].

Flusso di B

- Per il vettore **B** si può scrivere che il flusso magnetico attraverso una superficie S è:

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} \qquad \text{Wb}$$

- La carica *Q* è la sorgente delle linee di flusso del campo elettrico, che partono dalle cariche positive per finire nelle cariche negative. Non ci sono sorgenti analoghe nel campo magnetico, non esistono "cariche monopolo magnetiche". Le linee di **B**, che nel vuoto è proporzionale a **H**, seguono lo stesso andamento a linea chiusa.
- Ne consegue che la legge di Gauss per il campo magnetico è:

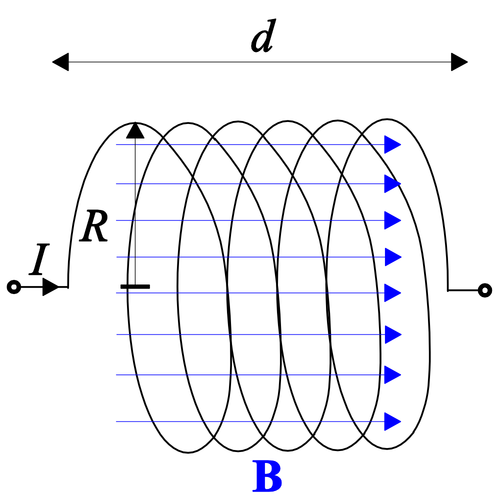
$$\oint_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

Flusso concatenato

- Consideriamo una bobina con N spire in cui una corrente I produce il flusso Φ.

- Questo flusso attraversa tutte le N spire, e quindi il flusso concatenato con la bobina è N volte il flusso concatenato con la singola spira, cioè è $N\Phi$.

- Quindi il flusso concatenato con la bobina è definito come il flusso totale $N\Phi$ che attraversa tutte le spire della bobina.



Induttanza di una bobina

- Consideriamo ora un materiale magnetico lineare, in cui il rapporto tra *B* e *H* sia lineare.
- definiamo come induttanza il rapporto tra il flusso totale concatenato e la corrente che lo produce:

$$L = \frac{N\Phi}{I}$$

- L'induttanza si misura in henry [H], che è equivalente al [Wb/A].
- In materiali ferromagnetici, il legame tra la corrente e il flusso non è lineare, e quindi la definizione appena data di induttanza vale solo puntualmente, per un certo valore di campo. Quindi l'induttanza varia al variare del campo applicato.
- Per la bobina, l'induttanza vale:

$$\Phi = \mu_0 HS = \mu_0 \frac{NI}{d} S = \mu_0 \frac{N}{d} I\pi R^2 = \mu_0 n I \pi R^2$$

$$L = \frac{N\Phi}{I} = N\mu_0 n \pi R^2 = \mu_0 n^2 \pi R^2 d = \mu_0 n^2 S d$$

- dove $n = N/d$ è il numero di spire per unità di lunghezza.

Forze magnetiche

- La forza esercitata su una particella carica Q che si muove a velocità $\mathbf{v}$ in un campo magnetico è:

$$\mathbf{F} = Q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

- Per un elemento differenziale di carica dQ, si ha quindi:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \mathrm{d}Q\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Forze magnetiche (2)

- Nota la velocità di deriva degli elettroni $\mathbf{v}_d$ e la densità volumetrica di carica si ρ_v ha:

$$\mathbf{J} = \rho_v \, \mathbf{v}_d$$

- Ma:

$$dQ = \rho_v \, dv$$

- da cui:

$$d\mathbf{F} = \mathbf{J} \times \mathbf{B} \, dv$$

- Considerando un elemento infinitesimo di filo d$\mathbf{L}$ percorso dalla corrente I, si ha:

$$\mathbf{J} dv = I \, d\mathbf{L}$$

- Da cui infine:

$$d\mathbf{F} = I \, d\mathbf{L} \times \mathbf{B}$$

- Per un filo rettilineo in un campo uniforme:

$$\mathbf{F} = I \, \mathbf{L} \times \mathbf{B} = -I \, \mathbf{B} \times \mathbf{L}$$

Forze magnetiche (3)

- Se due fili sono percorsi da corrente, entrambi genereranno un campo magnetico e si eserciterà tra loro una forza.
- Il campo magnetico in 2 generato da un elemento di corrente in 1 è:

$$\mathrm{d}\mathbf{H}_2 = \frac{I_1 \mathrm{d}\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12}}{4\pi R_{12}^2}$$

- Nel vuoto, si ha: $\mathrm{d}\mathbf{B}_2 = \mu_0 \, \mathrm{d}\mathbf{H}_2$
- Per cui:

$$\mathrm{d}(\mathrm{d}\mathbf{F}_2) = I_2 \, \mathrm{d}\mathbf{L}_2 \times \mathrm{d}\mathbf{B}_2 =$$

$$= \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi R_{12}^2} \mathrm{d}\mathbf{L}_2 \times (\mathrm{d}\mathbf{L}_1 \times \mathbf{a}_{R12})$$

Forze magnetiche (4)

- La forza totale tra due fili si ottiene integrando l'espressione precedente sui loro percorsi chiusi:

$$\mathbf{F}_2 = \mu_0 \frac{I_1 I_2}{4\pi} \oint \left[\oint \frac{\mathbf{a}_{R12} \times \mathrm{d}\mathbf{L}_1}{R_{12}^2} \right] \times \mathrm{d}\mathbf{L}_2$$

- La forza di repulsione tra due fili diritti e infiniti posti a distanza d e percorsi, rispettivamente, da correnti I e $-I$ è:

$$F = \mu_0 \frac{I^2}{2\pi d} \quad [N/m]$$

- Infine, la forza su una spira immersa in un campo magnetico uniforme è:

$$\mathbf{F} = -I \oint \mathbf{B} \times \mathrm{d}\mathbf{L} = -I\mathbf{B} \times \oint \mathrm{d}\mathbf{L} = 0$$

Coppia magnetica su una spira

- La coppia è definita come:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R} \times \mathbf{F}$$

- Assumendo di avere due forze $\mathbf{F}_1$ e $\mathbf{F}_2$ in P_1 e P_2, congiunte all'origine da due vettori $\mathbf{R}_1$ e $\mathbf{R}_2$, applicate a una spira che non trasla, la coppia è:

$$\mathbf{T} = \mathbf{R}_1 \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{R}_2 \times \mathbf{F}_2, \quad \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = 0 \Rightarrow$$
$$\mathbf{T} = (\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_2) \times \mathbf{F}_1 = \mathbf{R}_{21} \times \mathbf{F}_2$$

- Dove $\mathbf{R}_{21}$ è il vettore da P_2 a P_1.

Legge di Faraday

- Vediamo come un campo magnetico variabile produca un campo elettrico.
- La legge di Faraday è:

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

- La relazione costitutiva di un solenoide è:

$$\Phi = \mu_0 n^2 S d\, I = LI$$

- Derivando rispetto al tempo:

$$\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -e = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$v = -e \Rightarrow \boxed{v = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$